Глава XII
Теория удара

Данная глава посвящена теории удара – очень быстрых (внезапных) изменений движения при воздействии на систему материальных точек так называемых ударных импульсов. При изучении теории удара будем использовать вторую форму основного уравнения, которая, как мы увидим далее, наилучшим образом приспособлена к описанию изучаемых движений.

§ 12.1. Ударный импульс

Под ударными импульсами (ниже будет дано дополнительное определение ударного импульса) будем понимать предельный случай действия больших сил в течение коротких промежутков времени. Напишем уравнение движения свободной материальной точки

$$m\ddot{x} = X\ . \tag{12.1.1}$$

Пусть X есть известная функция от времени $X = X(t)$, тогда интегрируя (12.1.1), получим

$$m(u_2 - u_1) = \int_{t_1}^{t_2} X dt\,, \tag{12.1.2}$$

где через u_r обозначено значение $\dot{x}$ в моменты времени $t = t_r$. Мы будем рассматривать случай, когда величина $\tau = t_2 - t_1$ мала, а функция X в промежутке времени $(t_1, t_1 + \tau)$ велика но интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} X dt = P \tag{12.1.3}$$

имеет конечное значение. Величину P будем называть *составляющей импульса*.

Ударный импульс мы определили как предельный случай действия большой силы в течение малого промежутка времени, имея в виду не строгий математический предел при $\tau \to 0$, а малый, но конечный промежуток времени, то есть мы имеем в виду *физически малый*, а *не математически малый* промежуток времени τ. За время от t_1 до $t_1 + \tau$ конфигурация системы материальных точек не измениться, а скорость в момент времени t_1 изменится скачком. Поскольку в данном случае присутствуют лишь ударные силы, координаты будут сохранять постоянные значения, скорости в момент времени $t_1 - 0$ будем считать заданными, а скорости в момент времени $t_1 + 0$ требуется определить. Так как координата x в ходе решения нашей задачи считается неизменной, заменим $\dot{x}$ на u.

Уравнения (12.1.2) и (12.1.3) вместе с соответствующими уравнениями для координат y, z образуют систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} m(u - u_0) &= P, \\ m(v - v_0) &= Q, \\ m(w - w_0) &= R, \end{aligned}\right\} \tag{12.1.4}$$

где $\{P, Q, R\}$ - составляющие ударного импульса, действующего на материальную точку в момент времени t_1, $\{u_0, v_0, w_0\}$ - составляющие скорости материальной точки в момент времени $t_1 - 0$ (то есть непосредственно перед приложением импульса), а $\{u, v, w\}$ - составляющие скорости материальной точки в момент времени $t_1 + 0$ (то есть непосредственно после приложения импульса). Если материальная точка перед приложением импульса покоилась, то уравнения (12.1.4) примут вид

$$mu = P, \quad mv = Q, \quad mw = R. \tag{12.1.5}$$

Обозначим через X' реакцию связи, действующую в течении времени от t_1 до $t_1+\tau$, то интеграл $\int_{t_1}^{t_2} X' dt = P'$ будет иметь конечное значение, которое назовём *ударным импульсом* сил реакции.

Рассмотрим систему материальных точек на которую действуют ударные импульсы. Поскольку координаты материальных точек в течении малого промежутка времени τ не изменяются, постоянными будут и коэффициенты A_{jr} и A_r в уравнениях связи (2.7.2)

$$\sum_{r=1}^{N} A_{jr}\dot{x}_r + A_j = 0\,, \qquad j = 1{,}2,\ldots,k\,, \tag{2.7.2}$$

что существенно упростит решение.

