Глава X
Задача двух тел

В этой главе мы рассмотрим так называемую задачу двух тел, которая заключается в изучении движения двух материальных точек под действием их взаимного притяжения по закону Ньютона. Фундаментальное значение этой задачи обусловлено тем, что при изучении движений небесных тел мы можем заменять их (почти всегда) материальными точками. Довольно часто также, мы можем рассматривать систему двух тел как изолированную от внешнего гравитационного воздействия.

Задачу двух тел мы неоднократно рассматривали с различных позиций по мере изложения теоретического материала (см. задачи: №22, гл. III; №24, гл. IV; №№26, 27, гл. V; §6.5 п.1, гл. VI; §8.3 п.5, гл. VIII; приложение IV).

Теперь, для полноты картины, мы рассмотрим задачу двух тел с точки зрения теоретической астрономии, заключающуюся в определении координат движущегося тела как функции времени t и шести постоянных интегрирования: a - большая полуось эллипса, e - эксцентриситет эллипса, M_0 - средняя аномалия эпохи, Ω - долгота восходящего узла, i - угол наклона орбиты, ω - аргумент перицентра, которые могут быть измерены с помощью астрономических наблюдений.

§10.1. Дифференциальные уравнения движения

1. Движение в произвольной инерциальной системе отсчёта.

Пусть m_0 и m массы тел S и M, $\vec{\rho}_0$ и $\vec{\rho}$ соответствующие радиус-векторы, определяющие положения тел относительно начала координат O (см. рис. 22). Положение тела M относительно S определим как

$$\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_0 . \qquad (10.1.1)$$

Сила взаимного притяжения, действующая на каждое из рассматриваемых тел, будет

$$F = k^2 \frac{m_0 m}{r^2}, \qquad (10.1.2)$$

где $k^2 = G$ - гравитационная постоянная (будем придерживаться обозначений, принятых в теории движения небесных тел).

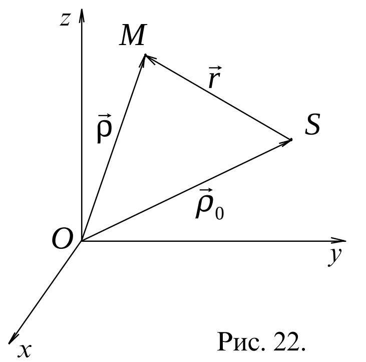

Рис. 22.

Составим дифференциальные уравнения, определяющие движение тел S и M (II закон Ньютона)

$$m_0 \ddot{\vec{\rho}}_0 = k^2 \frac{m_0 m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \qquad (10.1.3)$$

$$m \ddot{\vec{\rho}} = k^2 \frac{m_0 m}{r^2} \left(\frac{-\vec{r}}{r} \right). \qquad (10.1.4)$$

Складывая почленно (10.1.3) и (10.1.4) получим $m_0 \ddot{\vec{\rho}} + m \ddot{\vec{\rho}} = 0$. Интегрирование полученного равенства даёт

$$m_0 \dot{\vec{\rho}} + m \dot{\vec{\rho}} = \vec{\alpha}, \qquad (10.1.5)$$

а после повторного интегрирования получим

$$m_0 \vec{\rho}_0 + m \vec{\rho} = \vec{\alpha} t + \vec{\beta}, \qquad (10.1.6)$$

где $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ - постоянные интегрирования.

Равенства (10.1.5) и (10.1.6), записанные в скалярной форме, дают шесть интегралов движения центра инерции системы двух тел.

2. Относительное движение двух тел.

Вычтем почленно из уравнения (10.1.4) уравнение (10.1.3), в результате чего получим уравнение

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k^2(m_0+m)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (10.1.7)$$

относительного движения двух тел.

3. Движение относительно общего центра инерции C.

