Глава IV
Методы интегрирования

В этой главе мы рассмотрим вопросы, связанные с проблемами разрешения (интегрирования) уравнений движения в элементарных функциях или в неопределённых интегралах от элементарных функций, то есть рассмотрим задачи разрешимые в квадратурах.[1] Рассмотрим системы материальных точек с циклическими координатами, уравнение Рауса и функцию Рауса, а так же метод понижения числа степеней свободы системы материальных точек при помощи уравнения энергии. Уравнение Уиттекера.

§4.1. Задачи, разрешимые в квадратурах

В двух предыдущих главах мы показали, что определение движения голономной системы материальных точек с конечным числом степеней свободы сводится к решению некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предположим, что нам задана система материальных точек, положение которой в некоторый момент времени t определено набором координат $q_1, q_2, ..., q_n$, а n - число степеней свободы.

В предыдущих главах нами установлено, что система уравнений движения состоит из n дифференциальных уравнений второго порядка с зависимыми[2] переменными $q_1, q_2, ..., q_n$ и с независимым временем t. Порядок такой системы равен $2n$ (сумма наивысших порядков производных от зависимых переменных, входящих в уравнения данной системы).

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что число произвольных постоянных интегрирования, входящих в общее решение какой-нибудь системы дифференциальных уравнений, равно порядку этой системы.

---

[1] Решение дифференциальных уравнений в квадратурах существует лишь для очень немногих типов уравнений.

[2] Здесь имеется в виду зависимость координат от времени.

Общее решение голономной системы материальных точек с n степенями свободы содержит $2n$ постоянных интегрирования.

Любая система дифференциальных уравнений k -го порядка может быть приведена к виду:

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r(x_1, x_2, ..., x_k, t), \quad r = 1,2,...,k, \tag{4.1.1}$$

где $X_1, X_2, ..., X_k$ - известные функции их аргументов. Для этого следует сначала ввести в качестве новых зависимых переменных $x_1, x_2, ..., x_k$ первоначальные зависимые переменные и их производные до наивысшего порядка, встречающегося в первоначальной системе уравнений.

Рассмотрим систему уравнений четвёртого порядка

$$\ddot{q}_1 = Q_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2), \qquad \ddot{q}_2 = Q_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2),$$

(где Q_1 и Q_2 - функции указанных аргументов), которая с помощью подстановки

$$x_1 = q_1, \; x_2 = q_2, \; x_3 = \dot{q}_1, \; x_4 = \dot{q}_2$$

приводится к виду:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = Q_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2), \quad \dot{x}_4 = Q_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2).$$

Мы можем рассматривать систему уравнений (4.1.1) как нормальную форму некоторой системы дифференциальных уравнений k -го порядка.

Если некоторая функция $f(x_1, x_2, ..., x_k, t)$ обладает тем свойством, что $\frac{df}{dt} = 0$ при подстановке вместо $x_1, x_2, ..., x_k$ любой функции от t, удовлетворяющей уравнениям (4.1.1), то уравнение

$$f(x_1, x_2, ..., x_k, t) = const \tag{4.1.2}$$

называется интегралом системы.

Найдём условие при котором некоторая заданная функция $f(x_1, x_2, ..., x_k, t)$ представляет интеграл системы. Из условия $\frac{df}{dt} = 0$ следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x}_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_k}\dot{x}_k=0 \qquad (4.1.3)$$

или в соответствии с (4.1.1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}X_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}X_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_k}X_k=0\,. \qquad (4.1.4)$$

Если (4.1.4) выполняется тождественно, то

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_k,t\right)=const$$

является интегралом системы (4.1.1).

Полное решение системы дифференциальных уравнений (4.1.1) даётся k интегралами

$$f_r\left(x_1,x_2,\ldots,x_k,t\right)=a_r\,,\qquad \left(r=1,2,\ldots,k\right) \qquad (4.1.5)$$

с произвольными постоянными a_r, если интегралы (4.1.5) независимы, то есть ни один из них не является следствием остальных.

Таким образом решение динамической задачи с n степенями свободы сводится к нахождению $2n$ интегралов некоторой системы дифференциальных уравнений $2n$ - го порядка.

Возможность или невозможность решения динамической задачи в квадратурах (в элементарных функциях или неопределенных интегралах от элементарных функций) целиком зависит от вида кинетического потенциала. В настоящей главе мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся частные виды кинетического потенциала, при которых динамическая задача разрешается в квадратурах.

§4.2. Системы с циклическими координатами, уравнения Рауса

В §3.5. мы нашли первый интеграл уравнений движения (3.5.3) консервативной голономной системы материальных точек с n степенями свободы. Можно сразу указать ещё k интегралов, если среди координат, описывающих систему материальных точек, имеются так называемые *циклические координаты*.

