Глава VI
Уравнения Гиббса-Аппеля

До сих пор мы рассматривали голономные системы материальных точек. Полученные нами четыре формы основного уравнения, уравнения Лагранжа и канонические уравнения Гамильтона предназначены, в основном, для решения задач, связанных с голономными системами материальных точек. В этой главе мы рассмотрим новую пятую форму уравнения движения, которая особенно удобна для решения задач, связанных с неголономными системами материальных точек. Рассмотрим также функцию Гиббса и уравнение Гиббса-Аппеля.

§6.1. Квазикоординаты

До сих пор мы пользовались обобщёнными координатами, которые обладают тем свойством, что переменные x_r являются *явными функциями* от обобщенных координат q_r и времени t. В случае неголономных систем материальных точек удобнее пользоваться координатами более общего типа. В этих координатах каждая переменная $\dot{x}_r$ является линейной функцией от $\dot{q}_r$, не являющейся в общем случае полной производной по времени. Каждое $\dot{x}_r$ может быть представлено в виде линейной функции от k переменных $\dot{q}_r$, где k - число степеней свободы системы материальных точек.

Рассмотрим неголономную систему материальных точек с k степенями свободы и l уравнениями связи. Данная система описывается $k+l$ обобщёнными координатами $q_1, q_2, ..., q_{k+l}$. Возможные перемещения системы материальных точек удовлетворяют уравнениям (2.7.2)

$$0=\sum_{i=1}^{k+l} B_{ri}dq_i + B_r dt, \qquad (r=1,2,...,l), \tag{6.1.1}$$

где коэффициенты B_{ri} и B_r есть функции от $q_1,q_2,...,q_{k+l},t$, имеющие непрерывные первые производные в соответствующей области D изменения переменных $q_1,q_2,...,q_{k+l},t$.

Введём p новых величин $\theta_1,\theta_2,...,\theta_p$, где p - произвольное число. Предположим, что величины θ_r не определены как функции от q_r и t, но их дифференциалы представляют собой пфаффовы формы (см. Приложение I, п.2) от q_r и t:

$$d\theta_r=\sum_{i=1}^{k+l} C_{ri}dq_i + C_r dt, \quad (r=1,2,..., p). \tag{6.1.2}$$

Коэффициенты C_{ri} и C_r так же являются функциями от $q_1,q_2,...,q_{k+l},t$, имеющие непрерывные первые производные в области D. Выражения, стоящие в правых частях (6.1.1) и (6.1.2), представляют собой $l+p$ независимых форм Пфаффа, не являющихся в общем случае полными дифференциалами. Величины θ_r будем называть *квазикоординатами.* Будем далее писать $\theta_r = q_{k+l+r}$, так что будем иметь n переменных $q_1,q_2,...,q_n$, где $n=k+l+p$, из которых первые $k+l$ представляют собой обобщённые координаты, а остальные p - квазикоординаты; при этом в соответствии с (6.1.2)

$$dq_{k+l+r}=\sum_{i=1}^{k+l} C_{ri}dq_i + C_r dt, \qquad (r=1,2,..., p). \tag{6.1.3}$$

Разрешим теперь $l+p$ уравнений (6.1.1) и (6.1.3) относительно $l+p$ дифференциалов dq_r, выразив их через оставшиеся k дифференциалов. Эти предпочтительные k дифференциалов, через которые выражены остальные, могут быть дифференциалами либо обобщённых координат, либо квазикоординат. Временно обозначим эти выделенные координаты через $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$, тогда для координаты q_r, к ним не принадлежащей, можно написать:

$$dq_r = \sum_{i=1}^{k} D_{ri} d\varphi_i + D_r dt, \quad (r = 1,2,...,l+p), \tag{6.1.4}$$

Всего будем иметь $l+p$ таких уравнений. Уравнения (6.1.4) в точности эквивалентны системам уравнений (6.1.1) и (6.1.3). Коэффициенты D_{ri} и D_r зависят от всех обобщённых координат q_r и t, а не от $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, t$.

