Глава VII
Шестая форма основного уравнения

В этой главе рассматривается шестая форма основного уравнения. Устанавливается его связь с уравнениями Лагранжа, Гамильтона, Рауса и принципом Гамильтона. Вводится понятие о главной функции, и рассматриваются её свойства.

§7.1. Шестая форма основного уравнения

Рассмотрим консервативную голономную (нормальную) систему материальных точек. В соответствии с §3.3 для такой системы материальных точек справедливы следующие положения:

1) соотношения между q_r и x_r не содержат явно время t ,

2) заданные силы консервативны,

3) система голономна и обобщённые координаты выбраны так, что $n = l$ (число обобщённых координат минимально) и четвёртая форма основного уравнения (3.1.14) справедлива для произвольных значений $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$.

Напишем четвёртую форму основного уравнения в виде

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}\right\}\delta q_r = 0, \tag{7.1.1}$$

которая вследствие произвольности вариаций $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$ эквивалентна n уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \qquad r = 1,2,..., n . \tag{3.6.3}$$

Составим вариацию функции Лагранжа $L = L(q,\dot{q},t)$ при произвольных q_r и $\dot{q}_r$ и неизменном времени t:

$$\delta L = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r\right). \tag{7.1.2}$$

Учитывая, что $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$, а $\dfrac{\partial L}{\partial q_r} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) = \dot{p}_r$ в соответствии с (3.6.3), перепишем (7.1.2) в виде

$$\boxed{\sum_{r=1}^{n}\left(\dot{p}_r\delta q_r + p_r\delta\dot{q}_r\right) = \delta L,} \tag{7.1.3}$$

представляющим собой *шестую форму основного уравнения*, справедливую при произвольных значениях δq_r и $\delta \dot{q}_r$.

Шестая форма основного уравнения наиболее удобна для описания натуральных систем материальных точек.

§7.2. Эквивалентность шестой формы основного уравнения с уравнениями Лагранжа и Гамильтона

Шестую форму основного уравнения мы получили из уравнений Лагранжа. Решим обратную задачу – выведем уравнения Лагранжа из уравнения (7.1.3). Так как шестая форма уравнения справедлива при произвольных значениях δq_r и $\delta \dot{q}_r$, то, сравнивая его с (7.1.2), мы можем записать

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}, \quad \dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r}, \quad r = 1,2,\ldots,n. \tag{7.2.1}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_r}, \; r = 1,2,\ldots,n. \tag{7.2.2}$$

Рассмотрим вариацию от функции

$$\sum_{r=1}^{n} p_r\dot{q}_r - L = H\ . \qquad (7.2.3)$$

$$\delta\left(\sum_{r=1}^{n} p_r\dot{q}_r - L\right) = \delta\sum_{r=1}^{n}\left(p_r\dot{q}_r\right) - \delta L =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\left(\dot{q}_r\delta p_r + p_r\delta\dot{q}_r - \dot{p}_r\delta q_r - p_r\delta\dot{q}_r\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\left(\dot{q}_r\delta p_r - \dot{p}_r\delta q_r\right). \qquad (7.2.4)$$

Уравнения $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$, $r = 1,2,...,n$, определяющие p_r и линейные по $\dot{q}_r$, позволяют найти $\dot{q}_r$ как функции от q_r, p_r, t. Исключив затем $\dot{q}_r$ в выражении $p_r\dot{q}_r - L$, получим функцию H. В исходном уравнении (7.1.3) вариации δq_r и $\delta\dot{q}_r$ были произвольны, поэтому произвольными они будут и в уравнении

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\dot{q}_r\delta p_r - \dot{p}_r\delta q_r\right) = \delta H\ . \qquad (7.2.4)$$

С другой стороны, варьируя $H = H(q,p,t)$ по q_r и p_r, получим

$$\delta H = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_r}\delta q_r + \frac{\partial H}{\partial p_r}\delta p_r\right).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях, можем записать уравнения

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad r = 1,2,...,n\ , \qquad (7.2.5)$$

которые есть не что иное, как уравнения Гамильтона. Функция H является новой описывающей функцией системы материальных точек, то есть функцией, по которой могут быть построены уравнения движения. Таким образом, функция H неявно содержит в себе полное описание возможных движений системы материальных точек.

