Глава IX
Уравнения Гамильтона

В этой главе мы рассмотрим скобки Пуассона, теорему Пуассона, линейный интегральный инвариант, теорему Пуанкаре о линейном интегральном инварианте и теорему Лиувилля.

§9.1. Скобки Пуассона

Если для всех значений q_r и p_r, являющихся решением канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad \dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad r = 1,2,\ldots,n, \tag{9.1.1}$$

некоторая функция $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$ сохраняет постоянное значение:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = c, \tag{9.1.2}$$

то $f(q, p, t) = c$ называется первым интегралом канонических уравнений Гамильтона. Совершенно ясно, что если $f(q, p, t) = c$ является первым интегралом, то любая функция $F(f) = const$ будет также первым интегралом. Левая часть первого интеграла (9.1.2) представляет собой функцию канонических переменных и времени, которая остаётся постоянной во всё время движения при любых начальных условиях.

Предположим, что нам известны $2n$ первых интегралов уравнений (9.1.1), то есть

$$f_j(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = c_j, \quad j = 1,2,\ldots,2n, \tag{9.1.3}$$

где c_j - постоянные величины. Предположим, что все первые интегралы являются независимыми, то есть в число рассматриваемых интегралов не входят произвольные функции от этих интегралов. Решая систему уравнений (9.1.3) относительно q_r и p_r, получим

$$\left.\begin{aligned} q_r &= q_r(c_1, c_2, \ldots, c_{2n}, t), \\ p_r &= p_r(c_1, c_2, \ldots, c_{2n}, t) \end{aligned}\right\} \quad r = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{9.1.4}$$

то есть, решение уравнений (9.1.1).

Найдём условия, при которых соотношение (9.1.2) будет первым интегралом канонических уравнений Гамильтона. По определению первого интеграла, функция $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = c$ при замене канонических переменных какими-либо решениями уравнений (9.1.1) будет оставаться постоянной, а, следовательно, полная производная от f по времени t должна быть равна нулю, то есть

$$\frac{df}{dt} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_r} \dot{q}_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_r} \dot{p}_r + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,.$$

Из полученного выше уравнения, после замены $\dot{q}_r$ и $\dot{p}_r$ их выражениями через функцию Гамильтона H, следует, что интегралы f уравнений Гамильтона удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega f = 0\,, \tag{9.1.5}$$

где линейный оператор Ω определяется формулой

$$\Omega f = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial f}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial(f, H)}{\partial(q_r, p_r)} = \sum_{r=1}^{n} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial q_r} & \dfrac{\partial f}{\partial p_r} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_r} & \dfrac{\partial H}{\partial p_r} \end{vmatrix}. \tag{9.1.6}$$

Если φ и ψ - функции от (q_r, p_r, t), то выражение

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{(\partial q_r, p_r)} \tag{9.1.7}$$

представляющее собой n определителей (9.1.6), называют *скобкой Пуассона* и обозначают через (φ, ψ).

Таким образом,

$$\Omega f = (f, H) \tag{9.1.8}$$

и интегралы $f(q, p, t) = c$ уравнений Гамильтона удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0\,. \tag{9.1.9}$$

Сами уравнения Гамильтона можно также записать с помощью скобок Пуассона:

$$\dot{x}_r = \Omega x_r = (x_r, H), \qquad r = 1,2,\ldots,2n\,. \tag{9.1.10}$$

Скобки Пуассона играют важную роль не только в классической, но и в квантовой механике.

Рассмотрим свойства скобок Пуассона:

1. $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$, (9.1.11)

2. $(c\varphi, \psi) = c(\varphi, \psi)$, (9.1.12)

3. $\dfrac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right)$, (9.1.13)

если некоторая функция $\chi = \chi(q_r, p_r, t)$, то

4. $(\varphi + \psi, \chi) = (\varphi, \chi) + (\psi, \chi)$, (9.1.14)

5. $((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi) = 0\,.$ (9.1.15)

§9.2. Теорема Пуассона

Если φ, ψ *- интегралы уравнений Гамильтона, принадлежащие классу* C_2*, то* (φ, ψ) *также является интегралом.*

Так как φ, ψ - интегралы уравнений Гамильтона, то в соответствии с (9.1.9) можно записать

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0\,,\ \frac{\partial\psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0\,. \tag{9.2.1}$$

Тогда,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\psi) + ((\varphi,\psi), H) =$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + ((\varphi,\psi), H) =$$

$$= -((\varphi, H), \psi) - (\varphi, (\psi, H)) + ((\varphi,\psi), H) =$$

$$= (\psi, (\varphi, H)) + (\varphi, (H, \psi)) + (H, (\psi, \varphi)). \tag{9.2.2}$$

В соответствии с тождеством Пуассона (9.1.15) последняя строчка (9.2.2) равна нулю, то есть (φ,ψ) является интегралом движения.