Учитывая, что координаты материальных точек не изменяются, логично воспользоваться второй формой основного уравнения (2.7.5)

$$\sum_{r=1}^{N} (m\ddot{x}_r - X_r)\Delta\dot{x}_r = 0\,. \tag{2.7.5}$$

Конечные вариации скорости Δu удовлетворяют уравнению (2.7.4)

$$\sum_{r=1}^{N} A_{jr}\Delta u_j = 0\,, \qquad j = 1{,}2,\ldots,k\,. \tag{2.7.4}$$

Учитывая постоянство коэффициентов A_{jr}, можно указать системы $\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_N$, удовлетворяющие уравнениям (12.1.2) в течение короткого промежутка времени $(t_1, t_1+\tau)$.

§ 12.2. Импульсивные связи

В уравнениях связи

$$\sum_{r=1}^{N} A_{jr}\dot{x}_r + A_j = 0\,, \qquad j = 1{,}2,\ldots,k\,, \tag{2.7.2}$$

которые мы до сих пор изучали, коэффициенты A_{jr} и A_r, считались функциями класса C_1, то есть непрерывными функциями координат и времени. Очевидно, что для теории удара, требуются другие функции.

Введём связи, описываемые уравнениями

$$\sum_{r=}^{N} E_{jr}\dot{x}_r + E_r = 0, \qquad j = 1,2,\dots,k', \tag{12.2.1}$$

в которых коэффициенты E_{jr} и E_r терпят разрывы в момент времени t_1 и назовём их *импульсивными связями*. Коэффициенты E_{jr} и E_r непрерывны до и после момента времени t_1, а в момент времени t_1 они претерпевают разрыв и мы, таким образом, имеем две системы постоянных значений коэффициентов: значения при $t_1 - 0$ и значения при $t_1 + 0$.

Выделим два типа связи:

1. Связи первого типа. Они описываются уравнениями

$$\sum_{r=1}^{N} E_{jr}\dot{x}_r = 0, \qquad j = 1,2,\dots,k', \tag{12.2.2}$$

накладываются внезапно в момент времени t_1. Коэффициенты E_r в уравнениях (12.2.1) при этом тождественно равны нулю, а коэффициенты E_{jr} равны нулю в момент времени $t_1 - 0$. Наложение связи такого рода фактически уменьшает число степеней свободы системы материальных точек.

Примером связи такого типа может служить движущаяся материальная точка, ударяющаяся в момент времени t_1 о гладкую неупругую неподвижную плоскость $x = x_0$. Связь в этом случае описывается уравнением $\dot{x} = 0$ в момент времени $t_1 + 0$.

2. Связи второго типа. Эти связи определяются уравнениями (1.2.21), в которых коэффициенты E_{jr} непрерывны (фактически постоянны), а все коэффициенты E_r равны нулю в момент времени $t_1 - 0$ и, вообще говоря, отличны от нуля в момент времени $t_1 + 0$, а число степеней свободы системы материальных точек остается неизменным.

Примером такой связи является движение по гладкой плоскости $x = x_0$, которая в момент времени t_1 внезапно приходит в движение со скоростью u в направлении оси Ox. Уравнение связи $\dot{x} = 0$ в момент времени $t_1 - 0$ уступает место уравнению $\dot{x} - u = 0$ в момент времени $t_1 + 0$.

§ 12.3. Основное уравнение теории удара

Рассмотрим промежуток времени от t_1 до $t_1 + \tau$, в течение которого действуют конечные силы. Промежуток времени τ будем считать настолько малым, что коэффициенты в конечных уравнениях связи

$$\sum_{r=1}^{N} A_{jr} u_r + A_r = 0, \ j = 1,2,\ldots,k, \tag{12.3.1}$$

в течение этого промежутка времени можно считать постоянными. Уравнения импульсивных связей можно получить из конечных уравнений

$$\sum_{r=1}^{N} E_{jr} u_r + \theta_r = 0, \ j = 1,2,\ldots,k', \tag{12.3.2}$$

в которых функция времени θ_r изменяется за время от t_1 до $t_1 + \tau$ от значения $-\sum_{r=1}^{N} E_{jr} \left(u_r\right)_{t_1 - 0}$ до нуля в случае связей первого типа и от нуля до $\left(E_r\right)_{t_1 + 0}$ в случае связи второго типа. Вторая форма основного уравнения связи

$$\sum_{r=1}^{N}\left(m\ddot{x}_r - X_r\right)\Delta\dot{x}_r = 0 \qquad (2.7.5)$$