Координаты $q_1, q_2, ..., q_k$ *называются циклическими, если они не входит явно в функцию Лагранжа* L, но эта функция содержит явно соответствующие скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_k$. В дальнейшем мы увидим, что, когда задача разрешима в квадратурах, в большинстве случаев это является следствием существования циклических координат.

Воспользуемся уравнением Лагранжа (3.4.5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \qquad r = 1,2,...,n. \tag{3.4.5}$$

Соответствующее уравнение Лагранжа для $q_1, q_2, ..., q_k$ циклических координат, примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) = 0, \qquad r = 1,2,...,k, \tag{4.2.1}$$

где $L = L(q_{k+1}, q_{k+2}, ..., q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n; t)$.

Интегрирование (4.2.1) даёт:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \beta_r, \qquad r = 1,2,...,k, \tag{4.2.2}$$

где $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ постоянные интегрирования. Последние уравнения определяют, очевидно, k интегралов нашей системы материальных точек.

Покажем теперь, как используя эти k интегралов, можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений.[1]

Метод Рауса заключается в одновременном исключении циклических координат из уравнений Лагранжа, при этом число уравнений движения в обобщённых координатах понижается на число исключённых циклических координат.

---

[1] Эти преобразования представляют собой частный случай преобразований Гамильтона, которые мы рассмотрим позже. Они были самостоятельно открыты Раусом в 1876 году и несколько позднее Гельмгольцем.

Предположим сначала, что функция Лагранжа зависит от всех обобщённых координат, обобщённых скоростей и времени, то есть

$$L = L(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t); \qquad (4.2.3)$$

в этом случае мы будем иметь n уравнений Лагранжа (3.4.5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \qquad r = 1,2,...,n. \qquad (3.4.5)$$

Для производных от L по первым k $(k \le n)$ обобщенным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_k$ введём обозначение

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = p_r, \qquad r = 1,2,...,k \qquad (4.2.6)$$

и назовём p_r *обобщёнными импульсами*. Подставляя (4.2.6) в (3.4.5) получим

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = \dot{p}_r, \qquad r = 1,2,...,k. \qquad (4.2.7)$$

Найдём полный дифференциал от функции Лагранжа (4.2.3):

$$dL = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_r} dq_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} d\dot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \qquad (4.2.8)$$

с учётом (4.2.6) и (4.2.7) получим

$$dL = \sum_{r=1}^{k} \dot{p}_r dq_r + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_r} dq_r + \sum_{r=1}^{k} p_r d\dot{q}_r +$$

$$+ \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} d\dot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \qquad (4.2.9)$$

Так как

$$\sum_{r=1}^{k} p_r d\dot{q}_r = d\sum_{r=1}^{k} p_r \dot{q}_r - \sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r dp_r, \qquad (4.2.10)$$

то

$$d\left(L-\sum_{r=1}^{k}p_r\dot{q}_r\right)=\sum_{r=1}^{k}\dot{p}_r dq_r+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_r}dq_r-$$

$$-\sum_{r=1}^{k}\dot{q}_r dp_r+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}d\dot{q}_r+\frac{\partial L}{\partial t}dt\,. \qquad (4.2.11)$$

Выражение, стоящее в скобках, в левой части (4.2.11) называют *функцией Рауса*

$$\boxed{R=L-\sum_{r=1}^{k}p_r\dot{q}_r\,.} \qquad (4.2.12)$$

Составим полный дифференциал от функции Рауса

$$dR=\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial R}{\partial q_r}dq_r+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_r}dq_r+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}d\dot{q}_r+$$

$$+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}d\dot{q}_r+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial R}{\partial p_r}dp_r+\frac{\partial R}{\partial t}dt\,. \qquad (4.2.13)$$

сравнивая между собой выражения (4.2.11) и (4.2.13) с учётом обозначений (4.2.12), получим

$$\frac{\partial R}{\partial q_r}=\dot{p}_r\,,\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}=0\,,\quad \frac{\partial R}{\partial p_r}=-\dot{q}_r\,,\qquad (r=1,2,...,k). \qquad (4.2.14)$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial q_r}=\frac{\partial L}{\partial q_r}\,,\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\,,\quad (r=k+1,k+2,...,n). \qquad (4.2.15)$$

Кроме того

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial t}. \qquad (4.2.16)$$

Из условия

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} = 0, \qquad (r = 1,2,...,k) \tag{4.2.17}$$

следует, что функция Рауса от первых k обобщённых скоростей не зависит. Запишем теперь уравнение Лагранжа (3.4.5) с учётом (4.2.15), в результате чего получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_r} = 0, \qquad (r = k+1, k+2,...,n) \tag{4.2.18}$$

и

$$\dot{q}_r = -\frac{\partial R}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = \frac{\partial R}{\partial q_r} \quad (r = 1,2,...,k). \tag{4.2.19}$$