§7.3. Шестая форма основного уравнения и функция Рауса

Построим описывающую функцию так, чтобы первые m пар уравнений движения (7.2.5) имели гамильтонову форму, а остальные $n-m$ - лагранжеву.

Рассмотрим вариацию от функции $L-\sum_{r=1}^{m} p_r \dot{q}_r = R$, в которой m первых обобщённых скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_m$ заменены на обобщённые импульсы $p_1, p_2, ..., p_m$.

$$\delta\left(L-\sum_{r=1}^{m} p_r \dot{q}_r\right) = \delta L - \delta\sum_{r=1}^{m} p_r \dot{q}_r =$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\dot{p}_r \delta q_r + p_r \delta \dot{q}_r\right) - \sum_{r=1}^{m}\left(p_r \delta \dot{q}_r + \dot{q}_r \delta p_r\right) = \delta R.$$

Или

$$\delta R = \sum_{r=1}^{m} \dot{p}_r \delta q_r + \sum_{r=m+1}^{n} \dot{p}_r \delta q_r + \sum_{r=1}^{m} p_r \delta \dot{q}_r + \sum_{r=m+1}^{n} p_r \delta \dot{q}_r -$$

$$-\sum_{r=1}^{m} p_r \delta \dot{q}_r - \sum_{r=1}^{m} \dot{q}_r \delta p_r . \tag{7.3.1}$$

Варьируя $R = R\left(q_1, q_2, ..., q_n; p_1, p_2, ..., p_m; \dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, ..., \dot{q}_n; t\right)$ по q_r, p_r, $\dot{q}_r$, получим

$$\delta R = \sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial R}{\partial q_r}\delta q_r + \frac{\partial R}{\partial p_r}\delta p_r\right) + \sum_{r=m+1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial q_r}\delta q_r + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r\right).$$

Сравнивая полученное выше уравнение с (7.3.1), запишем:

$$\dot{q}_r = -\frac{\partial R}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = \frac{\partial R}{\partial q_r}, \quad r = 1,2,...,m, \qquad (7.3.2)$$

$$\dot{p}_r = \frac{\partial R}{\partial q_r}, \quad p_r = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}, \quad r = m+1, m+2,...,n. \qquad (7.3.3)$$

Первые m пар уравнений (7.3.2) имеют гамильтонову форму, роль функции Гамильтона H играет (см. 7.2.5) функция $(-R)$, остальные $n-m$ пар – лагранжеву форму (роль функции L играет функция R).

Чтобы построить функцию Рауса R, надо решить m линейных уравнений $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$, $r = 1,2,...,m$, относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2,..., \dot{q}_m$, выразив их через $p_1, p_2,..., p_m, \dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2},..., \dot{q}_n, q_1, q_2,..., q_n, t$.

Наиболее интересен случай, когда первые m обобщённых координат являются циклическими. В этом случае первые m обобщённых импульсов $p_1, p_2,..., p_m$ в процессе движения остаются постоянными и функция Рауса R играет роль функции Лагранжа L для системы с $n-m$ степенями свободы, описываемой координатами $q_{m+1}, q_{m+2},..., q_n$.

§7.4. Теорема $\dfrac{d}{dt}\left(p_r \delta q_r\right) = \delta L$

Рассмотрим шестую форму основного уравнения в упрощённой записи (без знака суммирования)

$$\dot{p}_r \delta q_r + p_r \delta \dot{q}_r = \delta L . \tag{7.4.1}$$

Будем судить о движении системы материальных точек по движению изображающей точки в пространстве n измерений с координатами $q_1, q_2, ..., q_n$. Рассмотрим истинную траекторию системы, то есть траекторию в q - пространстве, удовлетворяющую уравнениям движения. Рассмотрим вариацию, соответствующую переходу от точки $q_1, q_2, ..., q_n$ к точке $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_n + \delta q_n$, для каждого момента времени. Варьированная траектория в общем случае не является истинной траекторией системы материальных точек, то есть не удовлетворяет уравнениям движения. Вариации при этом произвольны и подчинены лишь одному условию: каждая из вариаций δq_r есть функция от t класса C_2. Учитывая синхронность вариаций (опуская знак суммирования), мы можем написать

$$\delta \dot{q}_r = \frac{d}{dt} \delta q_r , \qquad r = 1,2,...,n . \tag{7.4.2}$$