§9.3. Применение известного интеграла движения

В четвёртой главе мы рассмотрели метод (Уиттекера) понижения порядка системы уравнений с помощью известного интеграла движения, заменяя первоначальную систему n уравнений другой, с числом зависимых переменных $n-1$. В этом параграфе мы покажем, если первоначальная система $2n$ уравнений имеет гамильтонову форму, то, используя известный интеграл движения, можно не только понизить порядок системы, но $2(n-1)$ уравнение сохранит гамильтонову форму, а одно нет.

Для упрощения предположим, что интеграл количества движения соответствует циклической координате q_1 и пусть

$$H = H(q_2, q_3, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t). \qquad (9.3.1)$$

В таком случае величина p_1 сохраняет свою величину в процессе движения

$$p_1 = \beta. \qquad (9.3.2)$$

Система $2n$ уравнений приводится к гамильтоновой форме с $2(n-1)$ переменными:

$$\frac{dq_2}{\frac{\partial H'}{\partial p_2}} = \frac{dq_3}{\frac{\partial H'}{\partial p_3}} = \ldots = \frac{dp_2}{\frac{\partial H'}{\partial q_2}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial H'}{\partial q_3}} = \ldots = dt. \qquad (9.3.3)$$

Функция H' получается из (9.3.1), если в ней положить $p_1 = \beta$. Ещё одно уравнение мы получим из соотношения

$$q_1 = \int \frac{\partial H'}{\partial \beta} dt. \qquad (9.3.4)$$

Если система материальных точек является нормальной, то для понижения порядка системы уравнений можно использовать интеграл энергии

$$H = H(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h. \qquad (9.3.5)$$

Разрешим уравнение (9.3.5) относительно q_1 (координата q_1 не является циклической)

$$q_1 = \varphi(q_2, q_3, \ldots, q_n, p_2, p_3, \ldots, p_n, h, p_1). \qquad (9.3.6)$$

Подставляя (9.3.6) в (9.3.5) получим тождество. Дифференцируя его по p_r $(r = 2, 3, \ldots, n)$, получим

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_r} = 0. \qquad (9.3.7)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_r} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial p_r}}{\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{\dot{q}_r}{\dot{p}_r} = \frac{dq_r}{dp_r}. \tag{9.3.8}$$

Если подставим функцию φ вместо q_1 в соотношение (9.3.5) и дифференцируя по q_r $(r = 2,3,...,n)$, находим

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} = 0. \tag{9.3.9}$$

Откуда

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial q_r}}{\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{\dot{p}_r}{\dot{p}_1} = \frac{dp_r}{dp_1}. \tag{9.3.10}$$

Таким образом, *функцию* φ *можно взять в качестве новой функции Гамильтона с* $2(n-1)$ *переменными* $q_2, q_3,...q_n, p_2, p_3,..., p_n$ *и параметром* p_1 (в качестве которого обычно берут время t).

Если разрешить уравнение (9.3.5) относительно p_1, то получим

$$p_1 = \psi(q_2, q_3,..., q_n, p_2, p_3,..., p_n, h, q_1). \tag{9.3.11}$$

С помощью приведённых выше рассуждений нетрудно получить соотношения

$$\frac{dq_r}{dq_1} = \frac{\partial \psi}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dq_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_r}, \qquad r = 2,3,...,n. \tag{9.3.12}$$

§9.4. Интегральные инварианты

Понятие интегральных инвариантов было введено Пуанкаре в 1890 году в работе «Новые методы небесной механики».

Для понимания происхождения и смысла понятия интегральных инвариантов воспользуемся примером, приведённым Пуанкаре в указанной выше работе.

Рассмотрим поток несжимаемой жидкости, где через u, v, w обозначим компоненты скорости молекулы жидкости, имеющей в момент времени t координаты x, y, z. Будем считать, что функции u, v, w заданы и в общем случае зависят от t, x, y, z. Если u, v, w не зависят от t, будем считать движение потока жидкости *установившимся*.

