Глава V
Канонические уравнения Гамильтона

Уравнения Ньютона в его собственной формулировке являются дифференциальными уравнениями первого порядка $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ относительно импульса, как основной величины ньютоновской механики. Уравнения Лагранжа являются дифференциальными уравнениями второй степени относительно координат и не содержат в явной форме импульс. Гамильтоном была поставлена задача, найти уравнения движения системы материальных точек, в которых основной функцией является полная энергия, выраженная через переменные двух видов: геометрические, которые определяют положение системы материальных точек, и динамические, определяющие состояние движения системы материальных точек. В качестве динамической переменной Гамильтон принял основную величину ньютоновской механики – импульс. Решению этой задачи и посвящена настоящая глава. Следует так же отметить, что вопросы, излагаемые в данной главе, имеют исключительно важное значение в изучении теоретической физики, особенно в статистической физике и квантовой механике.

§5.1. Уравнения Гамильтона

В третьей главе мы установили, что дифференциальные уравнения движения в обобщённых координатах для голономной системы материальных точек в случае потенциального силового поля представляет собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, и имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.4.5}$$

где $L = T - V$.

С помощью введения новых n переменных, являющихся функциями времени, обобщённых координат и обобщённых скоростей

$$z_r = z_r(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t), \qquad (r = 1,2,...,n), \qquad (5.1.1)$$

и предполагая, что эти зависимости могут быть разрешены относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$, можно привести систему уравнений (5.1.1) к системе $2n$ уравнений первого порядка.

Для решения поставленной нами задачи рассмотрим предложенные Гамильтоном переменные

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}, \qquad (r = 1,2,...,n). \qquad (5.1.2)$$

Подставляя эти выражения в интеграл Якоби (3.5.3), получим

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = \sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r - L = H,$$

или

$$H = \sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r - L. \qquad (5.1.3)$$

Полученная в (5.1.3) функция называется *функцией Гамильтона*. Она представляет собой квадратичную форму от p_r с коэффициентами, зависящими от q_r и t. Таким образом, функция Гамильтона

$$H = H(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n, t), \qquad (5.1.4)$$

или в краткой записи

$$H = H(q, p, t) \qquad (5.1.5)$$

зависит от переменных p, q и t.

Рассмотрим произвольную вариацию (5.1.3) по p и q, при которой t не варьируется.

$$\delta H = \sum_{r=1}^{n} \left(p_r \delta \dot{q}_r + \dot{q} \delta p_r - \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r \right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(\dot{q}_r \delta p_r - \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r \right), \tag{5.1.6}$$

так как $p_r \delta \dot{q}_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r$.

Если проделать тоже самое для (5.1.4), получим

$$\delta H = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial H}{\partial p_r} \delta p_r \right). \tag{5.1.7}$$

Сравнивая выражения (5.1.6) и (5.1.7), имеем

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\dot{q}_r \delta p_r - \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r \right) = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial H}{\partial p_r} \delta p_r \right),$$

или

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\dot{q}_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} \right) \delta p_r - \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial q_{r\ r}} \right) \delta q_r = 0 .$$

Так как вариации δq_r и δp_r независимы, мы можем написать, что

$$\dot{q}_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \qquad , (r = 1,2,\ldots,n), \tag{5.1.8}$$

или

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_r} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad (r = 1,2,\ldots,n). \tag{5.1.9}$$

Переходя к уравнениям движения, на основании (3.4.5)

$$\dot{p}_r = \frac{d}{dt} p_r = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_r}, \quad (r = 1,2,\ldots,n), \tag{5.1.10}$$

видим, с учётом (5.1.9), что *они эквивалентны системе* $2n$ *уравнений*

$$\boxed{\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r},} \qquad (r = 1,2,\ldots,n). \tag{5.1.11}$$

Уравнения (5.1.11) *называются уравнениями движения в форме Гамильтона (системой канонических уравнений Гамильтона)*, полученной им в 1834 году. Уравнения Гамильтона играют исключительно важную роль в аналитической механике. Они имеют форму $\dot{\vec{p}} = \vec{X}$, но отличаются тем, что $2n$ входящих в них переменных сгруппированы в n пар (q_r, p_r), а правые части имеют форму, указанную в уравнениях (5.1.11).