Так как координата x_r зависит от $q_1, q_2, ..., q_{k+l}, t$, то в соответствии с (6.1.1, 6.1.2, 6.1.3)

$$dx_r = \sum_{i=1}^{k+l} \frac{\partial x_r}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_r}{\partial t} dt, \qquad (r = 1,2,...,N). \tag{6.1.5}$$

Выразим с помощью (6.1.4) дифференциал каждой невыделенной координаты в правой части (6.1.5) через $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$. В результате dx_r выразится в виде линейной функции от $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, t$, коэффициенты которой будут содержать все обобщённые координаты q_r и время t.

Изменим наши обозначения. В дальнейшем k выделенных координат (которые могут быть обобщёнными или квазикоординатами) будем обозначать через $q_1, q_2, ..., q_k$, а остальные $l+p$ координат – через $q_{k+1}, q_{k+2}, ..., q_n$. В этих обозначениях формулы (6.1.4) и (6.1.5) примут вид

$$dq_r = \sum_{i=1}^{k} \beta_{ri} dq_i + \beta_r dt, \quad (r = k+1, k+2, ..., n), \tag{6.1.6}$$

$$dx_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri} dq_i + \alpha_r dt\,, \quad (r = 1,2,\ldots,N). \tag{6.1.7}$$

Формулы (6.1.6) и (6.1.7) являются основными для развиваемой здесь теории. Производные $\dot{x}_r$ можно выразить через k скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$. Аналогично через них можно выразить и $\dot{q}_r$ для $r > k$.

$$\dot{q}_r = \sum_{i=1}^{k} \beta_{ri} \dot{q}_i + \beta_r\,, \ (r = k+1, k+2, \ldots, n), \tag{6.1.8}$$

$$\dot{x}_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri} \dot{q}_i + \alpha_r\,, \ (r = 1,2,\ldots,N). \tag{6.1.9}$$

В каждом случае коэффициенты $\alpha_{ri}, \alpha_r, \beta_{ri}, \beta_r$ содержат координаты q_r, отличные от k выделенных координат, а в общем случае эти координаты содержат все обобщённые координаты q_r и время t.

Полученные формулы удобны тем, что составляющие скорости $\dot{x}_r$ (для всех N декартовых координат системы материальных точек) и $\dot{q}_r$ (для невыделенных координат q_r) выражаются через систему составляющих скоростей по числу степеней свободы системы материальных точек. Скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ могут иметь произвольные значения, но если эти значения заданы, то тем самым определены скорости всей системы материальных точек.

Виртуальные перемещения выражаются через произвольные приращения $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ следующим образом:

$$\delta q_r = \sum_{i=1}^{k} \beta_{ri} \delta q_i\,, \quad (r = k+1, k+2, \ldots, n), \tag{6.1.10}$$

$$\delta x_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri} \delta q_i\,, \qquad (r = 1,2,\ldots,N). \tag{6.1.11}$$

Замечание.

В основе введения квазикоординат лежит следующая постановка вопроса: какие уравнения будут эквивалентны уравнениям Лагранжа, если вместо обобщённых скоростей $\dot{q}_r$ ввести некоторые их линейные комбинации с коэффициентами β_{ri}, зависящими от обобщённых координат q_r? Эта проблема нашла своё разрешение в работах Гамеля, внёсшего большой вклад в развитии теоретико-групповых методов в механике.

§6.2. Пятая форма основного уравнения

Вычислим работу, совершаемую заданными силами на виртуальном перемещении. Выражение для этой работы содержится в первой форме основного уравнения (2.1.6) и имеет вид $\sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r$. Подставляя сюда δx_r из (6.1.9), получим

$$\sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{N} X_r \alpha_{ri} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{k} Q_i \delta q_i\,, \tag{6.2.1}$$