Для траектории движения любой молекулы в установившимся движении мы можем написать

$$\frac{dx}{u} + \frac{dy}{v} + \frac{dz}{w} = 0. \tag{9.4.1}$$

Для интегрирования (9.4.1) мы могли бы воспользоваться выражениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \\ y &= \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0), \end{aligned}\right\} \tag{9.4.2}$$

так, что x, y, z были бы выражены через время t и их начальные значения x_0, y_0, z_0.

Зная начальное положение молекулы, мы могли бы определять её положение для любого момента времени t.

Рассмотрим множество молекул жидкости, образующих в начальный момент времени t_0 некоторую конфигурацию F_0. С течением времени конфигурация F_0, деформируясь непрерывным, образом перейдёт в новую конфигурацию F.

Предполагая, что движение потока жидкости непрерывно, то есть, что u, v, w - непрерывные функции от x, y, z, мы можем предположить, что между конфигурациями F_0 и F существуют определённые соотношения, являющиеся следствием непрерывности движения жидкости.

Если конфигурация F_0 является непрерывной кривой или поверхностью, то и конфигурация F будет непрерывной кривой или поверхностью.

Если конфигурация F_0 представляет собой односвязный объём, то конфигурация F будет односвязным объёмом.

Если конфигурация F_0 - замкнутая кривая или поверхность, то такой же будет и конфигурация F.

Пусть некоторая конфигурация несжимаемой жидкости в момент времени t_0 занимает объём F_0. По истечении времени t жидкость перейдёт в другую конфигурацию и займёт некоторый другой объём F. Жидкость несжимаема, следовательно, объём такой жидкости со временем не меняется, и мы можем это записать так:

$$\iiint_F dxdydz = \iiint_{F_0} dx_0 dy_0 dz_0 \, . \qquad (9.4.3)$$

Интеграл $\iiint dxdydz$ мы будем называть *интегральным инвариантом*.

Условие несжимаемости можно выразить как

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \, . \qquad (9.4.4)$$

Уравнения (9.4.3) и (9.4.4) эквивалентны.

Если мы вместо жидкости рассмотрим некоторый объём газа, то по истечении некоторого времени он займёт другой объём, но неизменной останется масса газа. Обозначив плотность газа через ρ, будем иметь

$$\iiint\limits_{F} \rho dxdydz = \iiint\limits_{F_0} \rho dx_0 dy_0 dz_0 \,, \tag{9.4.5}$$

или $\iiint \rho dxdydz$ есть интегральный инвариант, а эквивалентное выражение (уравнение неразрывности) запишется как

$$\frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} = 0\,. \tag{9.4.6}$$

Отвлекаясь от конкретного физического смысла, мы можем рассмотреть некоторую конфигурацию точек F_0, переходящих с течением времени в конфигурацию F , которая будет линией, поверхностью или объёмом в зависимости от того, будет ли сама исходная конфигурация F_0 линией, поверхностью или объёмом. Для каждого из случаев мы можем записать интегральные инварианты вида

$$\int (Adx + Bdy + cdz), \tag{9.4.7}$$

$$\iint (A'dydz + B'dxdz + C'dxdy), \tag{9.4.8}$$

$$\iiint M(x, y, z) dxdydz\,. \tag{9.4.9}$$

Очевидно, что не представляет труда распространить изложенный выше метод и на n измерений.

Найдём необходимые условия существования интегрального инварианта.

Пусть динамическая система материальных точек определяется уравнениями общего вида:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)\,. \tag{9.4.10}$$

Траектории на фазовой плоскости можно рассматривать как линии тока при стационарном (когда скорость и плотность в каждой данной точке не зависит от времени) течении некоторой двумерной жидкости. Пусть $\rho(x, y)$ есть «плотность» этой жидкости. Рассмотрим в момент времени $t = t_0$ на фазовой плоскости некоторую площадь («двумерный объём») $V(t)$. «Масса жидкости», находящаяся на этой площади, выразится интегралом

$$I(t_0) = \iint\limits_{V(t_0)} \rho(x_0, y_0) dx_0 dy_0 . \tag{9.4.11}$$

«Жидкость» течёт по фазовой плоскости, следуя линиям, определяемым уравнениями движения (9.4.10). В момент времени t фазовые точки, занимавшие в момент времени t_0 площадь $V(t_0)$, передвинутся по фазовым траекториям и займут новую площадь $V(t)$. «Масса» рассматриваемого двумерного объёма в момент времени t выразится интегралом

$$I(t) = \iint\limits_{V(t)} \rho(x, y) dx dy . \tag{9.4.12}$$

Мы будем считать, что уравнения движения допускают двумерный положительный интегральный инвариант, если плотность $\rho(x, y)$ этой жидкости можно подобрать так, чтобы масса жидкости оставалась постоянной во всё время движения, какой бы начальный двумерный объём мы бы ни выбрали.