Заметим, что две группы уравнений (5.1.11) неодинаковы по своему содержанию. Первые n уравнений

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \tag{5.1.12}$$

получены на основе определения функции H и совершенно не связаны с законами динамики. Они эквивалентны n уравнениям, определяющим переменные p_r:

$$p_r = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_r}. \tag{5.1.13}$$

Мы видим, что уравнения (5.1.12) определяют $\dot{q}_r$ как линейные функции от p_r, а уравнения (5.1.13) определяют p_r как линейные функции от $\dot{q}_r$. Если разрешить уравнения (5.1.12) относительно p_r, то получим соотношения (5.1.13), а, разрешая последние относительно $\dot{q}_r$, придём вновь к уравнениям (5.1.12).

Динамические закономерности находят своё отражение лишь во второй группе уравнений (5.1.11):

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}. \tag{5.1.14}$$

С помощью функции Гамильтона можно составить уравнения движения, поскольку она заключает в себе полное возможное движение системы материальных точек.

Уравнения Гамильтона (5.1.11) были выведены нами для голономной системы материальных точек. Используя результаты третьей главы, покажем, что уравнения Гамильтона могут быть получены и для неголономной системы материальных точек.

1. Если система материальных точек не является голономной, то, пользуясь обозначениями применяемыми в третьей главе, мы можем написать:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + \sum_{m=1}^{k} \lambda_m B_m, \quad (r = 1,2,\ldots,n). \tag{5.1.15}$$

К этим уравнениям необходимо присоединить k уравнений связи типа (3.2.4)

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ri}\dot{q}_i + B_r = 0, \quad (r = 1,2,\ldots,k). \tag{5.1.16}$$

2. Пусть теперь система материальных точек голономна и имеет n степеней свободы. Предположим, что имеются ещё другие (не связанные с наличием потенциальной энергии) заданные силы, определённые нами ранее с помощью формулы (3.3.7). Аналогом уравнений (3.3.9) будут уравнения

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + \overline{Q}_r, \quad (r = 1,2,\ldots,n). \tag{5.1.17}$$

Здесь предполагается, что функции $\overline{Q}_r$ зависят только от q_r и не зависят от $\dot{q}_r$. (В общем случае, когда $\overline{Q}_r$ зависят также от $\dot{q}_r$, уравнения (5.1.17) не имеют формы $\dot{\vec{p}} = \vec{X}$, но их можно привести к этой форме, если каждая функция $\overline{Q}_r$ есть линейная форма от $\dot{q}_r$ с коэффициентами, зависящими только от q_r).

3. Система материальных точек голономна, имеет n степеней свободы и имеются силы трения. Уравнения движения системы материальных точек запишутся в следующей форме:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}, \quad (r = 1,2,...,n). \tag{5.1.18}$$

Так как F есть однородная квадратичная форма от $\dot{q}_r$, эти уравнения могут быть приведены к виду $\dot{\vec{p}} = \vec{X}$.

4. Обобщим варианты 2 и 3 на случай неголономной системы материальных точек. Для этого достаточно к правым частям уравнений для $\dot{p}_r$ добавить слагаемые $\sum_{m=1}^{k} \lambda_m B_{mr}$ и присоединить к полученным уравнениям k уравнений связи (5.1.16):

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + \overline{Q}_r + \sum_{m=1}^{k} \lambda_m B_{mr}, \tag{5.1.19}$$

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_m B_{mr}, \tag{5.1.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ri} \dot{q}_i + B_r = 0, \quad (r = 1,2,...,k). \tag{5.1.16}$$

Функция Гамильтона H была нами получена из функции Лагранжа L. Нетрудно решить и обратную задачу – найти функцию Лагранжа L, зная функцию Гамильтона H. Функция Лагранжа в соответствии с уравнением (5.1.3) есть $L = \sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r - H$.