где

$$Q_i = \sum_{r=1}^{N} X_r \alpha_{ri}\,. \tag{6.2.2}$$

Рассмотрим теперь соответствующее выражение, входящее во вторую форму основного уравнения (2.7.5), а именно $\sum_{r=1}^{N} X_r \Delta\dot{x}_r$, где $\Delta\dot{x}_r$ есть конечное, а не бесконечно малое приращение скорости, совместимое с положением системы материальных точек в данный момент времени. Из уравнения (6.1.7) для любой возможной системы скоростей получаем:

$$\dot{x}_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri}\dot{q}_i + \alpha_r\,, \quad (r = 1,2,...,N). \tag{6.2.3}$$

Рассмотрим другую возможную систему скоростей $\dot{\vec{q}} + \Delta\dot{\vec{q}}$ при той же конфигурации системы материальных точек. Для неё мы можем написать

$$\dot{x}_r + \Delta\dot{x}_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri}(\dot{q}_i + \Delta\dot{q}_i) + \alpha_r\,, \quad (r = 1,2,...,N). \tag{6.2.4}$$

Откуда

$$\Delta\dot{x}_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri}\Delta\dot{q}_i\,, \quad (r = 1,2,...,N). \tag{6.2.5}$$

Таким образом,

$$\sum_{r=1}^{N} X_r \Delta\dot{x}_r = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{N} X_r \alpha_{ri} \right) \Delta\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{k} Q_i \Delta\dot{q}_i\,, \tag{6.2.6}$$

где Q_i - те же коэффициенты (6.2.2), что и в первой форме основного уравнения.

Рассмотрим теперь третью форму основного уравнения (2.8.5)

$$\sum_{r=1}^{N} (m_r \ddot{x}_r - X_r)\Delta\ddot{x}_r = 0\,. \tag{2.8.5}$$

Дифференцируя (6.2.1), получим

$$\ddot{x}_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{d\alpha_{ri}}{dt}\dot{q}_i + \frac{d\alpha_r}{dt}\,, \ (r = 1,2,...,N), \tag{6.2.7}$$

где $\dfrac{d}{dt}$ обозначает оператор $\dfrac{\partial}{\partial t} + \sum_{m=1}^{n} \dot{q}_m \dfrac{\partial}{\partial q_m}$. Если мы рассмотрим другую возможную систему ускорений $\ddot{\vec{q}} + \Delta\ddot{\vec{q}}$ при *той же конфигурации* системы материальных точек и *тех же скоростях*, то будем иметь

$$\ddot{x}_r + \Delta\ddot{x}_r = \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ri}\left(\ddot{q}_i + \Delta\ddot{q}_i\right) + \sum_{i=1}^{k}\frac{d\alpha_{ri}}{dt} + \frac{d\alpha_r}{dt}, \qquad (6.2.8)$$

$$\left(r = 1,2,\ldots,N\right).$$

Откуда

$$\Delta\ddot{x}_r = \sum_{i=1}^{k}\alpha_{ri}\Delta\ddot{q}_i, \quad \left(r = 1,2,\ldots,N\right). \qquad (6.2.9)$$

Таким образом,

$$\sum_{r=1}^{N}X_r\Delta\ddot{x}_r = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{N}X_r\alpha_{ri}\right)\Delta\ddot{q}_i = \sum_{i=1}^{k}Q_i\Delta\ddot{q}_i, \qquad (6.2.10)$$

куда входят те же коэффициенты Q_r.

Третью форму основного уравнения (2.8.5) можно преобразовать к виду

$$\boxed{\sum_{r=1}^{n}m_r\ddot{x}_r\Delta\ddot{x}_r - \sum_{i=1}^{k}Q_i\Delta\ddot{q}_i = 0}, \qquad (6.2.11)$$

представляющему собой *пятую форму основного уравнения*.

§6.3. Определение ускорения

Введём функцию Гиббса G

$$G = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}m_r\ddot{x}_r^2, \qquad (6.3.1)$$

которую с помощью формул (6.2.7) выразим через $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_k$. Функция Гиббса будет представлять собой полином от $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_k$ вида

$$G = C_2 + G_1 + G_0, \qquad (6.3.2)$$

где G_2 - однородная квадратичная форма от $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, ..., \ddot{q}_k$, G_1 - однородная линейная функция от $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, ..., \ddot{q}_k$; а G_0 не зависит от q_r. Обычно G_2 легко находится, так как коэффициенты здесь те же, что и у квадратичных членов в выражении (3.1.7) для T, представленном в виде функции от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_k$. Члены G_1 должны быть определены независимо, а члены G_0 несущественны и их можно вообще опустить. Наша задача сводится к определению G_1.