Перепишем уравнение (7.4.1) с учётом (7.4.2)

$$\dot{p}_r \delta q_r + p_r \delta \dot{q}_r = \frac{d}{dt} p_r \delta q_r + p_r \frac{d}{dt} \delta q_r = \frac{d}{dt}\left(p_r \delta q_r\right) = \delta L ,$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(p_r \delta q_r\right) = \delta L . \tag{7.4.3}$$

Уравнение (7.4.3) говорит о том, что *скорость изменения скалярного произведения* $p_r \delta q_r$ *равна вариации* L*, обусловленной синхронным варьированием* δq_r *и* $\delta \dot{q}_r$ *.*

Уравнение (7.4.3) справедливо для произвольно варьированных путей, требуется только, чтобы соответствующие точки исходного и нового путей относились к одному и тому же моменту времени и чтобы каждое $\delta q_r \in C_2$, а новый путь может и не быть действительной траекторией.

§7.5. Принцип Гамильтона

Выведем с помощью теоремы (7.4.3) принцип Гамильтона для голономных консервативных систем материальных точек.

Проинтегрируем (7.4.3). Учитывая, что $d\left(p_r \delta q_r\right) = \delta L dt$, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{p_{r1}\delta q_{r1}}^{p_{r0}q_{r0}} d\left(p_r \delta q_r\right) = p_{r1}\delta q_{r1} - p_{r0}\delta q_{r0}\ , \tag{7.5.1}$$

где p_{r0}, q_{r0} величины p_r, q_r в момент времени t_0,

p_{r1}, q_{r1} - теже величины в момент времени t_1.

Если в моменты t_0 и t_1 вариация δq_r обращается в нуль, то

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0, \tag{7.5.2}$$

что является выражением принципа Гамильтона.

Уравнения (7.5.1) и (7.5.2) можно записать и так:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = p_{r1}\delta q_{r1} - p_{r0}\delta q_{r0}, \tag{7.5.3}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0. \tag{7.5.4}$$

Исходный интеграл берётся вдоль дуги действительной траектории в q-пространстве (вдоль пути, удовлетворяющего уравнениям движения).

Варьированный интеграл берётся вдоль допустимого пути, который, вообще говоря, не является действительной траекторией.

§7.6. Главная функция

Главная функция, введённая Гамильтоном в 1834 году, подсказана методами, применяемыми в геометрической оптике, и позволяет получить динамически возможные движения системы материальных точек.

В явном виде *главная функция* S *есть интеграл* $\int_{t_0}^{t_1} L dt$, *взятый вдоль действительной траектории* (путь в q - пространстве, удовлетворяющий уравнениям движения) и выраженный через начальные и конечные значения координат, а так же начальное и конечное значение времени:

$$S = S(q_{10}, q_{20}, ..., q_{n0}; q_{11}, q_{21}, ..., q_{n1}; t_0, t_1), \tag{7.6.1}$$

или в краткой записи

$$S = S(q_{r0}; q_{r1}; t_0, t_1). \tag{7.6.2}$$

Рассмотрим правила построения главной функции.

Предположим, что мы знаем интегралы уравнений движения Лагранжа, тогда каждая координата q_r есть известная однозначная функция от n переменных q_{r0}, n переменных $\dot{q}_{r0}$ ($\dot{q}_{r0}$ есть $\dot{q}_r$ в момент времени t_0), а так же моментов времени t_0 и t.

