Глава XI
Теория колебаний

В этой главе мы рассмотрим вопросы, связанные с малыми колебаниями механической системы около положения равновесия, представляющие собой выдающийся результат применения уравнений Лагранжа (см. главу III).

§11.1. Малые колебания консервативных систем около положения равновесия

Рассмотрим консервативную систему материальных точек с функцией кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\dot{q}_r\dot{q}_i \qquad (11.1.1)$$

и функцией потенциальной энергии

$$V = V(q_1, q_2, ..., q_n). \qquad (11.1.2)$$

Выберем начало отсчёта координат таким образом, чтобы положению равновесия соответствовали значения координат $q_1 = 0$, $q_2 = 0, \ldots, q_n = 0$. Без потери общности мы можем положить, что в начале координат $V(0,0,...,0) = 0$. Отметим также, что из условия минимума потенциальной энергии в положении равновесия (условие экстремума функции), вытекает

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = ... = \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0. \qquad (11.1.3)$$

Разложим функцию (11.1.2) в окрестности начала координат в ряд Тейлора

$$V = V(0,0,...,0) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)_0 q_j + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_i}\right)_0 q_r q_i + ...,$$

с учётом вышесказанного, пренебрегая членами третьего и более высоких порядков малости, мы можем записать

$$V = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ri} q_r q_i \,, \qquad (11.1.4)$$

где $b_{ri} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_i}\right)_0 = const$.

Так как $b_{ri} = const$, (11.1.4) есть определённо-положительная, однородная квадратичная форма обобщённых координат.

Коэффициенты $b_{ri} = b_{ir}$ назовём *коэффициентами упругости*. Обобщённые силы, отнесённые к соответствующим обобщённым координатам, будут иметь вид

$$-Q_r = \frac{\partial V}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^{n} b_{ri} q_i \,, \qquad (r = 1,2,...,n), \qquad (11.1.5)$$

где Q_r - восстанавливающие силы, обусловленные отклонениями механической системы от положения равновесия.

Будем считать, что наложенные на систему материальных точек связи не зависят явно от времени. Кинетическая энергия, заданная равенством (11.1.1) будет представлять собой однородную квадратичную функцию от обобщённых скоростей, а коэффициенты a_{ri} будем считать функциями обобщённых координат. Полагая обобщённые скорости малыми первого порядка, разложим a_{ri} в ряд Тейлора в окрестности точки $q_1 = 0$, $q_2 = 0$,..., $q_n = 0$, в результате чего получим:

$$a_{ri} = a_{ri}(0,0,...,o) + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial q_s}\right)_0 q_s + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 a_{ri}}{\partial q_s \partial q_l}\right)_0 + \dots .$$

Подставляя полученное разложение в (11.1.1) и ограничиваясь членами второго порядка малости, получим приближенное выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ri}(0,0,...,0)\dot{q}_r \dot{q}_i . \qquad (11.1.6)$$

Постоянные коэффициенты $a_{ri}(0,0,...,0) = m_{ri}$ будем называть *коэффициентами инерции системы.* Окончательно (11.1.1) можно записать так:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ri}\dot{q}_r \dot{q}_i . \qquad (11.1.7)$$

Рассмотрим интеграл энергии

$$T + V = conct = C . \qquad (11.1.8)$$

Если система начинает движение в непосредственной близости от положения равновесия с малой начальной скоростью, постоянная C будет мала. *Малыми во всё время движения* будут также обобщённые координаты q и обобщённые скорости $\dot{q}$, а положение равновесия будет устойчивым. Покажем это. Поскольку $T \geq 0$, движение происходит в области

$$V \leq C . \qquad (11.1.9)$$

Это говорит о том, что значения $q_1, q_2, ..., q_n$ остаются малыми (в силу малости C) во всё время движения. Поскольку во время движения $V \geq 0$, справедливым будет и неравенство

$$T \leq C , \qquad (11.1.10)$$

и, следовательно, величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ также будут малыми. Таким образом, достаточно хорошее приближение к действительному движению мы сможем получить, сохранив в уравнениях движения слагаемые первого порядка относительно $q, \dot{q}$ и $\ddot{q}$. В этом и заключается суть *линейного приближения*, которое будет тем точнее, чем меньше будет значение постоянной C из (11.1.8).