Рассмотрим систему материальных точек, конфигурация и *скорости* которой заданы в момент времени t. Наша задача состоит в получении уравнения для определения ускорений частиц системы материальных точек.

Рассмотрим теорему.

Ускорение системы материальных точек таково, что выражение

$$G - \sum_{i=1}^{k} Q_i \ddot{q}_i \,, \tag{6.3.3}$$

рассматриваемое как функция от $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, ..., \ddot{q}_k$, *имеет минимум.*

Применяя эту теорему, координаты и составляющие скоростей следует считать постоянными. Таким образом, мы имеем дело с квадратичной функцией с постоянными коэффициентами.

Доказательство теоремы.

Пусть $\ddot{\vec{q}}$ ускорение системы материальных точек в действительном движении, $\ddot{\vec{q}} + \Delta\ddot{\vec{q}}$ - ускорение в любом другом возможном движении. Тогда будет справедливо следующее равенство

$$\Delta\left(G - \sum_{i=1}^{k} Q_i \ddot{q}_i \right) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \left(\ddot{x}_r + \Delta\ddot{x}_r\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \ddot{x}_r^2 - \sum_{i=1}^{k} Q_i \Delta\ddot{q}_i =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \ddot{x}_r^2+\sum_{r=1}^{N} m_r \ddot{x}_r \Delta \ddot{x}_r+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r (\Delta \ddot{x}_r)^2-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \ddot{x}_r^2-$$

$$-\sum_{i=1}^{k} Q_i \Delta \ddot{q}_i=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r (\Delta \ddot{x}_r)^2+\left(\sum_{r-1}^{N} m_r \ddot{x}_r \Delta \ddot{x}_r-\sum_{i=1}^{k} Q_i \Delta \ddot{q}_i\right).$$

Выражение стоящее в скобках в правой части тождественно равно нулю в соответствии с пятой формой основного уравнения (6.2.11). Таким образом получим

$$\Delta\left(G-\sum_{i=1}^{k} Q_i \ddot{q}_i\right)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r (\Delta \ddot{x}_r)^2 . \tag{6.3.4}$$

Из (6.3.4) следует, что если $\Delta\ddot{\vec{x}} \neq 0$, то

$$\Delta\left(G-\sum_{i=1}^{k} Q_i \ddot{q}_i\right)>0, \tag{6.3.5}$$

что и доказывает теорему (6.3.3).

Во второй главе мы рассмотрели принцип наименьшего принуждения Гаусса (2.9.1)

$$C=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r\left(\ddot{x}_r-\frac{X_r}{m_r}\right)^2 . \tag{2.9.1}$$

После раскрытия скобок, получим

$$C=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \ddot{x}_r^2-\sum_{r=1}^{N} \ddot{x}_r X_r+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\frac{X_r^2}{m_r} . \tag{6.3.6}$$

Сравнивая полученное выражение с (6.3.3), мы видим, что оно с точностью до членов, не содержащих ускорений, совпадает с

$$G-\sum_{r=1}^{N} X_r \ddot{x}_r . \tag{6.3.7}$$

Выражение $\sum_{r=1}^{N} X_r \ddot{x}_r$ отличается от $\sum_{i=1}^{k} Q_i \ddot{q}_i$ лишь членами, не зависящими от ускорений. Таким образом, (6.3.3) отличается от C только членами, не содержащими ускорений, то есть, (6.3.3) может быть получена из принципа наименьшего принуждения Гаусса (2.9.1).