Здесь R есть функция только переменных
$q_{k+1}, q_{k+2},..., q_n, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2},..., \dot{q}_n$ и постоянных $\beta_1, \beta_2,..., \beta_k$ в соответствии с (4.2.2). Таким образом мы получили новую систему уравнений Лагранжа, которую можно отнести к некоторой новой динамической задаче с $n-k$ степенями свободы. Новыми координатами будут служить величины $q_{k+1}, q_{k+2},..., q_n$, а новым кинетическим потенциалом – величина R. Если после решения новой динамической задачи переменные $q_{k+1}, q_{k+2},..., q_n$ будут определены как функции времени, то остальные переменные $q_1, q_2,..., q_k$ можно будет найти из уравнений:

$$q_r = -\int \frac{\partial R}{\partial p_r} dt, \qquad (r = 1,2,...,k). \tag{4.2.20}$$

а с учётом (4.2.2)

$$q_r = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta_r} dt, \qquad (r = 1,2,...,k). \tag{4.2.21}$$

Таким образом *динамическая задача с n степенями свободы и с k циклическими координатами может быть сведена к динамической задаче с $n-k$ степенями свободы.*

§4.3. Интегралы количества движения и момента количества движения

В этом параграфе мы рассмотрим два типа циклических координат, которые наиболее часто встречаются в динамических задачах. Эти вопросы, но с другой точки зрения, мы рассматривали во второй главе.

1. *Системы материальных точек с интегралом количества движения*. Пусть $q_1, q_2, ..., q_n$ координаты некоторой консервативной голономной системы материальных точек с n степенями свободы, а T и V - её кинетическая и потенциальная энергии.

Уравнения движения такой системы будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \quad , \qquad (r = 1,2,...,n). \tag{4.3.1}$$

Пусть одна из координат, например q_1, является циклической и что она, кроме того, обладает тем свойством, что изменение её на величину l, при сохранении значений остальных координат $q_2, q_3, ..., q_n$, соответствует поступательному перемещению всей системы материальных точек на отрезок l по какому-нибудь определённому направлению. Примем это направление за ось x некоторой декартовой системы координат. Поскольку координата q_1 циклическая, мы можем написать интеграл:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = const\,. \tag{4.3.2}$$

Выясним физический смысл этого интеграла. Так как кинетическая энергия системы материальных точек в данном случае есть

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} m_r\left(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2\right), \tag{4.3.3}$$

то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\sum_{r=1}^{n} m_r\left(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2\right), \tag{4.3.4}$$

или с учётом (3.1.3)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{r=1}^{n} m_r\left(\dot{x}_r\frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}_r\frac{\partial \dot{y}_r}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}_r\frac{\partial \dot{z}_r}{\partial \dot{q}_1}\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} m_r\left(\dot{x}_r\frac{\partial x_r}{\partial q_1} + \dot{y}_r\frac{\partial y_r}{\partial q_1} + \dot{z}\frac{\partial z_r}{\partial q_1}\right) = \sum_{r=1}^{n} m_r\dot{x}_r\,, \tag{4.3.5}$$

так как в нашем случае $dx_r = dq_r$ и

$$\frac{\partial x_r}{\partial q_1} = 1\,, \quad \frac{\partial y_r}{\partial q_1} = 0\,, \quad \frac{\partial z_r}{\partial q_1} = 0\,. \tag{4.3.6}$$

Из §2.2. известно, что величина $\sum m_r\dot{x}_r$ есть составляющая по оси x количества движения системы материальных точек. Мы можем, поэтому уравнение (4.3.2) истолковать следующим образом:

Если связи допускают поступательное перемещение системы материальных точек как твёрдого тела в каком-нибудь определённом направлении и если при этом потенциальная энергия системы не изменяется[1]*, то составляющая количества движения по этому направлению есть величина постоянная.*

Эта теорема называется *теоремой о сохранении количества движения*. Про системы материальных точек, для которых она справедлива, говорят, что они допускают интеграл количества движения.

2. *Системы материальных точек с интегралом момента количества движения.* Снова выберем систему материальных точек с координатами $q_1, q_2, ..., q_n$ с кинетической энергией T и с потенциальной энергией V. Допустим, что координата q_1 - циклическая и обладает тем свойством, что изменению её на величину α, при сохранении значений остальных координат, соответствует вращению всей системы материальных точек на

[1] Поступательное перемещение не отражается на зависимости кинетической энергии от скоростей и, следовательно, соответствующая координата является циклической.

угол α вокруг некоторой неподвижной в пространстве прямой.