Таким образом, нам известны функции

$$q_s = \varphi_s(q_{r0}; \dot{q}_{r0}; t_0, t), \qquad s = 1, 2, ..., n. \tag{7.6.3}$$

Теперь можно составить функцию L через $2n+1$ параметров $(q_{r0}; \dot{q}_{r0}; t_0)$ и переменную t. Интегрируя полученную функцию от t_0 до t_1, мы получим её выражение через n параметров q_{r0}, n параметров $\dot{q}_{r0}$, а так же через t_0 и t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \sum \left(q_{r0}; \dot{q}_{r0}; t_0, t_1\right). \tag{7.6.4}$$

Пусть в момент времени t_1 достигается точка $q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{n1}$, для которой мы можем составить функции

$$q_{s1} = \varphi_{s1}\left(q_{r0}; \dot{q}_{r0}; t_0, t_1\right), \quad s = 1,2,\ldots,n. \tag{7.6.5}$$

С помощью уравнений (7.6.5) мы можем исключить $\dot{q}_{r0}$ из уравнений (7.6.4), выразив их через q_{r1}, в результате чего мы получим искомую главную функцию S:

$$\sum \left(q_{r0}; \dot{q}_{r0}; t_0, t_1\right) = S\left(q_{r0}; q_{r1}; t_0, t_1\right). \tag{7.6.6}$$

Из (7.6.6) следует, что $\dot{q}_{r0}$ играет вспомогательную роль и в окончательный результат не входит.

Рассмотрим зависимость S от её $2n+2$ аргументов. Фиксируя t_0 и t_1, получим для вариаций конечных точек в соответствии с (7.6.6), (7.6.4) и (7.5.3)

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = p_{r1}\delta q_{r1} - p_{r0}\delta q_{r0}, \tag{7.6.7}$$

где p_{r0}, p_{r1} - составляющие обобщённого импульса в моменты времени t_0 и t_1, для которых мы можем написать

$$p_{r0} = -\frac{\partial S}{\partial q_{r0}}, \qquad p_{r1} = \frac{\partial S}{\partial q_{r1}}. \tag{7.6.8}$$

Здесь мы учли, что

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial q_{r0}}\delta q_{r0} + \frac{\partial S}{\partial q_{r1}}\delta q_{r1}.$$

Рассмотрим теперь вариацию времени t_1. Пусть L_1 - значение L на траектории в момент времени t_1. Тогда в силу (7.6.4) и (7.6.6), получим

$$L_1 = \frac{\partial \Sigma}{\partial t_1} = \frac{\partial S}{\partial t_1} + \frac{\partial S}{\partial q_{r1}}\frac{\partial q_{r1}}{\partial t_1}, \tag{7.6.9}$$

или с учётом (7.6.8) и (7.2.3)

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} = -p_{r1}\dot{q}_{r1} + L_1 = -(p_{r1}\dot{q}_{r1} - L_1) = -H_1, \tag{7.6.10}$$

Рассмотрим вариацию времени t_0. В соответствии с Приложением III п.2 вариация L на нижнем пределе будет уменьшаться.

$$-L_0 = \frac{\partial \Sigma}{\partial t_0} = \frac{\partial S}{\partial t_0} + \frac{\partial S}{\partial q_{r0}}\dot{q}_{r0},$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = p_{r0}\dot{q}_{r0} - L_0 = H_0, \tag{7.6.11}$$

где H_1 - значение функции Гамильтона H в заданном движении в момент времени t_1, H_0 - значение функции H в заданном движении в момент времени t_0.

Для вариации по всем $2n+2$ аргументам, с учётом (7.6.7), (7.6.10) и (7.6.11), можно написать, что

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q_{r0}}\delta q_{r0} + \frac{\partial S}{\partial q_{r1}}\delta q_{r1} + \frac{\partial S}{\partial t_0}dt_0 + \frac{\partial S}{\partial t_1}dt_1,$$

или

$$dS = p_{r1}dq_{r1} - p_{r0}dq_{r0} - H_1 dt_1 + H_0 dt_0 \, . \qquad (7.6.12)$$

§7.7. Свойства главной функции

Рассмотрим соотношения, задающие q_{r1} в зависимости от t_1 (и параметров $q_{r0}; p_{r0}; t_0$).

$$\frac{\partial S}{\partial q_{r0}} = -p_{r0}, \qquad r = 1,2,...,n \, . \qquad (7.7.1)$$

Они представляют собой *интегралы уравнений Лагранжа, определяющие явное выражение движения в q - пространстве*. Таким образом, соотношения (7.7.1) дают общее решение задачи Лагранжа.