С помощью замены $\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}$ получим

$$L = \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial H}{\partial p_r} - H. \tag{5.1.21}$$

§5.2. Уравнение энергии и явное выражение для функции Гамильтона

Для голономной консервативной системы материальных точек функция Гамильтона в самом общем случае есть

$$H = H(q, p, t), \tag{5.1.5}$$

хотя в большей части конкретных задач время t отсутствует. Возьмём полную производную от функции Гамильтона по времени

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_r} \dot{q}_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_r} \dot{p}_r \; . \tag{5.2.1}$$

В силу уравнений Гамильтона последние два слагаемых взаимно уничтожаются, и мы окончательно сможем записать

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \, . \tag{5.2.2}$$

Таким образом, *если* H *не зависит явно от времени* t*, то эта функция сохраняет постоянное значение во всё время движения*:

$$H = h \cdot \tag{5.2.3}$$

Этот результат есть не что иное, как интеграл Якоби. Получим явное выражение для функции Гамильтона. Вспомним, что для натуральной системы

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ri} \dot{q}_r \dot{q}_i \tag{3.1.7}$$

и

$$\sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r - L = 2T - (T - V) = T + V \, , \tag{5.2.4}$$

так что H *совпадает с полной энергией* $T + V$*, причём* T *выражено через* p_r *вместо* $\dot{q}_r$. Положим в (3.1.7)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\dot{q}_i = p_r\,, \qquad (r = 1,2,\ldots,n), \tag{5.2.5}$$

находим, что

$$\dot{q}_r = \sum_{i=1}^{n} c_{ri}\,p_i\,, \qquad (r = 1,2,\ldots,n), \tag{5.2.6}$$

где (c_{ri}) матрица, обратная матрице (a_{ri}).

Учитывая, что $\sum\limits_{r=1}^{n} p_r\dot{q}_r = 2T$, напишем явное выражение для функции Гамильтона в следующей форме:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ri}\,p_r\,p_i + V\,. \tag{5.2.7}$$

Рассмотрим общий случай ненатуральной системы материальных точек. В соответствии с (3.5.6), функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - V \tag{3.5.6}$$

и в соответствии с теоремой Эйлера об однородных функциях получим

$$\sum_{r=1}^{n} p_r\dot{q}_r = 2T + T_1\,. \tag{5.2.8}$$

Теперь мы можем написать, что

$$\sum_{r=1}^{n} p_r\dot{q}_r - L = (2T_2 + T_1) - (T_2 + T_1 + T_0 - V) = T_2 + V - T_0\,,$$

или

$$H = T_2 + V - T_0\,. \tag{5.2.9}$$

Полагая, согласно формулам (3.1.7) и (3.1.8),

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\dot{q}_r\dot{q}_i\,, \qquad T_1 = \sum_{r=1}^{n} a_r\dot{q}_r\,,$$

находим

$$p_r = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\dot{q}_i + a_r\,, \ (r = 1,2,...,n), \tag{5.2.10}$$

и

$$\dot{q}_r = \sum_{i=1}^{n} c_{ri}(p_i - a_i). \tag{5.2.11}$$

Тогда

$$2T_2 = \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r(p_r - a_r) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ri}(p_r - a_r)(p_i - a_i), \tag{5.2.12}$$

выражение для функции Гамильтона в окончательной форме будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ri}(p_r - a_r)(p_i - a_i) + V - T_0\,, \tag{5.2.13}$$

или

$$H = H_2 + H_1 + H_0\,. \tag{5.2.14}$$

Опуская для краткости знак суммы, напишем

$$H_2 = \frac{1}{2}c_{ri}p_r p_i\,,\ \ H_1 = -c_{ri}a_r p_i\,,\ \ H_0 = \frac{1}{2}c_{ri}a_r a_i + V - T_0\,. \tag{5.2.15}$$

§5.3. Канонические уравнения при наличии циклических координат

Ранее мы установили, что в общем случае функция Гамильтона

$$H = H(q_1, q_2,..., q_n, p_1, p_2,..., p_n, t), \tag{5.1.4}$$

зависит от обобщённых координат, обобщённых импульсов и времени. В четвёртой главе мы рассмотрели вопрос о поведении функции Лагранжа при наличии циклических координат. Выясним теперь, как поведёт себя по отношению к циклическим координатам функция Гамильтона. Рассматривая равенство

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad (r = 1,2,...,n), \tag{5.1.9}$$

мы можем сделать следующий вывод: если частная производная от L по q_r равна нулю, то будет равна нулю и частная производная от H по q_r, то есть циклические координаты не входят в функцию Гамильтона.

Пусть первые k обобщенных координат системы материальных точек являются циклическими, тогда, согласно уравнениям

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad (r = 1,2,...,n), \tag{5.1.11}$$

можем написать

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i = 1,2,...,k), \tag{5.3.1}$$

или

$$p_i = c_i \quad \text{и} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial c_i}, \qquad (i = 1,2,...,k), \tag{5.3.2}$$

где c_i - постоянные интегрирования.