Поскольку q_1 - циклическая координата, мы можем написать

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = const\,. \tag{4.3.2}$$

Дадим снова физическое толкование интеграла (4.3.2). Как и в первом случае можем написать

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} m_r\left(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2\right), \tag{4.3.3}$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\sum_{r=1}^{n} m_r\left(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2\right).$$

С учётом (4.3.5)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{r=1}^{n} m_r\left(\dot{x}_r\frac{\partial x_r}{\partial q_1} + \dot{y}_r\frac{\partial y_r}{\partial q_1} + \dot{z}\frac{\partial z_r}{\partial q_1}\right). \tag{4.3.4}$$

Полагая

$$x_r = r_r\cos\varphi_r\,, \qquad y_r = r_r\sin\varphi_r\,, \tag{4.3.5}$$

будем иметь:

$$d\varphi_r = dq_1\,, \tag{4.3.6}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x_r}{\partial q_1} \equiv \frac{\partial x_r}{\partial \varphi_r} = -r_r\sin\varphi_r = -y_r \\ &\frac{\partial y_r}{\partial q_1} \equiv \frac{\partial y_r}{\partial \varphi_r} = r_r\cos\varphi_r = x_r \\ &\frac{\partial z_r}{\partial q_1} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.3.7}$$

Теперь (4.3.4) можно записать так

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{r=1}^{n} m_r\left(-\dot{x}_r y_r + \dot{y}_r x_r\right). \tag{4.3.8}$$

Сравнивая (4.3.8) с (2.3.4), мы можем сказать, что уравнение (4.3.8) выражает *теорему о сохранении момента количества движения*.

Если связи допускают вращение системы материальных точек как твёрдого тела относительно некоторой оси и если при этом потенциальная энергия не изменяется, то момент количества движения системы материальных точек относительно этой оси есть величина постоянная.

§4.4. Уравнение энергии

Сделаем вывод интеграла уравнения движения, играющего очень важную роль во всех динамических задачах и в физике вообще.

Предположим, что нам дана консервативная система материальных точек с координатами $q_1, q_2, ..., q_n$ и с кинетическим потенциалом L не зависящими от времени. Следовательно, кинетический потенциал L не содержит явно время t, а зависит только от переменных $q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$. Продифференцируем кинетический потенциал L по времени

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_r}\dot{q}_r =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \ddot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}. \tag{4.4.1}$$

Здесь мы учли, что в соответствии с уравнением Лагранжа (3.4.5)

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right).$$

Интегрируя уравнение (4.4.1) получим:

$$\boxed{\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = h\,,} \tag{4.4.2}$$

где h - постоянная интегрирования. Уравнение (4.4.2) представляющее собой интеграл уравнения движения, называется *интегралом энергии* или *законом сохранения энергии*.

В §3.4. мы установили, что для натуральной системы материальных точек, связи которых не зависят от времени, кинетический потенциал L может быть представлен как $L = T - V$, где кинетическая энергия T представляет собой однородную функцию второго порядка относительно скоростей, а потенциальная энергия V зависит только от координат. С учётом вышесказанного интеграл энергии (4.4.2) примет

вид: $h = \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - T + V = 2T - T + V = T + V$,

или

$$h = T + V\,. \tag{4.4.3}$$

При выводе уравнения (4.4.3) мы учли, что кинетическая энергия T есть однородная функция от обобщённых скоростей и для натуральной системы материальных точек в соответствии с теоремой Эйлера об однородных функциях можно воспользоваться уравнением (3.5.4)

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = 2T\,. \tag{3.5.4}$$

Физический смысл уравнения (4.4.3) заключается в следующем:

В консервативных натуральных системах материальных точек сумма кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная. Это постоянное значение называется *полной механической энергией* системы материальных точек.

Замечание.

Два последних параграфа позволяют нам сделать следующий вывод:

Циклический характер координаты позволяет рассматривать движение системы материальных точек как целого, соответствующее этой координате, которое никак не сказывается на динамических свойствах системы материальных точек. Это говорит о том, что система дифференциальных уравнений (её Лагранжиан) инвариантна относительно преобразования, характеризующего «циклическое» движение, то есть устанавливается непосредственная связь между симметриями типа однородности и изотропности пространства и однородности времени с законами сохранения импульса, момента импульса и энергии. Характер циклической координаты (трансляционный или вращательный) указывает на тип сохраняющейся величины (импульс или момент импульса). Рассматривая в качестве циклической координаты время (время имеет трансляционный характер), мы получим закон сохранения энергии, установив, таким образом, связь между симметрией типа однородности времени с законом сохранения энергии.

§4.5. Уменьшение числа степеней свободы системы материальных точек при помощи уравнения энергии. Метод Уиттекера

Если система материальных точек имеет всего лишь одну степень свободы, то на основании уравнения энергии её движение может быть определено при помощи квадратур.

Пусть q есть обобщённая координата такой системы материальных точек, тогда интеграл энергии

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h \tag{4.5.1}$$

устанавливает связь между q и $\dot{q}$. Пусть эта связь имеет вид

$$\dot{q} = f(q), \tag{4.5.2}$$

тогда интегрирование (4.5.2) даёт решение задачи в виде:

$$t = \int \frac{dq}{f(q)} + const\,. \tag{4.5.3}$$

Если число степеней свободы системы материальных точек больше единицы, то одного уравнения энергии уже недостаточно для её разрешения. Но интеграл энергии, так же как интегралы, соответствующие циклическим координатам, можно использовать для уменьшения числа степеней свободы системы материальных точек.