Учитывая независимость кинетической энергии от обобщённых координат, $\frac{\partial T}{\partial q_r} = 0$, запишем уравнение Лагранжа для малых колебаний

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_r}, \; (r = 1,2,...,n). \tag{11.1.11}$$

С помощью (11.1.7) выразим $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}$:

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^{n} m_{ri}\dot{q}_i, \quad (r = 1,2,...,n). \tag{11.1.12}$$

Аналогично из (11.1.4) получим

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^{n} b_{ri} q_i, \quad (r = 1,2,...,n). \tag{11.1.13}$$

Равенства (11.1.11) теперь запишутся так:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ri}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ri} q_i = 0, \quad (r = 1,2,...,n). \tag{11.1.14}$$

Обозначим матрицу (m_{ri}) через $\mathbf{M}$, матрицу (b_{ri}) - через $\mathbf{B}$, вектор (матрицу-столбец) $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ - через $\mathbf{q}$, тогда уравнения (11.1.14) можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \tag{11.1.15}$$

Если хотя бы одна из квадратичных форм (в данном случае кинетическая энергия (11.1.7)) определённо-положительная, формы (11.1.4) и (11.1.7) с помощью действительного неособенного линейного преобразования можно одновременно привести к суммам квадратов с положительными коэффициентами[1], при этом можно найти такие новые координаты $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, связанные с $q_1,q_2,\ldots,q_n$ линейными соотношениями, для которых мы можем записать

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\left(\lambda_1\dot\xi_1^2+\lambda_2\dot\xi_2^2+\ldots+\lambda_n\dot\xi_n^2\right),\\ V&=\frac{1}{2}\left(\lambda_1 p_1^2\xi_1^2+\lambda_2 p_2^2\xi_2^2+\ldots+\lambda_n p_n^2\xi_n^2\right).\end{aligned}\right\} \tag{11.1.16}$$

Коэффициенты λ_r и p_r вещественные положительные постоянные. Подставляя (11.1.16) в уравнение Лагранжа, мы увидим, что система уравнений (11.1.15) распадётся на n полностью независимых уравнений:

$$\ddot\xi_r+p_r^2\xi_r=0, \qquad (r=1,2,\ldots,n). \tag{11.1.17}$$

Если в момент времени $t=0$ положить $\xi_r=\alpha_r$, а $\dot\xi_r=\beta_r$, то решением (11.1.17) будет

$$\xi_r=\alpha_r\cos p_r t+\frac{\beta_r}{p_r}\sin p_r t, \quad (r=1,2,\ldots,n). \tag{11.1.18}$$

Координаты $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ называются главными или *нормальными координатами* колебательной системы; колебание, при котором изменяется лишь одна главная координата, а остальные всё время равны нулю, называется *главным колебанием*. В таком случае говорят, что в главном колебании соответствующая главная координата *возбуждена*, а остальные координаты находятся в *покое*. Как видно из формул (11.1.17), в r-ом главном колебании координата ξ_r изменяется по гармоническому закону с периодом $\frac{2\pi}{p_r}$. Всего имеется n таких периодов,

[1] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия - М.: Наука, 1970. С.357.

не обязательно различных; их называют *собственными периодами* или *периодами свободных колебаний* системы. Периоды свободных колебаний являются *инвариантами* системы и не зависят от лагранжевых координат, выбранных первоначально для описания системы. Главное колебание с наибольшим периодом, а значит, с наименьшей частотой, то есть колебание с наименьшим p_r, называется *основным колебанием*. В силу того, что $\mathbf{q}$ зависит от $\boldsymbol{\xi}$ линейно, любое колебание может быть представлено как *суперпозиция главных колебаний*.

Пусть в главном колебании, для определённости в первом главном колебании, координаты $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 0$, то можно показать, что отношения $q_1 : q_2 : q_3 : \ldots : q_n$ постоянны.

Пусть $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\xi}$ связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= m_{11}\xi_1 + m_{12}\xi_2 + \ldots + m_{1n}\xi_n, \\ q_2 &= m_{21}\xi_1 + m_{22}\xi_2 + \ldots + m_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= m_{n1}\xi_1 + m_{n2}\xi_2 + \ldots + m_{nn}\xi_n, \end{aligned}\right\} \tag{11.1.19}$$

тогда в первом главном колебании

$$\frac{q_1}{m_{11}} = \frac{q_2}{m_{21}} = \ldots = \frac{q_n}{m_{n1}} \tag{11.1.20}$$

и каждая координата q_r изменяется по гармоническому закону с периодом $\dfrac{2\pi}{p_1}$:

$$\frac{\ddot{q}_1}{q_1} = \frac{\ddot{q}_2}{q_2} = \ldots = \frac{\ddot{q}_n}{q_n} = -p_1^2. \tag{11.1.21}$$

Преобразование (11.1.19) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{q} = \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}, \tag{11.1.22}$$

где $\mathbf{q}$ - вектор (матрица-столбец) $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$, ξ - вектор (матрица-столбец) $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, а $\mathbf{M}$ - квадратная матрица (m_{ri}).