Таким образом, $I(t)$ есть интегральный инвариант, если $I(t) = I(t_0)$, или, что тоже самое,

$$\frac{d}{dt} \iint\limits_{V(t)} \rho(x, y) dx dy = 0 . \tag{9.4.13}$$

При дифференцировании интеграла (9.4.13) основное затруднение состоит в том, что площадь, по которой совершается интегрирование, меняется с течением времени. Чтобы обойти эту трудность, перейдём в подынтегральном выражении от переменных x, y к переменным x_0, y_0 с помощью якобиана

$$D\left(\frac{x,y}{x_0,y_0}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial x}{\partial y_0}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y}{\partial y_0}\end{vmatrix}, \qquad (9.4.14)$$

так как $x=x(t-t_0,x_0,y_0)$ и $y=y(t-t_0,x_0,y_0)$.

После перехода к новым переменным, получим:

$$I(t)=\iint\limits_{V(t)}\rho(x,y)dxdy=\iint\limits_{V(t_0)}\rho(x,y)D\left(\frac{x,y}{x_0,y_0}\right)dx_0dy_0\,. \qquad (9.4.15)$$

Так как теперь область, на которую распространяется интегрирование, не зависит от времени, то дифференцирование можно произвести под знаком интеграла и так как $\dfrac{dI}{dt}=0$, то необходимым условием существования интегрального инварианта является условие:

$$\frac{d}{dt}(\rho D)=0\,. \qquad (9.4.16)$$

Подставим в

$$\frac{dD}{dt}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \dot x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial \dot x}{\partial y_0}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y}{\partial y_0}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial x}{\partial y_0}\\ \dfrac{\partial \dot y}{\partial x_0} & \dfrac{\partial \dot y}{\partial y_0}\end{vmatrix}, \qquad (9.4.17)$$

выражения типа $\dfrac{\partial \dot x}{\partial x_0}=\dfrac{\partial \dot x}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x_0}+\dfrac{\partial \dot x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x_0}$ и так далее, рассматривая $\dot x$ и $\dot y$ как функции x и y, согласно уравнениям движения, а x и y - как функции $t-t_0,x_0,y_0$. Тогда (9.4.17) можно будет записать так:

$$\frac{dD}{dt} = D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\dot{y})\right\}, \tag{9.4.18}$$

а (9.4.16) с учетом (9.4.10) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\rho D) = D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\rho\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\dot{y})\right\} = D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\rho P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Q)\right\}.$$

(9.4.19)

Так как $D \neq 0$, то (9.4.13) сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Q) = 0, \tag{9.4.20}$$

которое является условием существования интегрального инварианта.

§9.5. Теорема Лиувилля

Уравнения Гамильтона всегда допускают интегральный инвариант с постоянной фазовой плотностью (которую, не нарушая общности, можно положить равной единице). Полагая в уравнениях (9.4.10) $x = q$, $y = p$, получим:

$$\dot{x} = \dot{q} = P(q, p) = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{y} = \dot{p} = Q(q, p) = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{9.5.1}$$

Полагая в (9.4.20) $\rho = 1$ и учитывая (9.5.1), получим:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) \equiv 0, \tag{9.5.2}$$

в силу перестановочности порядка дифференцирования.

Таким образом, фазовая площадь («двумерный фазовый объём») является интегральным инвариантом для уравнений Гамильтона. Это утверждение, впервые доказанное Лиувиллем, носит название *теоремы Лиувилля*.

Замечание.

Если мы будем пользоваться фазовой плоскостью с переменными $q, \dot{q}$, а не p, q, то есть если мы будем исходить не из уравнений Гамильтона, а из уравнений Лагранжа, то теорема Лиувилля уже не будет иметь места.

Однако мы можем указать интегральный инвариант:

$$\iint\limits_{V^*} dp\,dq = \iint\limits_{V^*} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial \dot{q}} & \dfrac{\partial p}{\partial q} \\ \dfrac{\partial q}{\partial \dot{q}} & \dfrac{\partial q}{\partial q} \end{vmatrix} dq\,d\dot{q} = \iint\limits_{V^*} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\, dq\,d\dot{q}\,. \qquad (9.5.3)$$

Таким образом, мы получили, что в переменных $q, \dot{q}$ фазовая плотность уже не постоянна, а равна $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$. Поэтому, для того чтобы уравнения Лагранжа допускали интегральный инвариант, достаточно, чтобы $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$ было конечно и постоянно по знаку. В реальных задачах это условие обычно выполняется.