запишется теперь в виде

$$\sum_{r=1}^{N}\left(m\ddot{x}_r - X_r\right)\Delta u_r = 0, \qquad (12.3.3)$$

где $\Delta\vec{u}$ - (конечная) вариация скорости, а её составляющие удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{r=1}^{N} A_{jr}\Delta u_r = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,k, \qquad (12.3.4)$$

$$\sum_{r=1}^{N} E_{jr}\Delta u_r = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,k'. \qquad (12.3.5)$$

Коэффициенты A_{jr} и E_{jr} в этих линейных уравнениях постоянны, так что можно найти вариации $\Delta\vec{u}$, общие для всего интервала времени τ. Выберем любую такую вариацию $\Delta\vec{u}$ и подставим её значения в (12.3.3), интегрируя в пределах от t_1 до $t_1+\tau$, получим *основное уравнение теории удара*

$$\sum_{r=1}^{N}\left\{m_r\left(u_r - u_{r0}\right) - P_r\right\}\Delta u_r = 0, \qquad (12.3.6)$$

где P_r - заданная составляющая импульса $\int_{t_1}^{t_1+\tau} X_r dt$. Величина времени τ считается пренебрежимо малой, u_r, u_{r0} обозначают значение $\dot{x}_r$ в моменты времени $t_1 - 0$ и $t_1 + 0$.

При использовании основного уравнения теории удара (12.3.6) важно знать класс $\Delta\vec{u}$, для которых это уравнение справедливо. Рассмотрим вариации $\Delta\vec{u}$ более подробно для катастатической системы материальных точек, то есть системы, для которой возможные и виртуальные перемещения совпадают (см. Глава I, задача №9).

При *отсутствии импульсивных связей* уравнения (12.3.4), удовлетворяемые вариациями скоростей, совпадают с уравнениями, удовлетворяемыми самими скоростями:

$$\sum_{r=1}^{N} A_{jr} u_r = 0, \qquad j = 1,2,\dots,k. \tag{12.3.7}$$

Полученное уравнение будет идентичным с уравнением (2.7.4), так как нулевая скорость принадлежит к классу возможных скоростей и в основном уравнении (12.3.6) вместо $\Delta\vec{u}$ можно подставить любой допустимый вектор скорости $\vec{U} = \vec{U}\left(U_1, U_2, \dots, U_N\right)$. Основное уравнение примет следующий вид:

$$\sum_{r=1}^{N} m_r \left(u_r - u_{r0}\right) U_r = \sum_{r=1}^{N} P_r U_r. \tag{12.3.8}$$

Рассмотрим катастатическую систему материальных точек, на которую наложена *связь первого типа*. Уравнения, справедливые для $\Delta\vec{u}$, будут совпадать с уравнениями для скоростей $\vec{U}$, которые допустимы для *системы материальных точек с наложенными связями*. Основное уравнение в этом случае примет вид:

$$\sum_{r=1}^{N} m_r \left(u_r - u_{r0}\right) U_r = 0. \tag{12.3.9}$$

Классом допустимых значений $\vec{U}$ будет являться класс допустимых скоростей в момент времени $t_1 + 0$.

Предположим теперь, что на систему материальных точек наложена *связь второго типа*. После наложения такой связи, система материальных точек не будет катастатической, коэффициенты E_r в уравнении (12.2.1) будут равны нулю в момент времени $t_1 - 0$. Уравнения

(12.3.4) и (12.3.5), которым удовлетворяет $\Delta\vec{u}$, в точности совпадают с уравнениями, которым удовлетворяют скорости, *допустимые в момент времени, непосредственно предшествующий наложению связи*.