Пусть C положение центра инерции тел S и M относительно O определяется вектором $\vec{\sigma}$, таким, что

$$(m_0+m)\vec{\sigma} = m_0\vec{\rho}_0 + m\vec{\rho}. \qquad (10.1.8)$$

Если $\vec{s}_0$ и $\vec{s}$ (см. рис. 23) определяют положение тел S и M относительно центра инерции C, то

$$\vec{\rho}_0 = \vec{\sigma} + \vec{s}_0; \ \vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{s}, \quad \vec{r} = \vec{s} - \vec{s}_0. \qquad (10.1.9)$$

Подставляя первые два равенства из (10.1.9) в (10.1.8), получим

$$m_0\vec{s}_0 + m\vec{s} = 0. \qquad (10.1.10)$$

Подставляя в последнее равенство последовательно $\vec{s} = \vec{r} + \vec{s}_0$ и $\vec{s}_0 = \vec{s} - \vec{r}$, получим

$$(m_0+m)\vec{s}_0 = -m\vec{r}; \qquad (m_0+m)\vec{s} = m_0\vec{r}. \qquad (10.1.11)$$

Теперь мы приходим к выводу, что орбиты, описываемые телами S и M вокруг их общего центра инерции C, подобны между собой и подобны орбите, описываемой одним телом вокруг другого.

Выразим из (10.1.11) $\vec{r}$ последовательно через $\vec{s}_0$ и $\vec{s}$:

$$\vec{r} = -\frac{(m_0+m)}{m}\vec{s}_0; \ \vec{r} = \frac{(m_0+m)}{m_0}\vec{s}$$

и подставим их значения в уравнения движения тел относительно центра инерции (10.1.7), в результате чего получим уравнения

$$\ddot{\vec{s}}_0 = -\frac{k^2m^3}{(m_0+m)^2}\frac{\vec{s}_0}{s_0^3}; \qquad \ddot{\vec{s}} = -\frac{k^2m_0^3}{(m_0+m)^2}\frac{\vec{s}}{s^3}, \qquad (10.1.12)$$

совпадающие по виду с уравнением (10.1.7), то есть уравнения движения можно заменить одним общим уравнением вида

$$\ddot{\vec{r}} = -\chi^2 \vec{r} r^{-3}, \qquad (10.1.13)$$

где χ^2 - положительный постоянный множитель, зависящий от гравитационной постоянной и масс рассматриваемых тел.

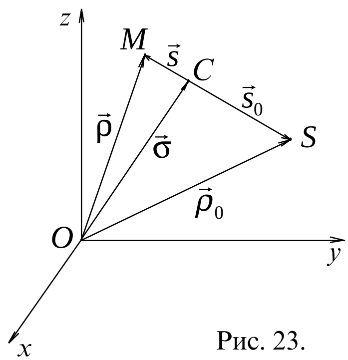

Рис. 23.

Замечание. Если рассматривать движение одного тела относительно другого, то можно положить

$$\chi^2 = k^2(m_0 + m). \qquad (10.1.14)$$

Если в уравнении (10.1.13) принять за независимую переменную величину $t = \chi t$, то оно примет вид

$$\ddot{\vec{r}} + \vec{r} r^{-3} = 0, \qquad (10.1.15)$$

не содержащий в явном виде массы. Тогда в задаче двух тел изменение массы будет эквивалентно изменению единицы времени.

§10.2. Первые интегралы уравнений относительного движения

Полагая $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, перепишем уравнение (10.1.13) в скалярной форме

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \chi^2 x r^{-3} &= 0, \\ \ddot{y} + \chi^2 y r^{-3} &= 0, \\ \ddot{z} + \chi^2 z r^{-3} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.1)$$

Эту систему уравнений шестого порядка можно записать в форме

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi^2}{r}\right), \\ \ddot{y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\chi^2}{r}\right), \\ \ddot{z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\chi^2}{r}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.2)$$

представляющей движение материальной точки единичной массы под действием центральной силы, имеющей силовую функцию, и мы можем получить четыре первых интеграла этих уравнений (три интеграла сохранения момента количества движения и интеграл энергии).

Интегралы площадей (момента количества движения)

Умножая векторно обе части уравнения (10.1.13) на $\vec{r}$, получим

$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = -\chi^2(\vec{r}\times\vec{r})\cdot r^{-3} = 0$ или

$$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = 0 \, . \qquad (10.2.3)$$

Интегрируя последнее уравнение, придём к равенству

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \chi^2\vec{c} \ \text{ или } \ \vec{r}\times\vec{V} = \chi^2\vec{c} \, , \qquad (10.2.4)$$

где $\vec{c}$ - постоянная интегрирования.

Равенство (10.2.4) выражает собой закон сохранения момента количества движения и записанный в скалярной форме (см. **§2.3)** даёт три первых интеграла площадей:

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= \chi c_x, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= \chi c_y, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= \chi c_z. \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.5)$$

Поскольку в левой части (10.2.4) стоит удвоенная секторная скорость движущейся материальной точки, интегралы площадей выражают постоянство секторной скорости.