Функция Гамильтона теперь будет зависеть от времени t, $n-k$ обобщённых координат, $n-k$ обобщённых импульсов и k постоянных интегрирования c_i.

$$H = H(q_{k+1},...,q_n, p_{k+1},..., p_n, c_1, c_2,...,c_k, t). \tag{5.3.3}$$

В соответствии с (5.1.11) можно написать

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad (m = k+1, k+2,...,n). \tag{5.3.4}$$

Мы получили систему $2n-2k$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно p_m и q_m. Решения этих уравнений будут содержать $2m = 2(n-k)$ произвольных постоянных интегрирования c_m, c'_m, а также постоянные интегрирования c_i, то есть

$$\left.\begin{aligned} p_m &= p_m(t, c_m, c'_m, c_i) \\ q_m &= q_m(t, c_m, c'_m, c_i) \end{aligned}\right\}, \ (m = k+1, k+2, \dots, n). \qquad (5.3.5)$$

Подставив эти решения в (5.3.3) и учитывая (5.3.2) получим:

$$q_i = \int \frac{\partial H}{\partial c_i} dt + c'_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k), \qquad (5.3.6)$$

где c'_i - постоянные интегрирования.

Таким образом, при наличии k циклических координат решение задачи сводится к решению системы уравнений (5.3.4), порядок которой уменьшен по сравнению с первоначальной на $2k$.

Решим несколько задач с применением полученных выше сведений.

§5.4. Задачи на составление функции Гамильтона и канонических уравнений Гамильтона

Задача 24.

Точка подвеса математического маятника длины l совершает движение в вертикальной плоскости по окружности радиуса r с постоянной скоростью v. Составить функцию и канонические уравнения Гамильтона.

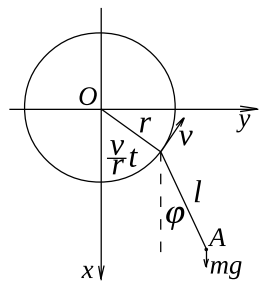

Рис. 16.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	H
Дано	l, r, v.

Решение задачи.

Свяжем ИСО с лабораторией, поместив начало системы координат в центр окружности. Сделаем чертёж.

В качестве обобщённой координаты q примем угол отклонения маятника от положения равновесия φ. Пользуясь чертежом, напишем для материальной точки А

$$x = r\cos\frac{v}{r}t + l\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\frac{v}{r}t + l\sin\varphi\ . \qquad (5.4.1)$$

Возьмём производные по времени от (5.4.1)

$$\dot{x} = -v\sin\frac{v}{r}t - l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\,,\ \dot{y} = v\cos\frac{v}{r}t + l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\ . \qquad (5.4.2)$$

Составим выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2vl\dot{\varphi}\cos\left(\varphi - \frac{v}{r}t\right) + v^2\right]. \qquad (5.4.3)$$

Так как при нахождении обобщённых сил связи считаются мгновенно остановленными (смотри §1.7.), для потенциальной энергии маятника мы можем записать

$$V = -mgl\cos\varphi\ . \qquad (5.4.4)$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2vl\dot{\varphi}\cos\left(\varphi - \frac{v}{r}t\right) + v^2\right] + mgl\cos\varphi\,,$$

откуда

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + mvl\cos\left(\varphi - \frac{v}{r}t\right), \qquad (5.4.5)$$

а

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v}{l}\cos\left(\varphi - \frac{v}{r}t\right). \qquad (5.4.6)$$

Составим функцию Гамильтона

$$H = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - v^2 - mgl\cos\varphi\ . \qquad (5.4.7)$$

Если $v=0$, то

$$H=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl\cos\varphi=T+V=h, \tag{5.4.8}$$

то есть H является интегралом энергии, так как в этом случае связи будут стационарными и L не зависит явно от времени.