§6.4. Уравнение Гиббса-Аппеля

С помощью теоремы (6.3.3), говорящей о том, что выражение $G - \sum_{i=1}^{k} Q_i \ddot{q}_i$ в действительном движении имеет минимум, мы можем составить уравнения движения. Для этого достаточно написать условия стационарности, откуда сразу получим

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_r} = Q_r,} \quad r = 1,2,\dots,k\,, \tag{6.4.1}$$

так называемые *уравнения Гиббса-Аппеля*. Эти уравнения можно получить из пятой формы основного уравнения, если рассматривать бесконечно малые, а не конечные приращения.

Уравнения (6.4.1) впервые были получены Уиллардом Гиббсом в 1879 году и подробно исследованы Аппелем двадцать лет спустя.

При составлении уравнений (6.4.1) члены в выражении для G, не содержащие $\ddot{q}_r$, можно опустить.

К дифференциальным уравнениям движения (6.4.1) следует добавить $n-k$ уравнений геометрических связей

$$\dot{q}_r = \sum_{i=1}^{k} \beta_{ri} \dot{q}_i + \beta_r\,, \qquad r = k+1, k+2, \dots, n\,, \tag{6.4.2}$$

полученных из (6.1.6).

Уравнения Гиббса-Аппеля представляют простую и в то же время наиболее общую форму уравнений движения. Исключительно простые по форме, они с одинаковым успехом могут быть применены как к голономным, так и к неголономным системам материальных точек и позволяют легко вводить квазикоординаты.

Правила составления уравнений Гиббса-Аппеля:

1. Определить число степеней свободы k системы материальных точек.

2. Составить с помощью k ускорений $\ddot{q}_r$ выражение для функции Гиббса, называемой иногда “кинетической энергией ускорений” $\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} m_r \ddot{x}_r^2$, в результате чего получим функцию Гиббса G. В общем случае в неё входят все n координат q_r и скоростей $\dot{q}_r$, но важно то, чтобы в неё входили лишь k выделенных ускорений $\ddot{q}_r$. Выделенные k координат q_r могут быть как обобщенные, так и квазикоординаты, в зависимости от удобства.

3. Составить выражение для работы заданных сил на виртуальном перемещении в форме $\sum_{i=1}^{k} Q_i \delta q_i$.

4. Составить уравнения движения в виде (6.4.1) и добавить к ним $n-k$ геометрических уравнений связи (6.4.2).

5. Из совокупной системы дифференциальных уравнений определить n переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ как функций от t.

§6.5. Приложения уравнений Гиббса-Аппеля

1. Плоское движение материальной точки.

Рассмотрим плоское движение материальной точки с помощью уравнений Гиббса-Аппеля. Будем рассматривать движение в полярных координатах r и θ. В качестве обобщённой (лагранжевой) координаты выберем r, а в качестве квазикоординаты выберем q, причём

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad dq = xdy - ydx. \tag{6.5.1}$$

Дифференцируя уравнения (6.5.1) по времени, получим

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \quad , \quad \dot{q} = x\dot{y} - y\dot{x} . \tag{6.5.2}$$

Возведём уравнения (6.5.2) в квадрат

$$r^2\dot{r}^2 = x^2\dot{x}^2 + 2x\dot{x}y\dot{y} + y^2\dot{y}^2 ,$$

$$\dot{q}^2 = x^2\dot{y}^2 - 2x\dot{y}y\dot{x} + y^2\dot{x}^2$$

и сложим, тогда

$$r^2\dot{r}^2 + \dot{q}^2 = \left(x^2 + y^2\right)\dot{x}^2 + \left(x^2 + y^2\right)\dot{y}^2 = r^2\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right),$$

или

$$r^2\dot{r}^2 + \dot{q}^2 = r^2\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right). \tag{6.5.3}$$

Дифференцируя первое уравнение (6.5.2) по времени, получим

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 . \tag{6.5.4}$$

Выразим из (6.5.3) $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ и подставим в (6.5.4), после элементарных преобразований будем иметь

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = r\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^2} . \tag{6.5.5}$$

Дифференцируя второе уравнение (6.5.2) по времени, получим

$$\ddot{q} = x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x} - \dot{y}\dot{x} = x\ddot{y} - y\ddot{x} ,$$