Умножим второе равенство (10.2.4) скалярно на $\vec{r}$, тогда

$\left[\vec{r}\times\vec{V}\right]\cdot\vec{r}=\chi^2\vec{c}\cdot\vec{r}=0$, или

$$\vec{c}\cdot\vec{r}=0\,, \qquad (10.2.6)$$

или в скалярной форме

$$c_x x+c_y y+c_z z=0\,. \qquad (10.2.7)$$

Равенство (10.2.7) говорит о том, что движение происходит в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{c}$.

Интеграл энергии

Умножая почленно уравнения (10.2.2) на $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$, получим равенство

$$\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}+\ddot{z}\dot{z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi^2}{r}\right)\dot{x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\chi^2}{r}\right)\dot{y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\chi^2}{r}\right)\dot{z}\,,$$

которое можно переписать как

$$\frac{d}{dt}(\dot{x})\dot{x}+\frac{d}{dt}(\dot{y})\dot{y}+\frac{d}{dt}(\dot{z})\dot{z}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi^2}{r}\right)_x+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi^2}{r}\right)_y+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi^2}{r}\right)_z.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2\chi^2 r^{-1}+\chi^2 h\,. \qquad (10.2.8)$$

Входящая в это равенство постоянная h носит название *постоянной энергии.*

Равенство (10.2.8) можно переписать в виде

$$V^2=\chi^2\left(2r^{-1}+h\right), \qquad (10.2.9)$$

говорящем о том, что постоянная энергии не зависит ни от выбора системы координат, ни от направления скорости.

Так как скорость является действительной величиной, то при $h<0$ движущаяся материальная точка не может выйти из сферы

$$r = -2h^{-1}, \qquad (10.2.10)$$

во всех точках которой скорость равна нулю. Эту сферу будем называть *поверхностью нулевой скорости.*

§10.3. Движение в плоскости орбиты

Нам известно, что в соответствии с равенством

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0 \qquad (10.2.7)$$

движение происходит в неизменной плоскости. Положение плоскости и секторная скорость движения в ней определяются постоянными интегрирования c_x, c_y, c_z.

Положение плоскости орбиты в астрономии принято определять не коэффициентами её уравнения, а двумя углами, имеющими непосредственное геометрическое значение.

Пусть прямая NSN', называемая линией узлов (см. рис.24), есть линия пересечения плоскости орбиты с координатной плоскостью Sxy. Полупрямая SN, которую точка M пересекает, переходя из области $z < 0$ в область $z > 0$, называется положительным направлением линии узлов. Угол между осью Sx и SN, отсчитываемый от оси Sx против часовой стрелки, называется долготой восходящего узла и обозначается Ω ($0^0 < \Omega < 360^0$).

Будем считать положительной нормалью $S\zeta$ к плоскости орбиты ту нормаль, относительно которой движение точки M по орбите осуществляется против часовой стрелки. Угол i между плоскостью орбиты и плоскостью Sxy *называется наклоном орбиты* и равен углу меж-

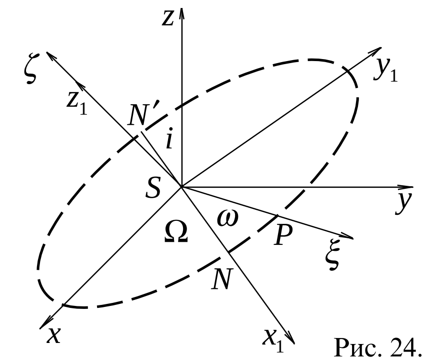

Рис. 24.

ду $S\zeta$ и SN. Углу наклона орбиты $0^0 < i < 90^0$ соответствует прямое движение, а углу $90^0 < i < 180_0$ - обратное.

Учитывая, что движение плоское, есть смысл перейти от координатной системы $Sxyz$ к координатной системе $Sx_1y_1z_1$, в которой за основную плоскость принята плоскость траектории.

Переход к системе координат $Sx_1y_1z_1$ выполним в два этапа. Сначала перейдём от системы координат $Sxyz$ к системе координат Sx_1y^0z, получающейся из $Sxyz$ путём поворота около оси Sz на угол Ω.