Пусть

$$L = L(q_1, q_2, ..., q_n, \dot q_1, \dot q_2, ..., \dot q_n). \qquad (4.5.4)$$

Заменим в (4.5.4) величины $\dot q_2, \dot q_3, ..., \dot q_n$ величинами $\dot q_1 q_2', \dot q_1 q_3', ..., \dot q_1 q_n'$, где в соответствии с (3.1.3)

$$q_r' = \frac{dq_r}{dq_1} = \frac{\dot q_r}{\dot q_1}, \quad \frac{dq_r'}{d\dot q_1} = -\frac{\dot q_r}{\dot q_1^2}, \qquad (4.5.5)$$

а

$$\dot q_r = \frac{dq_r}{dt} = \frac{dq_r}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} = \dot q_1 q_r', \qquad (r = 2,3,...,n). \qquad (4.5.6)$$

и полученную в результате функцию обозначим

$$W = W(\dot q_1, q_2', ..., q_n'). \qquad (4.5.7)$$

Дифференцируя равенство

$$L(q_1, q_2, ..., q_n, \dot q_1, \dot q_2, ..., \dot q_n) = W(\dot q_1, q_2', ..., q_n'), \qquad (4.5.8)$$

с учётом (4.5.5), получим:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial W}{\partial \dot q_1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_r'}\frac{\partial q_r'}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial W}{\partial \dot q_1} - \sum_{r=2}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_r'}\frac{\dot q_r}{\dot q_1^2}, \qquad (4.5.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_r} = \frac{\partial W}{\partial q_r'}\frac{\partial q_r'}{\partial \dot q_r} = \frac{1}{\dot q_1}\frac{\partial W}{\partial q_r'}, \quad (r = 2,3,...,n), \qquad (4.5.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial W}{\partial q_r}, \qquad (r = 2,3,...,n). \qquad (4.5.11)$$

Из уравнений (4.5.9) следует:

$$\frac{\partial W}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_r'}\frac{\dot q_r}{\dot q_1^2}. \qquad (4.5.12)$$

Принимая во внимание (4.5.10), получим

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{\dot{q}_m}{\dot{q}_1}, \tag{4.5.13}$$

откуда

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1. \tag{4.5.14}$$

Мы использовали новый индекс суммирования m для того, чтобы внести дробь $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$ под знак суммы. При этом индекс $r = 2,3,...,n$, а индекс $m = 1,2,...,n$.

Вернёмся вновь к обобщённому интегралу энергии

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = h, \tag{4.4.2}$$

с учётом (4.5.14) его можно записать

$$\dot{q}_1 \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1} - L = h, \tag{4.5.15}$$

или, в силу (4.5.8),

$$\dot{q}_1 \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1} - W = h. \tag{4.5.16}$$

Решая (4.5.16), найдём

$$\dot{q}_1 = f\left(q_m, q_r'\right), \quad \left(m = 1,2,...,n; r = 2,3,...,n\right). \tag{4.5.17}$$

Если теперь подставить найденное значение $\dot{q}_1$ в $\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1}$, мы получим новую функцию

$$L'(q_m, q_r') = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1}, \tag{4.5.18}$$

которую в дальнейшем будем называть *функцией Уиттекера*. Подставив найденное из (4.5.16) значение $\dot{q}_1$ снова в (4.5.16), мы получим тождество. Дифференцируя это тождество по q'_r, получим

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1}+\dot{q}_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r}+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r}\right)-\frac{\partial W}{\partial q'_r}-\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r}=0,$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r}=\dot{q}_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r}+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r}\right). \qquad (4.5.19)$$

Теперь продифференцируем полученное нами тождество по q_m

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_m}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1}+\dot{q}_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q_m}+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_m}\right)-\frac{\partial W}{\partial q_m}-\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_m}=0,$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial q_m}=\dot{q}_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q_m}+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_m}\right). \qquad (4.5.20)$$

Дифференцируя (4.5.18) по q'_r, получим

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_r}=\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r}+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r},$$

или с учётом (4.5.19)

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r}=\dot{q}_1\frac{\partial L'}{\partial q'_r}, \qquad (r=1,2,\ldots,n). \qquad (4.5.21)$$

Продифференцируем (4.5.18) по q_m

$$\frac{\partial L'}{\partial q_m}=\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q_m}+\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_m}.$$

После сравнения с (4.5.20), получим

$$\frac{\partial W}{\partial q_m} = \dot{q}_1 \frac{\partial L'}{\partial q_m}, \qquad (m = 2,3,...,n). \tag{4.5.22}$$