§11.2. Наложение связи

Налагая на колебательную систему с n степенями свободы одну связь мы получим новую колебательную систему с $n-1$ степенями свободы. При этом система будет обладать следующим свойством: *значения $n-1$ периодов свободных колебаний этой системы будут заключены между последовательными значениями периодов свободных колебаний первоначальной системы.* Основная частота системы при наложении связи увеличится.

Рассмотрим исходную систему в главных координатах, тогда

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + ... + \dot{q}_n^2\right), \\ V &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2 + ... + p_n^2 q_n^2\right). \end{aligned}\right\} \qquad (11.2.1)$$

Пусть все периоды различны и $p_1^2 < p_2^2 < ... < p_{n-1}^2 < p_n^2$.

Уравнение связи представим в виде

$$A_1 q_1 + A_2 q_2 + ... + A_n q_n = 0 . \qquad (11.2.2)$$

Уравнения движения для несвободной системы будут иметь вид

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r = \lambda A_r , \quad (r = 1,2,...,n), \qquad (11.2.3)$$

где λ - неопределённый множитель. Уравнением связи будет уравнение (11.2.2). Для главного колебания несвободной системы с периодом $\frac{2\pi}{p}$ запишем

$$\frac{\ddot{q}_1}{q_1} = \frac{\ddot{q}_2}{q_2} = ... = \frac{\ddot{q}_n}{q_n} = -p^2 , \qquad (11.2.4)$$

откуда, с учётом (11.2.3) получим

$$\left(-p^2+p_r^2\right)q_r=\lambda A_r. \qquad (11.2.5)$$

Учитывая уравнение связи (11.2.2) получим уравнение периодов

$$\frac{A_1^2}{p^2-p_1^2}+\frac{A_2^2}{p^2-p_2^2}+\ldots+\frac{A_n^2}{p^2-p_n^2}=0. \qquad (11.2.6)$$

Если ни один из коэффициентов A_r не обращается в нуль и исходная система не имеет одинаковых периодов, то один из корней p^2 лежит между p_1^2 и p_2^2, один – между p_2^2 и p_3^2 и так далее.

Если один из коэффициентов A_r равен нулю, то соответствующая координата остаётся главной в период главного колебания не изменяется. Если два периода исходной системы одинаковы, то их общее значение является одновременно и периодом несвободной системы.

§11.3. Принцип Релея

Если на колебательную систему с n степенями свободы наложить $n-1$ связь, то получим систему с одной степенью свободы. Физически это означает, что мы задали форму колебаний системы.

Определим период колебания такой системы.

Введём главные координаты (см. (11.2.1)) для исходной системы, такие, что

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\left(\dot q_1^2+\dot q_2^2+\ldots+\dot q_n^2\right),\\ V&=\frac{1}{2}\left(p_1^2q_1^2+p_2^2q_2^2+\ldots+p_n^2q_n^2\right).\end{aligned}\right\} \qquad (11.3.1)$$

Уравнения связи представим в виде

$$\frac{q_1}{\alpha_1}=\frac{q_2}{\alpha_2}=\ldots=\frac{q_n}{\alpha_n}. \qquad (11.3.2)$$

Пусть общая величина отношений (11.3.2) есть θ, которую мы примем в качестве единственной обобщённой (лагранжевой) координаты несвободной системы. Учитывая (11.3.2) перепишем (11.3.1) в виде:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2\right)\dot{\theta}^2, \\ V &= \frac{1}{2}\left(p_1^2\alpha_1^2 + p_2^2\alpha_2^2 + \ldots + p_n^2\alpha_n^2\right)\theta^2. \end{aligned}\right\} \tag{11.3.3}$$

Период колебаний несвободной системы будет равен $\frac{2\pi}{p}$, где

$$p^2 = \frac{\alpha_1^2 p_1^2 + \alpha_2^2 p_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}. \tag{11.3.4}$$

Если правую часть (11.3.4) мы будем рассматривать как функцию от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то нетрудно убедиться, что эта функция приобретает стационарное значение, если все α, кроме одной, равны нулю. Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему составляющую содержание принципа Релея:

Период колебаний несвободной системы, рассматриваемый как функция от связей, имеет стационарное значение, если исходная система вынуждена совершать одно из своих главных колебаний.