Формулы перехода

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\Omega - y^0 \sin\Omega, \\ y &= x_1 \sin\Omega + y^0 \cos\Omega, \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.1)$$

запишем в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ y^0 \\ z \end{Vmatrix}. \qquad (10.3.2)$$

Переход от промежуточной системы координат Sx_1y^0z к системе координат $Sx_1y_1z_1$ осуществим путём поворота около оси Sx_1 на угол i. Это преобразование отвечает следующим формулам

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y^0 \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}. \qquad (10.3.3)$$

Подставляя в (10.3.2) значения x_1, y^0z из (10.3.3), получим выражение для перехода от системы координат $Sxyz$ к системе координат $Sx_1y_1z_1$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} cos\,\Omega & -sin\,\Omega & 0 \\ sin\,\Omega & cos\,\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,i & -sin\,i \\ 0 & sin\,i & cos\,i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}, \qquad (10.3.4)$$

или после перемножения матриц,

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\cos i \sin\Omega & \sin i \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i \cos\Omega & -\sin i \cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}. \qquad (10.3.5)$$

Теперь мы можем установить зависимость постоянных интегрирования c_x, c_y, c_z от углов Ω и i. Отложим по нормали $S\zeta$ отрезок SC, равный

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} \qquad (10.3.6)$$

равный модулю вектора $\vec{c}$. Координаты точки C в старой системе координат равны c_x, c_y, c_z, а в новой системе координат – $0{,}0{,}c$. Из формулы (10.3.5) можем сразу получить, что

$$\left.\begin{aligned} c_x &= c\,sin\,i\,sin\,\Omega, \\ c_y &= -c\,sin\,i\,cos\,\Omega, \\ c_z &= c\,cos\,i. \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.7)$$

Приняв теперь за постоянные интегрирования c, Ω, i, выразим интегралы площадей (10.2.5) в виде:

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= \chi c \sin i \sin\Omega, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= -\chi c \sin i \cos\Omega, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= \chi c \cos i. \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.8)$$

В системе координат $Sx_1y_1z_1$ $z_1 = 0$ и система уравнений (10.3.8) примет вид

$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = \chi c\,. \qquad (10.3.9)$$

Введём полярные координаты точки M : радиус-вектор $r = SM$ и полярный угол (*аргумент широты*) u , образуемый радиус-вектором с осью Sx_1 . Координаты материальной точки M будут

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\cos u, \\ y_1 &= r\sin u, \\ z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.10)$$

С учётом (10.3.5) можем написать

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i), \\ y &= r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i), \\ z &= r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.11)$$

Таким образом, изучение движения материальной точки M сводится к нахождению зависимости r и u как функции времени t .

§10.4. Траектория движения

Для решения задачи о выражении r и u как функции времени t воспользуемся интегралом площадей (10.3.9) и интегралом энергии (10.2.9)

$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = \chi c\,, \qquad (10.3.9)$$

$$V^2 = \chi^2\left(2r^{-1} + h\right). \tag{10.2.9}$$

Используя (10.3.10), выразим эти интегралы в полярных координатах

$$r^2 \frac{du}{dt} = \chi c\,, \tag{10.4.1}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\chi^2 r^{-1} + \chi^2 h\,. \tag{10.4.2}$$

Полагая $c \neq 0$, перепишем (10.4.1) в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\chi c}{r^2}; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = \frac{\chi c}{r^2}\frac{dr}{du}\,, \tag{10.4.3}$$

используя которое исключим время из (10.4.2)

$$\frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = h + \frac{2}{r} - \frac{c^2}{r^2}\,,$$

или

$$\left[\frac{d}{du}\left(\frac{c}{r}\right)^2\right] = h + \frac{1}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c}\right)^2,$$

или

$$\left[\frac{d}{du}\left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c}\right)\right]^2 = A^2 - \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c}\right)^2, \tag{10.4.4}$$

где $A^2 = h + c^{-2}$.

Интегрируя (10.4.4), получим

$$\frac{c}{r} - \frac{1}{c} = A\cos(u - \omega), \tag{10.4.5}$$

где ω - постоянная интегрирования.

Выразим из (10.4.5) r

$$r = \frac{c^2}{1 + Ac\cos(u - \omega)}. \tag{10.4.6}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением конического сечения (4.14) (см. приложение IV)

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{10.4.7}$$

где p - параметр, e - эксцентриситет, v - истинная аномалия, получим

$$p = c^2, \quad e = Ac = \sqrt{1 + hc^2}, \tag{10.4.8}$$

$$v = u - \omega. \tag{10.4.9}$$

Учитывая, что $p = a\left(1 - e^2\right)$, можем написать

$$c = \sqrt{p}, \quad h = -a^{-1}. \tag{10.4.10}$$

Равенство (10.4.9) говорит о том, что новая постоянная интегрирования ω есть значение полярного угла u, соответствующее значению $v = 0$, то есть перицентру. Эту постоянную будем называть *аргументом перицентра* (для планет и комет – *аргументом перигелия*).