Подставим выражение (5.4.6) в функцию Гамильтона (5.4.7), в результате чего получим

$$H=\frac{1}{2}ml^2\left[\frac{p}{ml^2}-\frac{v}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v}{r}t\right)\right]^2-v^2-mgl\cos\varphi. \tag{5.4.9}$$

Для нахождения канонических уравнений Гамильтона составим производные

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi}=mlv\left[\frac{p}{ml^2}-\frac{v}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v}{r}t\right)\right]\sin\left(\varphi-\frac{v}{r}t\right)+mgl\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{ml^2}-\frac{v}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v}{r}t\right).$$

С учётом (5.1.11) напишем канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{p}=-mlv\left[\frac{p}{ml^2}-\frac{v}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v}{r}t\right)\right]\sin\left(\varphi-\frac{v}{r}t\right)-mgl\sin\varphi, \tag{5.4.10}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p}{ml^2}-\frac{v}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v}{r}t\right). \tag{5.4.11}$$

Задача 25.

Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения Гамильтона для материальной точки массы m в потенциальном поле $V(x,y,z)$.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$H = H(q, p, t)$
Дано	m,
	$V(x, y, z)$.

Решение задачи.

Будем рассматривать движение материальной точки в лабораторной ИСО. Решим задачу в трёх системах координат: декартовой, цилиндрической и сферической.

1. Декартова система координат.

Составим функцию Лагранжа $L = T - V$, где

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Таким образом

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z). \tag{5.4.12}$$

Составим производные от функции Лагранжа по проекциям скоростей

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x, \qquad \dot{x} = \frac{p_x}{m}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} - \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = p_y, \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} - \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z, \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

Составим функцию Гамильтона в виде

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L, \tag{5.4.13}$$

или

$$H = \frac{1}{m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(x, y, z),$$

откуда

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(x,y,z). \qquad (5.4.14)$$

Составим канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} = \dot{y}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \dot{z}. \qquad (5.4.15)$$

Мы получили первые три уравнения движения.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\dot{p}_x, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = -\dot{p}_y, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = -\dot{p}_z. \qquad (5.4.16)$$

Это вторые три уравнения движения, представляющие собой второй закон Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -\nabla V(x,y,z), \text{ или } m\vec{w} = \vec{F},$$

где $\nabla V(x,y,z) = -F$.

2. Цилиндрические координаты.

Выразим декартовы координаты материальной точки через цилиндрические координаты

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z. \qquad (5.4.17)$$

Дифференцируя (5.4.17) по времени, получим

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}, \quad \dot{z} = \dot{z}.$$

Подставляя полученные значения $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ в выражение для кинетической энергии, после приведения подобных членов, получим

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right). \qquad (5.4.18)$$

Функция Лагранжа примет вид

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r,\theta,z). \qquad (5.4.19)$$

Составим производные от функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r = p_r\,, \qquad \dot r = \frac{p_r}{m}\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta = p_\theta\,, \quad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot z} = m\dot z = p_z\,, \qquad \dot z = \frac{p_z}{m}\,.$$

Составим функцию Гамильтона

$$H = \sum p_i \dot q_i - L =$$

$$= \frac{1}{m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + p_z^2\right) - \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + p_z^2\right) + V(r,\theta,z).$$

Окончательно получим

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + p_z^2\right) + V(r,\theta,z). \qquad (5.4.20)$$

Составим канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \dot r\,, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \dot\theta\,, \quad \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \dot z$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = -\dot p_r\,, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\dot p_\theta\,, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = -\dot p_z\,.$$

3. Сферические координаты.

Выразим декартовы координаты материальной точки через сферические координаты (см. задачу №11)

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\}. \qquad (5.4.21)$$

Дифференцируя (5.4.21) по времени, получим

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=\dot{r}\sin\theta\cos\varphi+r\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta}-r\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi}\\&\dot{y}=\dot{r}\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta\sin\varphi\dot{\theta}+r\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}\\&\dot{z}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\dot{\theta}\end{aligned}\right\}. \tag{5.4.22}$$

Подставим полученные значения в выражение для кинетической энергии, и после приведения подобных членов, получим

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right). \tag{5.4.23}$$

(Выражение (5.4.23) отличается от выражения (3.7.33) полученного в задаче №22, это объясняется различным способом выбора координатных осей. См. рисунки, иллюстрирующие указанные задачи).