или

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \ddot{q} . \tag{6.5.6}$$

Возведём в квадрат (6.5.5) и (6.5.6), после сложения получим

$$r^2\left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2\right) = \ddot{q}^2 + \left(r\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^2}\right)^2 . \tag{6.5.7}$$

Теперь мы можем составить функцию Гиббса

$$G = \frac{1}{2}m\left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left\{\left(\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^3}\right)^2 + \frac{\ddot{q}^2}{r^2}\right\}.$$

После раскрытия скобок придём к равенству

$$G = \frac{1}{2} m \left(\ddot{r}^2 - 2\frac{\ddot{r}\dot{q}^2}{r^2} + \frac{\dot{q}^4}{r^6} + \frac{\ddot{q}^2}{r^2} \right).$$

Отбрасывая не зависящий от ускорения член $\frac{\dot{q}^4}{r^6}$, окончательно получим:

$$G = \frac{1}{2} m \left(\ddot{r}^2 - \frac{2}{r^3}\dot{q}^2\ddot{r} + \frac{1}{r^2}\ddot{q}^2 \right). \tag{6.5.8}$$

Выражение для функции Гиббса можно вывести и непосредственно, воспользовавшись выражением для элемента ds в полярных координатах.

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \cdot \tag{6.5.9}$$

Используя Приложение V, составим выражения для радиальной и тангенциальной составляющих ускорений:

радиальная составляющая

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^3} \ ; \tag{6.5.10}$$

тангенциальная составляющая

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{\ddot{q}}{r} \ . \tag{6.5.11}$$

Если радиальную и тангенциальную составляющие силы обозначить соответственно через F_r и F_θ, то работа, совершаемая на виртуальном перемещении, будет равна

$$A = F_r\delta r + F_\theta \delta q \tag{6.5.12}$$

и уравнения Гиббса-Аппеля примут вид

$$m\left(\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^3} \right) = F_r, \quad m\ddot{q} = rF_\theta . \tag{6.5.13}$$

В задачах о движении по центральным орбитам силовое поле является радиальным, то есть $F_\theta = 0$, и мы можем сразу написать, что $\dot{q} = \alpha$, где α - постоянная интегрирования. Первое из уравнений (6.5.13) примет вид

$$m\left(\ddot{r} - \frac{\alpha^2}{r^3}\right) = F_r. \tag{6.5.14}$$

Полагая $F_r = -\frac{dV}{dr}$, получим:

$$\ddot{r} - \frac{\alpha^2}{r^3} + \frac{1}{m}\frac{dV}{dr} = 0.$$

После умножения на dr предыдущее равенство примет вид:

$$\ddot{r}dr - \frac{\alpha^2}{r^3}dr + \frac{1}{m}dV = 0.$$

Учитывая, что $\ddot{r}dr = \frac{d\dot{r}}{dt}dr = \frac{dr}{dt}d\dot{r} = \dot{r}d\dot{r}$, можем написать:

$$\dot{r}d\dot{r} - \frac{\alpha^2}{r^3}dr + \frac{1}{m}dV = 0.$$

Интегрируя последнее выражение, получим первый интеграл движения

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\alpha^2}{2r^2} + \frac{1}{m}V = h ,$$

или

$$\dot{r}^2 + \frac{2}{m}V + \frac{\alpha^2}{r^2} = 2h. \tag{6.5.15}$$

2. Движение плоской твёрдой пластинки в своей плоскости.

Для изучения движения плоской твёрдой пластинки в плоскости своего движения, мы выберем в качестве ИСО “Лабораторию”, связав с ней декартову систему координат, в которой будем рассматривать движение центра тяжести пластинки. Вращательное движение пластинки мы будем рассматривать в полярной системе координат относительно системы осей, сохраняющих неизменное направление, с началом в центре тяжести пластинки.

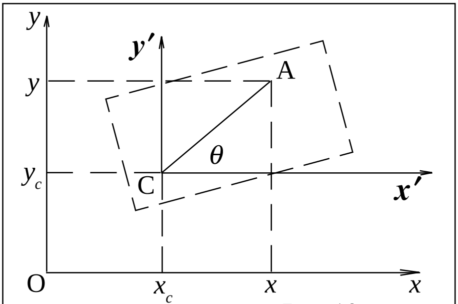

Рис.18.