Сравним теперь соотношения (4.5.10) и (4.5.11) с соотношениями (4.5.21) и (4.5.22), получим

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}, \qquad (r = 2,3,...,n), \tag{4.5.23}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_m} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial L}{\partial q_m}, \qquad (m = 1,2,...,n). \tag{4.5.24}$$

Возьмём уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0, \qquad m = 1,2,...,n \tag{3.4.5}$$

и перепишем его учитывая (4.5.22) и (4.5.23)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r}\right) - \dot{q}_1 \frac{\partial L'}{\partial q_r} = 0, \qquad (r = 2,3,...,n).$$

Принимая во внимание, что $\dot{q}_1 = \dfrac{dq_1}{dt}$, можем записать

$$\boxed{\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_r} = 0,} \qquad (r = 2,3,...,n). \tag{4.5.25}$$

Уравнения (4.5.25) будем в дальнейшем называть *уравнениями Уиттекера.*

Эти уравнения могут быть рассматриваемы как уравнения движения некоторой новой динамической системы материальных точек, имеющей кинетический потенциал L' *и координаты* $q_2, q_3, ..., q_n$, *и в которой роль времени играет независимая переменная* q_1.

На основании (4.5.14) функцию Уиттекера (4.5.18) можно определить по формуле

$$L' = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{\dot{q}_m}{\dot{q}_1}. \quad (4.5.25)^*$$

В общем случае эта система, так же как и системы, получающиеся от приведения систем с циклическими координатами, не будет натуральной. Но так как уравнения системы материальных точек имеют форму уравнений Лагранжа, то большинство положений относительно динамических систем будет справедливо так же и для неё.

Интеграл энергии даёт, таким образом, возможность привести данную динамическую систему материальных точек с n *степенями свободы к некоторой другой динамической системе материальных точек с* $n-1$ *степенями свободы.*

В общем случае новая система не допускает интеграла энергии, так как независимая переменная q_1 может войти явно в новый кинетический потенциал L'. Но если для первоначальной системы координата q_1 является координатой циклической, то она не войдёт явно ни в одно из действий вышеизложенного процесса приведения и, следовательно, не войдёт также и в L'. Отсюда следует, что в этом случае и новая система допускает интеграл энергии $\sum_{r=2}^{n} q_r' \frac{\partial L'}{\partial q_r'} - L' = const$, что можно использовать для дальнейшего понижения числа степеней свободы.

В соответствии с вышеизложенным любая динамическая система с n степенями и с $n-1$ циклическими координатами может быть полностью разрешена в квадратурах. Для этого нужно сначала, пользуясь циклическими координатами, привести систему к системе с одной степенью свободы, которая допускает интеграл энергии и поэтому может быть разрешена способом, указанным в начале этого параграфа. Можно поступить по другому. При помощи интеграла энергии понизить число степеней свободы на единицу, при помощи интеграла энергии новой системы ещё на единицу и так далее, пока не придём к системе с одной степенью свободы, решение которой может быть опять найдено вышеуказанным способом.

Решим задачу о движении материальной точки под действием центральной силы с помощью уравнения Рауса и уравнения Уиттекера.

Задача 23.

Материальная точка А массы m притягивается к «неподвижному» центру по закону всемирного тяготения. Составить уравнение движения материальной точки А.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f(q, \dot{q}, t)$
Дано	m

Решение задачи.

Свяжем ИСО с лабораторией, поместив начало системы координат в «неподвижном» центре. Данная задача является аналогом задачи №22, если Землю принять за материальную точку расположенную в «неподвижном» центре. В соответствии с задачей №12, положение материальной точки А будет вполне определяться радиус-вектором r и полярным углом φ .

Пусть $q_1 = r$, а $q_2 = \varphi$.

Учитывая, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, напишем выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right). \qquad (4.5.26)$$

Потенциальную энергию зададим с помощью выражения

$$V = -\frac{k^2}{r}, \qquad (4.5.27)$$

где k^2 - постоянная величина.

Кинетический потенциал будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{k^2}{r}. \qquad (4.5.28)$$

1. Решение задачи с помощью уравнения Рауса.

Так как координата φ является циклической, мы можем в соответствии с (4.2.2) и (4.2.6) написать выражение

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = p_\varphi = p = const\,, \tag{4.5.29}$$

являющееся (см. (2.3.5)) интегралом площадей.

Составим функцию Рауса (4.2.12)

$$R = L - \sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{k^2}{r} - p\dot{\varphi}\,. \tag{4.5.30}$$

Учитывая, что в соответствии с (4.5.29)

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{mr^2}\,, \tag{4.5.31}$$

получим для функции Рауса

$$R = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r}\,. \tag{4.5.32}$$

Найдём частные производные от функции Рауса

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\,, \qquad \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{p^2}{mr^3} - \frac{k^2}{r^2}\,. \tag{4.5.33}$$

Составим уравнение Рауса (4.2.18)

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) - \frac{p^2}{mr^3} + \frac{k^2}{r^2} = 0\,,$$

или

$$m\ddot{r} - \frac{p^2}{mr^3} + \frac{k^2}{r^2} = 0\,. \tag{4.5.34}$$

Из уравнения (4.5.34) можно определить r как функцию времени.