Функция Лагранжа примет вид

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)-V(r,\theta,\varphi). \tag{5.4.24}$$

Составим производные от функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r}=p_r,\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=p_\theta,\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \tag{5.4.25}$$

Разрешая полученные уравнения относительно обобщённых скоростей, получим

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2},\quad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}. \tag{5.4.26}$$

Составим функцию Гамильтона (учитывая (5.4.26)):

$$H=\sum p_i\dot{q}_i-L=$$

$$\frac{1}{m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)-\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+$$

$$+V(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+V(r,\theta,\varphi)$$

Или окончательно

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+V\left(r,\theta,\varphi\right). \qquad (5.4.27)$$

Составим канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m}=\dot{r}\,,\quad \frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}=\dot{\theta}\,,\quad \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}=\dot{\varphi}\,.$$

$$\frac{\partial H}{\partial r}=-\frac{p_\theta^2}{mr^3}+\frac{\partial V}{\partial r}=-\dot{p}_r\,,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta}=-\frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}p_\varphi^2+\frac{\partial V}{\partial \theta}=-\dot{p}_\theta\,,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi}=\frac{\partial V}{\partial \varphi}=-\dot{p}_\varphi\,.$$

Задача 26.

Составить функцию Гамильтона для двухатомной молекулы, если массы атомов равны соответственно m_1 и m_2.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	H
Дано	m_1, m_2.

Решение задачи.

Выберем ИСО "Лаборатория". Будем рассматривать движение атомов как движение двух материальных точек с массами m_1 и m_2. Введём две системы координат O_{xyz} и O'_{xyz}. Сделаем чертёж.

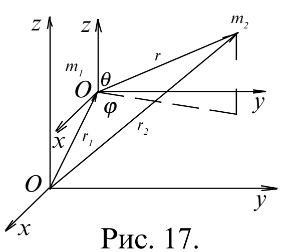

Рис. 17.

Очевидно, что кинетическая энергия заданной системы материальных точек будет состоять из кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии относительного движения материальных точек.

Пусть центр масс имеет координаты x_c, y_c, z_c, а $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ скорости материальных точек m_1 и m_2 в системе координат O_{xyz}.

Кинетическая энергия системы материальных точек будет

$$T = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2 . \tag{5.4.28}$$

Из чертежа следует, что $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Учитывая, что данная система материальных точек замкнута, мы можем для неё на основании закона сохранения импульса написать

$$M\vec{v}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 , \tag{5.4.29}$$

где $M = m_1 + m_2$ полная масса системы материальных точек.

Пусть относительная скорость m_2 к m_1 есть

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}}{dt} . \tag{5.4.30}$$

Выразим из (5.4.30) $\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_1$ и подставим в (5.4.29), получим

$$M\vec{v}_c = (m_1 + m_2)\vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_{21} . \tag{5.4.31}$$

Решая уравнения (5.4.29) и (5.4.31) относительно $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, получим

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_c - \frac{m_2}{M} \vec{v}_{21} , \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_c + \frac{m_1}{M} \vec{v}_{21} . \tag{5.4.32}$$

Подставим полученные значения скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, в уравнение для кинетической энергии (5.4.28). После элементарных алгебраических преобразований получим

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v_{21}^2 , \tag{5.4.33}$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведённая масса.

Учитывая, что $v_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2$ в декартовых координатах, а, исходя из (5.4.23), $v_{21}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2$ в сферических координатах, окончательно запишем

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right). \qquad (5.4.34)$$

Запишем функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - V(r). \qquad (5.4.35)$$

Сразу отметим, что координаты x_c, y_c, z_c, φ явно в функцию Лагранжа не входят и являются циклическими.

Составим производные от функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = M\dot{x}_c = p_{x_c} = C_{x_c},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} = M\dot{y}_c = p_{y_c} = C_{y_c},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_c} = M\dot{z}_c = p_{z_c} = C_{z_c}.$$

Здесь $C_{x_c}, C_{y_c}, C_{z_c}$ - постоянные интегрирования.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r} = p_r,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} = p_\theta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = p_\varphi = C_\varphi,$$

где C_φ - постоянная интегрирования.

Составим функцию Гамильтона

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L =$$

$$\frac{1}{M}\left(p_{x_c}^2 + p_{y_c}^2 + p_{z_c}^2\right) + \frac{1}{\mu}\left(p_r^2 + p_\theta^2 + p_\varphi^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2M}\left(p_{x_c}^2 + p_{y_c}^2 + p_{z_c}^2\right) - \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + p_\theta^2 + p_\varphi^2\right) + V(r) =$$

$$\frac{1}{2M}\left(p_{x_c}^2 + p_{y_c}^2 + p_{z_c}^2\right) + \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + p_\theta^2 + p_\varphi^2\right) + V(r).$$