Пусть x_c, y_c координаты центра тяжести. Тогда мы можем сразу написать выражение для первой части функции Гиббса, соответствующее движению центра тяжести

$$G_c = \frac{1}{2}M\left(\ddot{x}_c^2 + \ddot{y}_c^2\right) = \frac{1}{2}Ma_c^2\,, \tag{6.5.16}$$

где M масса пластинки.

Составим выражение для второй части функции Гиббса, соответствующей вращательному движению пластинки вокруг центра тяжести. Выберем на пластинке некоторую материальную точку A с координатами x, y (см. рис.18). Составим для неё функцию Гиббса

$$G_{\theta_A} = \frac{1}{2}m\left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2\right), \tag{6.5.17}$$

где m - масса материальной точки A. Мы мысленно разбили пластинку на некоторое достаточно большое количество материальных точек одинаковой массы m , движущихся как одно целое.

Получим выражение для ускорения материальной точки A в полярных координатах.

Так как

$$x = r\cos\theta\,,\; y = r\sin\theta\,,$$

то

$$\dot{x} = -r\sin\theta\dot{\theta}, \quad \dot{y} = r\cos\theta\dot{\theta},$$

а

$$\ddot{x} = -r\cos\theta\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\ddot{\theta}, \quad \ddot{y} = -r\sin\theta\dot{\theta}^2 + r\cos\theta\ddot{\theta}.$$

Возведём полученные значения составляющих ускорения материальной точки А в квадрат и подставим в (6.5.17)

$$G_{\theta_A} = \frac{1}{2}m\left(r^2\ddot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^4\right). \tag{6.5.18}$$

Помня о том, что слагаемые, не содержащие ускорения, несущественны, мы можем написать

$$G_{\theta_A} = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I_A\ddot{\theta}^2, \tag{6.5.19}$$

где I_A - момент инерции материальной точки А относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости движения пластинки.

Функция Гиббса примет вид

$$G = G_c + \sum G_{\theta_A} = \frac{1}{2}Ma_c^2 + \frac{1}{2}\sum I_A\ddot{\theta}^2,$$

или окончательно

$$G = \frac{1}{2}Ma_c^2 + \frac{1}{2}I\ddot{\theta}^2, \tag{6.5.20}$$

где $I = \sum I_A$ - момент инерции плоской пластинки относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости движения пластинки.

Для более полного закрепления изложенной выше теории, решим следующую задачу.

Задача 28.

Однородный твёрдый цилиндр радиуса r_1 катится по внутренней поверхности неподвижного полого цилиндра радиуса r_2. Составить уравнение движения катящегося цилиндра. Предполагается, что оси цилиндров горизонтальны, а поверхности шероховатые, то есть проскальзывание исключено, и катящийся цилиндр не отрывается от неподвижного цилиндра во всё время своего движения.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$F\left(\theta,\ddot{\theta}\right)$
Дано	r_1,
	r_2.

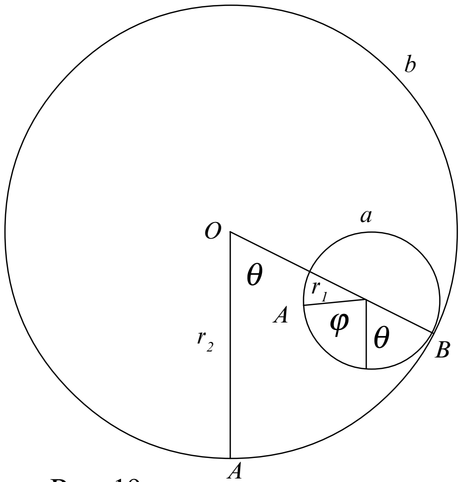

Рис. 19.

Решение задачи.

Выберем ИСО "Лаборатория", поместив начало полярной системы координат в центр неподвижного цилиндра. Сделаем чертёж.