Для этого нужно воспользоваться заменой $r = \dfrac{1}{u}$ и с учётом (4.5.31) привести уравнение (4.5.34) к виду (смотри задачу №23)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{c} = const ,$$

откуда в соответствии с (3.7.51) и (3.7.52)

$$u = a\cos(\varphi + \varepsilon) + \frac{1}{c}, \qquad r = \frac{c}{1 + e\cos(\varphi + \varepsilon)} .$$

Так как

$$\frac{\partial R}{\partial p} = -\frac{p}{mr^2} = -\dot{\varphi} ,$$

мы можем написать, что

$$d\varphi = \frac{p}{mr^2} dt ,$$

или

$$\varphi = \int \frac{p}{mr^2} dt , \qquad (4.5.35)$$

куда вместо r надо вставить решение уравнения (4.5.34).

Можно достичь результата и другим способом.
Заметим, что

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} . \qquad (4.5.36)$$

Перепишем уравнение (4.5.34) с учётом (4.5.36), получим

$$m\dot{r}d\dot{r} = \left(\frac{p^2}{mr^3} - \frac{k^2}{r^2}\right)dr ,$$

которое после интегрирования примет вид

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = -\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} + h', \qquad (4.5.37)$$

где h' - постоянная интегрирования.

Покажем, что (4.5.37) есть интеграл энергии. Так как данная в задаче система материальных точек является консервативной, мы можем для неё написать $T+V=h$, или

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)-\frac{k^2}{r}=h. \tag{4.5.38}$$

С учётом (4.5.31), получим

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{p^2}{2mr^2}-\frac{k^2}{r}=h. \tag{4.5.39}$$

Из (4.5.37) и (4.5.39) следует, что $h'=h$.

Рассмотрим движения, не уходящие в бесконечность. Для таких движений в соответствии с (4.5.39), $h<0$.

Введём обозначение $h=-\beta^2$. Преобразуем (4.5.37) к виду

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(-\frac{p^2}{2mr^2}+\frac{k^2}{r}-\beta^2\right)},$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{m}}dt=\frac{dr}{\sqrt{-\frac{p^2}{2mr^2}+\frac{k^2}{r}-\beta^2}}. \tag{4.5.40}$$

Сделаем ещё несколько элементарных преобразований.

$$\frac{dr}{\sqrt{-\frac{p^2}{2mr^2}+\frac{k^2}{r}-\beta^2}}=\frac{rdr}{\beta\sqrt{\frac{k^2}{\beta^2}r-\frac{p^2}{2m\beta^2}-r^2}}=$$

$$=\frac{ardr}{\beta\sqrt{b-(a-r)^2}}$$

где $a = \dfrac{k^2}{2\beta^2}$, $b = -\dfrac{p^2}{2m\beta^2} + \dfrac{k^4}{4\beta^4}$.

Полагая далее $\mu = \dfrac{\beta}{a}\sqrt{\dfrac{2}{m}}$, запишем (4.5.40) в виде

$$\mu dt = \frac{rdr}{\sqrt{b-(a-r)^2}}. \tag{4.5.41}$$

Пусть $a - r = \sqrt{b}\cos E$, (E не имеет никакого отношения к энергии), тогда

$$\mu dt = \int (1 - e\cos E)dE, \tag{4.5.42}$$

где $e = \dfrac{\sqrt{b}}{a}$. Полагая, что при $t = t_0$, $E = E_0$, окончательно получим

$$\mu\int_{t_0}^{t} dt = \int_{E_0}^{E}(1 - e\cos E)dE,$$

или

$$\mu(t - t_0) = E - E_0 - e(\sin E - \sin E_0), \tag{4.5.43}$$

где $E = \arccos\dfrac{a-r}{ae}$.

Уравнение (4.5.43) называется *уравнением Кеплера*.

2. Решение задачи методом Уиттекера.

Воспользуемся выражением для кинетического потенциала

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V. \tag{4.5.28}$$

где $V = -\dfrac{k^2}{r}$.