Основное уравнение запишется в форме

$$\sum_{r=1}^{N} m_r \left(u_r - u_{r0}\right) U_r = 0, \tag{12.3.10}$$

а классом допустимых скоростей $\vec{U}$ будет класс возможных скоростей в момент времени $t_1 - 0$.

§ 12.4. Теорема о суперпозиции

Предположим, что нам заданы начальные положения и скорости системы и система импульсов $\vec{P}_1$ сообщает ей скорость $\vec{u}_1$, а система импульсов $\vec{P}_2$ - скорость $\vec{u}_2$. Какова будет скорость $\vec{u}_3$ при одновременном приложении обеих систем импульсов $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$?

На основании уравнений (12.3.8), опуская индексы суммирования, запишем

$$\sum m\left(u_1 - u_0\right)U = \sum P_1 U\,, \tag{12.4.1}$$

$$\sum m\left(u_2 - u_0\right)U = \sum P_2 U\,, \tag{12.4.2}$$

$$\sum m\left(u_3 - u_0\right)U = \sum \left(P_1 + P_2\right)U\,. \tag{12.4.3}$$

Эти уравнения удовлетворяются при одних и тех же значениях скорости $\vec{U}$, возможной в системе в её положении в момент времени t_1. Тогда для одних и тех же значений $\vec{U}$ будет справедливо следующее выражение

$$\sum m\left(u_1 + u_2 - u_0 - u_3\right)U = 0\,. \tag{12.4.4}$$

Откуда сразу следует, что

$$u_3 = u_1 + u_2 - u_0 . \tag{12.4.5}$$

Если система первоначально находилась в покое, то

$$u_3 = u_1 + u_2 , \tag{12.4.6}$$

то есть *суперпозиция импульсов влечёт за собой суперпозицию скоростей*.

§ 12.5. Шесть теорем об энергии

Рассмотрим теоремы, связанные с кинетической энергией катастатических систем материальных точек при действии на них ударных импульсов. В качестве исходных уравнений (в сокращённой записи) возьмём уравнения (12.3.9) и (12.3.10).

$$\sum m(u - u_0)U = \sum PU , \tag{12.5.1}$$

$$\sum m(u - u_0)U = 0 . \tag{12.5.2}$$

1. Приращение энергии системы без импульсивных связей

Воспользуемся уравнением (12.5.1)

$$\sum m(u - u_0)U = \sum PU , \tag{12.5.1}$$

где под $\vec{U}$ будем принимать любую систему скоростей, возможную в момент времени t_1. К этой системе скоростей принадлежат, в частности, векторы $\vec{u}$ и $\vec{u}_0$, а так же их линейные комбинации $\lambda\vec{u}_0 + \mu\vec{u}$.

Пусть, для определённости $\vec{U} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}_0 + \vec{u}\right)$, тогда подставив это значение в (12.5.1), получим

$$\frac{1}{2}\sum m(u - u_0)(u + u_0) = \sum P\frac{u + u_0}{2} , \tag{12.5.3}$$

или после раскрытия скобок

$$T - T_0 = \frac{1}{2}\sum mu^2 - \frac{1}{2}\sum mu_0^2 = \sum P\frac{u + u_0}{2}. \qquad (12.5.4)$$

Приращение кинетической энергии равно сумме скалярных произведений каждого импульса на среднее арифметическое скоростей точки его приложения непосредственно перед приложением импульса и после него.

Если система материальных точек первоначально находилась в покое, то сообщённая ей энергия будет равна $\frac{1}{2}\sum Pu$, а если суммирование производить по материальным точкам, то сообщенная системе энергия будет равна $\frac{1}{2}\sum m(Pu + Qv + Rw)$.

2. Теорема Карно о потере энергии при наложении связи первого типа

При наложении такой связи потерянная энергия равна энергии потерянных скоростей.