Аналогично, соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_{r1}} = p_{r1} \, , \qquad r = 1,2,...,n \, , \qquad (7.7.2)$$

выражают p_{r1} через q_{r1} (а также q_{r0}, t_0, t_1).

Выражения (7.7.1) и (7.7.2) определяют q_{r1} и p_{r1} как функции t_1 (и параметров $q_{r0}; p_{r0}; t_0$), *представляют собой интегралы уравнений Гамильтона, определяют движение системы материальных точек в фазовом пространстве и дают общее решение задачи Гамильтона*.

1.Если функция Лагранжа L не зависит явно от t, то t_0 и t_1 входят в выражение для главной функции S в комбинации $(t_1 - t_0)$, $H_1 = H_0$ и формула (7.6.12) примет вид

$$dS = p_{r1}dq_{r1} - p_{r0}dq_{r0} - H_1 d(t_1 - t_0). \qquad (7.7.3)$$

2. Функция S имеет непрерывные вторые производные, а определитель

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 S}{\partial q_{10}\partial q_{11}} & \frac{\partial^2 S}{\partial q_{10}\partial q_{21}} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial q_{10}\partial q_{n1}} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial q_{20}\partial q_{11}} & \frac{\partial^2 S}{\partial q_{20}\partial q_{21}} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial q_{20}\partial q_{n1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial q_{n0}\partial q_{11}} & \frac{\partial^2 S}{\partial q_{n0}\partial q_{n1}} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial q_{n0}\partial q_{n1}} \end{matrix} \right\| = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_{r0}\partial q_{s1}} \right\| \neq 0, \quad (7.7.4)$$

что обеспечивает независимость переменных p_{r1} и q_{r0}, а также t_0 и t_1.

3. Теорема Лиувилля.

Якобиан $$\frac{\partial(q_{11}, q_{21}, ..., q_{n1}, p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1})}{\partial(q_{10}.q_{20}, ..., q_{n0}, p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0})} = +1. \quad (7.7.5)$$

Это означает, что преобразование от (q_{r0}, p_{r0}) к (q_{r1}, p_{r1}), осуществляемое интегралами уравнений Гамильтона (при фиксированных t_0 и t_1), *обладают свойством сохранения протяжённости (объёма, меры) фазового пространства.*

4. Соотношения (7.7.1) и (7.7.2) дают решение задачи Гамильтона, выражая q_{r1} и p_{r1} через $2n$ параметров q_{r0} и p_{r0}. Предположим теперь, что мы хотим перейти к новой системе $2n$ параметров α_r, β_r, представляющие собой независимые функции от q_{r0} и p_{r0} с непрерывными первыми производными и удовлетворяющими условию

$$\beta_r d\alpha_r = p_{r0} dq_{r0} \quad (7.7.6)$$

(знак суммирования для краткости опущен).

Переход от (q_{r0}, p_{r0}) *к* (α_r, β_r) *называется контактным преобразованием.*

Главная функция S, выраженная через $2n+2$ переменных

$(q_{r1};\alpha_r;t_0,t_1)$, примет вид:

$$S(q_{r0};q_{r1};t_0,t_1)=S'(\alpha_r;q_{r1};t_0,t_1). \tag{7.7.7}$$

Формула (7.6.12) запишется так

$$dS'=p_{r1}dq_{r1}-\beta_r d\alpha_r - H_1dt_1+H_0dt_0. \tag{7.7.8}$$

Отсюда немедленно следуют формулы

$$\frac{\partial S'}{\partial \alpha_r}=-\beta_r, \quad r=1,2,\ldots,n, \tag{7.7.9}$$

являющиеся решением задачи Лагранжа и определяющие q_{r1} через α_r,β_r,t_0,t_1, и

$$\frac{\partial S'}{\partial q_{r1}}=p_{r1}, \quad r=1,2,\ldots,n, \tag{7.7.10}$$

дающие совместно с (7.7.9) решение задачи Гамильтона, выражая q_{r1} и p_{r1} через α_r,β_r,t_0,t_1.

5. Преобразование (α_r,β_r) в $(q_{r1};p_{r1})$ сохраняет меру

$$\frac{\partial(q_{r1};p_{r1})}{\partial(\alpha_r,\beta_r)}=+1. \tag{7.7.11}$$