Задача №30.

Невесомая струна длиной $4a$ натянута силой F меду двумя фиксированными точками. На струне закреплены точечные массы m, $\frac{4}{3}m$, m на равных расстояниях друг от друга и от концов струны (рис. 25). Система совершает поперечные колебания в своей плоскости. Найти движение системы.

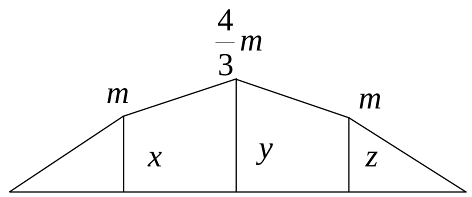

Рис. 25

Запишем условие задачи кратко.

Найти	Уравнения движения
Дано	$4a$, F, m, $\frac{4}{3}m$

Решение задачи.

Удлинение первого участка струны с точностью до величины второго порядка относительно x есть $\dfrac{x^2}{2a}$, второго - $\dfrac{(x-y)^2}{2a}$, третьего - $\dfrac{(y-z)^2}{2a}$, четвёртого - $\dfrac{z^2}{2a}$.

Выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$V = \frac{F}{2a}\left\{x^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2\right\} =$$

$$= 2mn^2\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz\right), \qquad (11.3.5)$$

где $n^2 = \dfrac{F}{2ma}$.

Кинетическая энергия системы определяется равенством

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{4}{3}\dot{y}^2 + \dot{z}^2\right). \qquad (11.3.6)$$

Составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)+\frac{\partial V}{\partial q}=0, \tag{11.3.7}$$

где q принимает последовательно значения x, y, z, в результате получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}+2n^2(2x-y)=0,\\ &\frac{4}{3}\ddot{y}+2n^2(-x+2y-z)=0,\\ &\ddot{z}+2n^2(2z-y)=0. \end{aligned}\right\} \tag{11.3.8}$$

Для главного колебания с периодом $\frac{2\pi}{p}$ получим

$$\frac{\ddot{x}}{x}=\frac{\ddot{y}}{y}=\frac{\ddot{z}}{z}=-p^2. \tag{11.3.9}$$

Подставляя $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ в уравнения движения (11.3.8), получим

$$\left.\begin{aligned} &(p^2-4n^2)x+2n^2y=0,\\ &2n^2x+\left(\frac{4}{3}p^2-4n^2\right)y+2n^2z=0,\\ &2n^2y+(p^2-4n^2)z=0. \end{aligned}\right\} \tag{11.3.10}$$

Система уравнений (11.3.10) будет иметь решение если

$$\begin{vmatrix} p^2-4n^2 & 2n^2 & 0\\ 2n^2 & \frac{4}{3}p^2-4n^2 & 2n^2\\ 0 & 2n^2 & p^2-4n^2 \end{vmatrix}=0. \tag{11.3.11}$$

Решением (11.3.11) будут три положительных значения p^2 :

$$p_1^2 = n^2, \quad p_2^2 = 4n^2, \quad p_3^2 = 6n^2. \qquad (11.3.12)$$

Для первого (главного колебания) $p^2 = n^2$ система уравнений (11.3.10) запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} -3x + 2y \qquad &= 0, \\ 3x - 4y + 3z &= 0, \\ 2y - 3z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.3.13)$$

Из (11.3.13) для первого главного колебания, получим

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}. \qquad (11.3.14)$$

Поступая аналогичным образом, для второго главного колебания $p^2 = 4n^2$, получим

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}, \qquad (11.3.15)$$

для третьего главного колебания $p^2 = 6n^2$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}. \qquad (11.3.16)$$

Формы всех трёх главных колебаний представлены на рис. 26.

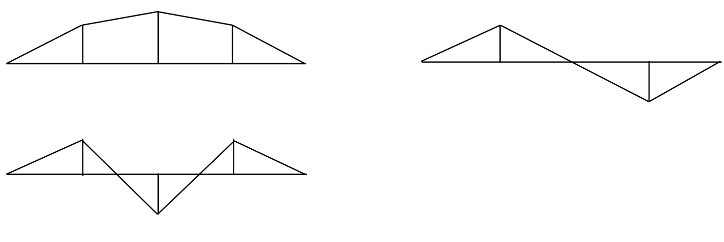

Рис. 26.