В данной задаче мы имеем одну степень свободы, то есть $k = 1$. Пусть в положении равновесия точка A' на поверхности подвижного цилиндра совпадала с наинизшей точкой A на поверхности неподвижного цилиндра. Если точка соприкосновения катящегося цилиндра переместится в точку B, то на основании того, что движение происходит без проскальзывания, мы можем написать, что длина дуги $A'B$ равняется длине дуги AB, или $r_1\left(\theta+\varphi\right)=r_2\theta$. Введя обозначение $r = r_2 - r_1$, перепишем последнее равенство в виде

$$r_1\varphi = r\theta\,. \qquad (6.5.21)$$

Функция Гиббса будет состоять из составляющей, обусловленной вращением подвижного цилиндра вокруг оси неподвижного цилиндра, и из собственного вращения подвижного цилиндра

$$G = \frac{1}{2}m\left(r^2\ddot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^4\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr_1^2\right)\ddot{\varphi}^2, \qquad (6.5.22)$$

где $\frac{1}{2}mr_1^2$ - момент инерции подвижного цилиндра.

Учитывая (6.5.21) и то, что слагаемое $r^2\dot{\theta}^4$ как несущественное можно опустить, выразим функцию Гиббса через одну переменную

$$G = \frac{3}{4}mr^2\ddot{\theta}^2. \qquad (6.5.23)$$

Работа заданных сил (силы тяжести) на виртуальном перемещении равна

$$mq\delta(r\cos\theta) = -mqr\sin\theta\delta\theta. \qquad (6.5.24)$$

Уравнение движения запишется в виде

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} = -mqr\sin\theta$$

или

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{q}{r}\sin\theta = 0. \qquad (6.5.25)$$

Мы получили уравнение, аналогичное уравнению колебания маятника длиной $\frac{3}{2}r$.

3. Аналог теоремы Кёнига.

Для любой системы материальных точек справедлива теорема об ускорениях, аналогичная известной теореме Кёнига о скоростях. Пусть ξ, ζ, η - координаты центра тяжести в декартовой системе координат, а α, β, γ - координаты материальной точки относительно центра тяжести.

Тогда для декартовых координат материальной точки можно написать, что

$$x = \xi + \alpha\,,\ y = \zeta + \beta\,,\ z = \eta + \gamma\,. \qquad (6.5.26)$$

Кинетическую энергию системы материальных точек можно представить в виде суммы двух частей, одна из которых определяется движением центра тяжести, а другая – движением относительно центра тяжести, то есть изменением ориентации тела при центре тяжести, принимаемом неподвижным (теорема Кёнига).

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m\left\{\left(\dot{\xi} + \dot{\alpha}\right)^2 + \left(\dot{\zeta} + \dot{\beta}\right)^2 + \left(\dot{\eta} + \dot{\gamma}\right)^2\right\}. \qquad (6.5.27)$$

Так как

$$\sum m\dot{\alpha} = \sum m\dot{\beta} = \sum m\dot{\gamma} = 0\,,$$

то окончательно теорема Кёнига для скоростей будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2 + \dot{\eta}^2\right) + \frac{1}{2}\sum m\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2\right). \qquad (6.5.28)$$

Выражения для функции Гиббса запишется в форме

$$G = \frac{1}{2}M\left(\ddot{\xi}^2 + \ddot{\zeta}^2 + \ddot{\eta}^2\right) + \frac{1}{2}\sum m\left(\ddot{\alpha}^2 + \ddot{\beta}^2 + \ddot{\gamma}^2\right). \qquad (6.5.29)$$

Что является следствием основного свойства центра тяжести, согласно которому

$$\sum m\ddot{\alpha} = \sum m\ddot{\beta} = \sum m\ddot{\gamma} = 0\,. \qquad (6.5.30)$$

Замечание. Если механическая система состоит из нескольких твёрдых тел, то удобнее (как и в случае с теоремой Кёнига) применять теорему к каждому твёрдому телу в отдельности, а не ко всей системе в целом.