Для более ясного понимания достаточно абстрактной теоремы Лиувилля рассмотрим два примера.

Пример 1.

Проанализировать с точки зрения теоремы Лиувилля гармоническое движение системы материальных точек, заданное уравнениями:

$$\frac{dq}{dt} = p\,, \qquad q = a\sin(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{dp}{dt} = -q\,, \qquad p = a\cos(\omega t + \varphi).$$

Решение .

Движение каждой точки системы можно описать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = a\sin(\omega t + \varphi)\vec{i} + a\cos(\omega t + \varphi)\vec{j}$, характеризующего состояние системы материальных точек. С течением времени радиус-вектор каждой точки системы повернётся на один и тот же угол. Таким образом, любая фигура просто повернётся, не изменяя своей формы и, следовательно, площади.

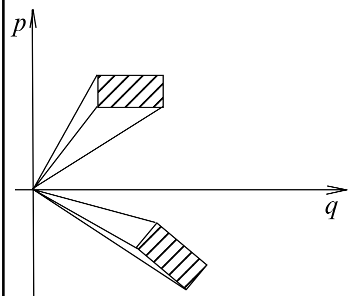

Рис. 20.

Пример 2.

Проанализировать с точки зрения теоремы Лиувилля движение системы материальных точек под действием постоянной силы, заданное уравнениями:

$$\frac{dq}{dt} = p, \qquad q = q_0 + p_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

$$\frac{dp}{dt} = -q, \qquad p = p_0 - gt.$$

Решение .

Выделим в момент времени $t = 0$ на фазовой плоскости квадрат (см. рис.21) ограниченный точками:

A: q_0, p_0; B: $(q_0 + a), p_0$; C: $q_0, (p_0 + a)$; D: $(q_0 + a), (p_0 + a)$.

Фазовый объём квадрата в момент времени $t = 0$ будет $V = a^2$.

В момент времени t_1 точки A,B,C,D будут иметь другие координаты на фазовой плоскости, а именно:

A: $q_1^A = q_0 + p_0 t_1 - \dfrac{gt_1^2}{2}$, $p_1^A = p_0 - gt_1$;

B: $q_1^B = q_0 + a + p_0 t_1 - \dfrac{g t_1^2}{2}$, $p_1^B = p_0 - g t_1$;

C: $q_1^C = q_0 + (p_0 + a) t_1 - \dfrac{g t_1^2}{2}$, $p_1^C = p_0 + a - g t_1$;

D: $q_1^D = q_0 + a + (p_0 + a) t_1 - \dfrac{g t_1^2}{2}$, $p_1^C = p_0 + a - g t_1$.

Вычислим длины сторон получившейся фигуры:

AB: $q_1^B - q_1^A = a$, $p_1^B - p_1^A = 0$, $AB = a$.

CD: $q_1^D - q_1^C = a$, $p_1^D - p_1^C = 0$, $CD = a$.

AC: $q_1^C - q_1^A = a t_1$, $p_1^C - p_1^A = a$, $AC = a\sqrt{t_1^2 + 1}$.

BD: $q_1^D - q_1^B = a t_1$, $p_1^D - p_1^C = a$, $BD = a\sqrt{t_1^2 + 1}$.

Анализ полученных результатов позволяет нам сделать следующий вывод: стороны AB и CD не изменили своих значений, а длины сторон AC и BD изменяются со временем, оставаясь равными друг другу. Фигура из квадрата трансформировалась в параллелограмм с основанием $AB = a$, высотой $p_1^C - p_1^A = a$ и площадью $V = a^2$, которые не будут меняться с течением времени, что и является следствием теоремы Лиувилля о сохранении фазового объёма.

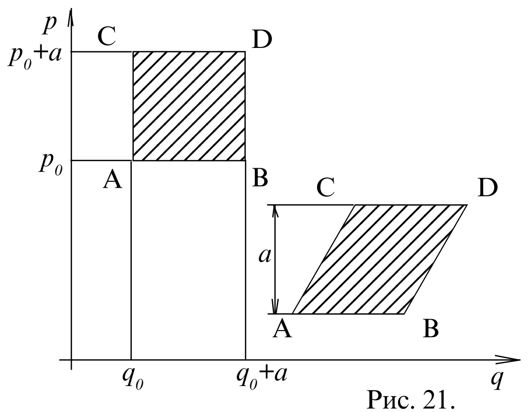

Рис. 21.