Преобразование к главным координатам ξ, η, ζ, с учётом (11.3.14), (11.3.15) и (11.3.16) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\xi + \eta + \zeta, \\ y &= 3\xi + 0\eta - \zeta, \\ z &= 2\xi - \eta + \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{11.3.17}$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{10}(x + 2y + z), \\ \eta &= \frac{1}{2}(x - z), \\ \zeta &= \frac{1}{10}(3x - 4y + 3z). \end{aligned}\right\} \tag{11.3.18}$$

Равенства (11.3.5) и (11.3.6), выраженные через ξ, η, ζ примут вид суммы квадратов:

$$T = \frac{1}{2} m \left(20\dot{\xi}^2 + 2\dot{\eta}^2 + \frac{10}{3}\dot{\zeta}^2 \right), \tag{11.3.19}$$

$$V = \frac{1}{2} m n^2 \left(20\xi^2 + 8\eta^2 + 20\zeta^2 \right). \tag{11.3.20}$$

Уравнения Лагранжа (11.3.7) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} + n^2\xi &= 0, \\ \ddot{\eta} + 4n^2\eta &= 0, \\ \ddot{\zeta} + 6n^2\zeta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11.3.21}$$

Решение уравнений вида (11.3.21) приведено в задаче №**.

Предположим, что в начальный момент времени система находится в покое в положении равновесия и движение вызывается малым поперечным импульсом величиной mu, приложенным к первой частице. В начальный момент времени мы будем иметь

$$x = y = z = 0;\ \dot{x} = u,\ \dot{y} = \dot{z} = 0. \qquad (11.3.22)$$

$$\xi = \eta = \zeta = 0;\ \dot{\xi} = \frac{1}{10}u,\ \dot{\eta} = \frac{1}{2}u,\ \dot{\zeta} = \frac{3}{10}u. \qquad (11.3.23)$$

В любой последующий момент времени будет

$$\xi = \frac{u}{10p_1}\sin p_1 t,\ \eta = \frac{5u}{10p_2}\sin p_2 t,\ \zeta = \frac{3u}{10p_3}\sin p_3 t \qquad 11.3.24)$$

Подставляя полученные значения ξ, η, ζ в (11.3.17), получим окончательное решение

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{u}{10}\left(\frac{2}{p_1}\sin p_1 t + \frac{5}{p_2}\sin p_2 t + \frac{3}{p_3}\sin p_3 t\right), \\ y &= \frac{3u}{10}\left(\frac{1}{p_1}\sin p_1 t - \frac{1}{p_3}\sin p_3 t\right), \\ z &= \frac{u}{10}\left(\frac{2}{p_1}\sin p_1 t - \frac{5}{p_2}\sin p_2 t + \frac{3}{p_3}\sin p_3 t\right), \end{aligned}\right\} \qquad (11.3.25)$$

где

$$\frac{p_1^2}{1} = \frac{p_2^2}{4} = \frac{p_3^2}{6} = n^2 = \frac{F}{2ma}. \qquad (11.3.26)$$

Дополнение.

Определим значения p_1^2, p_2^2, p_3^2, используя принцип Релея.

Воспользуемся равенствами (11.3.5) и (11.3.6)

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{4}{3}\dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \tag{11.3.5}$$

$$V = 2mn^2\left(x^2 + y^2 + z^2 - xu - yz\right). \tag{11.3.6}$$

Ели систему заставить совершать такие колебания, для которых в соответствии с (11.3.2)

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \tag{11.3.27}$$

период их будет равен $\frac{2\pi}{p}$, где в соответствии с (11.3.4)

$$p^2 = \frac{4n^2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma\right)}{\alpha^2 + \frac{4}{3}\beta^2 + \gamma^2}. \tag{11.3.28}$$

Главное колебание, для которого $x + z = y = 0$; полагая $\alpha = -\gamma$, $\beta = 0$, найдём

$$p^2 = p_2^2 = 4n^2. \tag{11.3.29}$$

Главное колебание, для которого $x = z$; получим, полагая $\alpha = \gamma$:

$$\frac{p^2}{6n^2} = \frac{2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{3\alpha^2 + 2\beta^2} = \frac{(3\alpha - 2\beta)^2 + (\alpha + \beta)^2}{(3\alpha - 2\beta)^2 + 6(\alpha + \beta)^2}. \tag{11.3.30}$$

Выражение (11.3.30) будет стационарным при $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$ и $\frac{\alpha}{\beta} = -1$.

Соответствующие значения p^2 будут равны

$$p_1^2 = n^2, \quad p_3^2 = 6n^2. \tag{11.3.31}$$