Вид конического сечения, описываемого материальной точкой M, определяется знаком постоянной энергии. Если $h < 0$, то $e < 1$, и движение происходит по эллипсу; если $h = 0$, то $e = 1$, движение происходит по параболе; если $h > 0$, то $e > 1$ и движение происходит по гиперболе.

Интеграл энергии (10.2.9) примет теперь вид

$$V^2 = \chi^2\left(2r^{-1} - a^{-1}\right), \tag{10.4.11}$$

из которого следует, что абсолютная величина скорости в каждой точке орбиты зависит только от большой полуоси и радиус-вектора этой точки. Верно и обратное, абсолютная величина скорости на данном расстоянии от центрального тела, при фиксированном χ, определяет величину большой полуоси. Для $h < 0$ при одной и той же величине скорости V точка М (рис. **) будет описывать различные эллипсы в зависимости от направления скорости. Большие же полуоси всех этих эллипсов будут равны одной и той же величине a, определяемой соотношением (10.4.11). Каково бы ни было направление начальной скорости, движущаяся точка не выйдет за пределы окружности $SA = 2a$.

Если в уравнении (10.4.11) положить $a = \infty$, что соответствует движению по параболе, то получим скорость

$$V_p = \chi\sqrt{\frac{2}{r}}, \qquad (10.4.12)$$

которая называется параболической.

Для эллипсов мало отличающихся от окружностей (при $r = a$), из (10.4.11) получим

$$V = \chi\sqrt{\frac{1}{r}}. \qquad (10.4.13)$$

Рассмотрим теперь случай $c = 0$. В таком случае уравнение (10.4.1) показывает, что движение происходит по прямой $u = \omega + 180^0$, где $\omega = const$, проходящей через точку S. Для координат точки M в системе $Sx_1y_1z_1$ можем записать

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -r\cos\omega, \\ y_1 &= -r\sin\omega, \\ z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.4.14)$$

Радиус-вектор r находится из уравнения

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \chi^2\left(2r^{-1} + h\right), \qquad (10.4.15)$$

решение которого мы рассмотрим позже.

§10.5. Движение по эллипсу

Для завершения изучения движения в задаче двух тел решим совместно уравнение траектории (10.4.7)

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} = \frac{a\left(1 + e^2\right)}{1 + e\cos v} \tag{10.4.7}$$

и уравнение

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \chi\sqrt{a\left(1 - e^2\right)}, \tag{10.5.1}$$

выражающее интеграл площадей.

Если движение происходит по эллипсу, то есть когда $e < 1, a > 0$, мы можем ввести в качестве вспомогательной переменной эксцентрическую аномалию E (см. приложение IV п.4).

$$r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E, \tag{10.5.2}$$

$$r\cos v = a\left(\cos E - e\right), \tag{10.5.3}$$

$$r = a\left(1 - e\cos E\right). \tag{10.5.4}$$

Дифференцируя (10.5.2) и (10.5.3), получим

$$rdv = a\sqrt{1 - e^2}\,dE. \tag{10.5.5}$$

Подставляя (10.5.4) и (10.5.5) в (10.5.1), получим

$$\left(1 - e\cos E\right)dE = \chi a^{-\frac{3}{2}}dt. \tag{10.5.6}$$

Интегрируя (10.5.6), найдём уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = \chi a^{-\frac{3}{2}}\left(t - T\right), \tag{10.5.7}$$

где T - постоянная интегрирования,

$$n = \chi a^{-\frac{3}{2}} = k\sqrt{m_0 + m}\,a^{-\frac{3}{2}} \tag{10.5.8}$$

называется *средним движением*, а

$$M = n(t - T) \text{ -} \qquad (10.5.9)$$

средней аномалией.

При изучении движения планет вместо постоянной интегрирования T, представляющей собой момент прохождения планеты через перигелий, удобнее пользоваться некоторым определённым моментом времени t_0, для которого справедливы соотношения

$$M = n(t - t_0) + M_0, \qquad (10.5.10)$$

где

$$M_0 = n(t_0 - T) \qquad (10.5.11)$$

есть *средняя аномалия эпохи* t_0.