Примем за новую переменную φ, тогда

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = r'\dot{\varphi}\,. \qquad (4.5.44)$$

В соответствии с (4.5.8) получим

$$W = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left(r'^2 + r^2\right) - V\,. \qquad (4.5.45)$$

Следовательно, выражение (4.5.16) для данного случая примет вид интеграла энергии

$$\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left(r'^2 + r^2\right) + V = h\,. \qquad (4.5.46)$$

Откуда получим

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2(h - V)}{m\left(r'^2 + r^2\right)}}\,. \qquad (4.5.47)$$

Используя (4.5.25)* и (4.5.44), составим функцию Уиттекера.

$$L' = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}\left(r'^2 + r^2\right). \qquad (4.5.48)$$

Подставим в полученное выражение $\dot{\varphi}$ из (4.5.47), получим

$$L' = \sqrt{2m(h - V)\left(r'^2 + r^2\right)}. \qquad (4.5.49)$$

Составим в соответствии с (4.5.25) уравнение Уиттекера

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial L'}{\partial r'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial r} = 0\,, \qquad (4.5.50)$$

для чего предварительно получим частные производные от L'.

$$\frac{\partial L'}{\partial r'} = \sqrt{2m}\,\frac{r'\sqrt{h-V}}{\sqrt{r'^2+r^2}}\,, \tag{*}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial r} = \sqrt{2m}\,\frac{-\dfrac{\partial V}{\partial r}\left(r'^2+r^2\right)+2r(h-V)}{2\sqrt{(h-V)\left(r'^2+r^2\right)}}\,,$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial L'}{\partial r'}\right) = \sqrt{2m}\,\frac{2(h-V)\left(r^2r''-rr'^2\right)-\dfrac{\partial V}{\partial r}r'^2\left(r'^2+r^2\right)}{2\left(r'^2+r^2\right)\sqrt{(h-V)\left(r'^2+r^2\right)}}\,.$$

После подстановки полученных выражений в (4.5.50), получим

$$\frac{\partial V}{\partial r}r^2\left(r'^2+r^2\right)+2r(h-V)\left(rr''-2r'^2-r^2\right)=0\,. \tag{4.5.51}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение траектории материальной точки при её движении в центральном поле. Общее решение данного уравнения будет зависеть от постоянной h и постоянных интегрирования c_1 и c_2, то есть $r = r(\varphi, h, c_1, c_2)$. Воспользуемся, как мы это уже делали ранее, заменой $r = \dfrac{1}{u}$ в (4.5.51):

$$r' = -\frac{u'}{u^2}\,,\ r'' - \frac{-u''u+2u'^2}{u^3}\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} = -u^2\,\frac{\partial V}{\partial u}\,.$$

Подставляя полученные соотношения в (4.5.51), получим снова уравнение Уиттекера в новых переменных

$$\frac{\partial V}{\partial u}\left(u'^2+u^2\right)+2(h-V)(u''+u)=0\,. \tag{4.5.52}$$

Теперь можно проинтегрировать полученное уравнение. Но можно, пользуясь тем обстоятельством, что координата φ в функцию Уиттекера не входит, составить «новый» обобщённый интеграл энергии.

В соответствии с (3.5.3) получим

$$r'\frac{\partial L'}{\partial r'} - L' = h'. \tag{4.5.53}$$

Найдём L', интегрируя полученное ранее выражение (*)

$$L' = \sqrt{2m(h-V)(r'^2 + r^2)}$$

и подставим полученное значение с учётом (*) в (4.5.53):

$$\sqrt{2m}\,\frac{r'^2\sqrt{h-V}}{\sqrt{r'^2 + r^2}} - \sqrt{2m(h-V)(r'^2 + r^2)} = h',$$

или

$$-r^2\sqrt{2m(h-V)} = h'\sqrt{r'^2 + r^2}\,. \tag{4.5.54}$$

Выясним физический смысл нового обобщённого интеграла энергии. Так как $h - V = T$, а

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left(r'^2 + r^2\right),$$

выражение (4.5.54) примет вид

$$-mr^2\dot{\varphi} = h', \tag{4.5.55}$$

то есть выражение (4.5.54) представляет собой интеграл площадей.

Введём обозначение $c = -\dfrac{h'}{2}$ и, возводя (4.5.54) в квадрат, получим

$$2c^2\left(r'^2 + r^2\right) = mr^4(h-V). \tag{4.5.56}$$

Введём уже знакомую нам замену переменной $r = \dfrac{1}{u}$, тогда (4.5.56) примет вид

$$2c^2\left(u'^2+u^2\right)=m\left(h-V\left(\frac{1}{u}\right)\right). \qquad (4.5.57)$$

Мы получили дифференциальное уравнение первого порядка, которое сводится к квадратурам.

Дифференцируя (4.5.57) по φ, получим

$$4c^2\left(u''+u\right)=-m\frac{\partial V}{\partial u}, \qquad (4.5.58)$$

известное в математике как *уравнение Бинэ*.

В начале решения задачи мы определили потенциальную энергию как

$$V=-\frac{k^2}{r}=-k^2u,$$

с учётом чего (4.5.58) примет вид

$$4c^2\left(u''+u\right)=mk^2.$$

Вводя обозначение $p=\dfrac{4c^2}{mk^2}$, получим

$$u''+u=\frac{1}{p}. \qquad (4.5.59)$$

Решение этого уравнения приведено в задаче №22.