Вычисление средней аномалии M по формуле (10.5.10) удобнее при малых эксцентриситетах, так как M_0 сохраняет смысл и при $e = 0$, когда T становится неопределённым.

При возрастании E от $-\infty$ до $+\infty$ функция $E - e\sin E$, производная которой всегда положительна, монотонно возрастает в тех же границах и уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = M \qquad (10.5.12)$$

при любом M имеет одно и только одно вещественное решение.

После определения с помощью (10.5.12) E, соответствующего заданному моменту времени t, по формулам (10.5.2)-(10.5.4) можно найти r и v, а следовательно, и $u = v + \omega$. С помощью формул (10.3.11) определим координаты x, y, z.

Таким образом, координаты движущегося тела будут выражены через время t и шесть постоянных интегрирования $a, e, M_0, \Omega, i, \omega$, *которые могут быть измерены с помощью астрономических наблюдений.*

§10.6. Движение по гиперболе

Движение по гиперболе отличается от эллиптического движения тем, что в уравнениях (10.4.7) и (10.5.1) надо положить $e > 1$ и $a < 0$. Уравнения (10.5.2) и (10.5.3), выражающие r и v через E, применимы и для гиперболического движения, поскольку они тождественно удовлетворяют уравнению орбиты (10.4.7) при всех значениях a и e. При этом надо помнить, что для $e > 1$ и $a < 0$ формулы (10.5.2) и (10.5.3) дают для $\sin E$ мнимое значение, а $\cos E$ остаётся величиной вещественной. Введём величину

$$H = iE, \tag{10.6.1}$$

имеющую для гиперболического движения вещественные значения.

Тогда

$$i \sin E = \mathrm{sh} H, \qquad \cos E = \mathrm{ch} H. \tag{10.6.2}$$

Соотношения (10.5.2), (10.5.3) и (10.5.4) примут вид

$$r \sin v = |a| \sqrt{e^2 - 1}\, \mathrm{sh} H, \tag{10.6.3}$$

$$r \cos v = |a| (e - \mathrm{ch} H), \tag{10.6.4}$$

и

$$r = |a| (e\, \mathrm{ch} H - 1). \tag{10.6.5}$$

Уравнение Кеплера примет вид

$$e\, \mathrm{sh} H - H = \chi |a|^{-\frac{3}{2}} (t - T). \tag{10.6.6}$$

При изменении H от $-\infty$ до $+\infty$ стоящая слева функция $e\, \mathrm{sh} H - H$ монотонно изменяется в тех же границах, поскольку её производная всегда положительна. Таким образом, каждому значению t соответствует одно и только одно вещественное решение уравнения (10.6.6).

§10.6. Движение по параболе

Полагая $e = 1$, получим движение по параболе и уравнение траектории примет вид

$$r = \frac{p}{1 + cos\, v}. \tag{10.7.1}$$

Положим

$$q = \frac{1}{2} p, \tag{10.7.2}$$

преобразуем уравнение траектории к виду

$$r = q\, sec^2 \frac{v}{2}. \tag{10.7.3}$$

Из последнее равенства видно, что параболическая траектория характеризуется одним элементом q, который называется *перигельным расстоянием*, так как при $v = 0$ $r = q$.

Подставляя выражение (10.7.3) в интеграл площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \chi\sqrt{2q},$$

получим

$$sec^4 \frac{v}{2} dv = \sqrt{2}\chi q^{-\frac{3}{2}} dt. \tag{10.7.4}$$

Запишем полученное равенство в виде

$$\left(1 + tg^2 \frac{v}{2}\right) d\left(tg \frac{v}{2}\right) = \frac{\chi dt}{\sqrt{2} q^{\frac{3}{2}}}. \tag{10.7.5}$$

Полагая

$$tg \frac{v}{2} = \sigma, \tag{10.7.6}$$

получим

$$\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = \frac{\chi}{\sqrt{2}} B, \tag{10.7.7}$$

где

$$B = q^{-\frac{3}{2}}\left(t - T\right) \tag{10.7.8}$$

называется *параболическим аргументом*.

При изменении v от -180^0 до $+180^0$ левая часть уравнения (10.7.7) монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ и для каждого значения времени t мы будем иметь только одно вещественное значение v.