Потерянной скоростью материальной точки будем называть векторную разность её скоростей до и после наложения связей. Воспользуемся уравнением (12.5.2)

$$\sum m(u - u_0)U = 0. \qquad (12.5.2)$$

Это равенство справедливо (см. § 12.3.) для любой системы скоростей $\vec{U}$, допустимой непосредственно после наложения связи, в момент времени $t_1 + 0$. Не нарушая общности мы можем положить $\vec{U} = \vec{u}$, тогда (12.5.2) запишется в виде

$$\sum mu(u - u_0) = 0. \qquad (12.5.5)$$

Представим $u(u - u_0)$ в виде

$$u(u - u_0) = \frac{1}{2}\left\{u^2 - u_0^2 + (u - u_0)^2\right\}, \qquad (12.5.6)$$

тогда (12.5.5) можно представить как

$$\frac{1}{2}\sum mu_0^2 - \frac{1}{2}\sum mu^2 = \frac{1}{2}\sum m(u-u_0)^2 \qquad (12.5.7)$$

или

$$T_0 - T = R_0 . \qquad (12.5.8)$$

Здесь мы будем полагать, что T_0 есть кинетическая энергия в момент времени, непосредственно предшествующий наложению связи, T - кинетическая энергия сразу после наложения связи, а R_0 - кинетическая энергия потерянных скоростей, равная

$$R_0 = \frac{1}{2}\sum m(u-u_0)^2 . \qquad (12.5.9)$$

3. Выигрыш энергии при наложении связи второго рода

При наложении связи такого типа энергия системы материальных точек возрастает на величину, равную энергии приобретённых скоростей.

Воспользуемся уравнением (12.5.2)

$$\sum m(u-u_0)U = 0 . \qquad (12.5.2)$$

Оно справедливо (см. § 12.3.) для любой системы скоростей $\vec{U}$, допустимой непосредственно перед наложением связи, в момент времени $t_1 - 0$, и мы можем положить $\vec{U} = \vec{u}_0$. Тогда

$$\sum mu_0(u-u_0) = 0 . \qquad (12.5.10)$$

Полагая, по аналогии с (12.5.6)

$$u_0(u-u_0) = \frac{1}{2}\left\{u^2 - u_0^2 - (u-u_0)^2\right\}, \qquad (12.5.11)$$

подставив полученное выражение в (12.5.10), получим

$$T - T_0 = R . \qquad (12.5.12)$$

4. Теорема Бертрана

Предположим, что система материальных точек из состояния покоя приводится в движение некоторой заданной системой импульсов. Повторим мысленно этот эксперимент при тех же условиях, но с той лишь разницей, что систему материальных точек теперь подчиним дополнительным (конечным) связям. Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Энергия T_1 *системы материальных точек во втором случае меньше энергии* T *системы материальных точек в первом случае на величину энергии потерянных скоростей (то есть скорости* $u - u_1$ *).*

Воспользуемся уравнением (12.5.1)

$$\sum m(u-u_0)U = \sum PU\ , \qquad (12.5.1)$$

учитывая, что $u_0 = 0$, запишем для первого и второго случаев

$$\sum muU = \sum PU\ , \qquad (12.5.13)$$

$$\sum mu_1U = \sum PU\ . \qquad (12.5.14)$$

Оба уравнения справедливы для $\vec{U} = \vec{u}_1$. Тогда с учётом равенства правых частей уравнений (12.5.13) и (12.5.14), получим

$$\sum mu_1(u-u_1) = 0\ . \qquad (12.5.15)$$

Рассуждая по аналогии с (12.5.6), запишем

$$T - T_1 = R_1 \geq 0\ . \qquad (12.5.16)$$

5. Теорема Кельвина

Предположим, что система материальных точек, находившаяся в заданном положении в покое, приводится в движение ударными импульсами, приложенными в определённых точках; скорости (но не импульсы) в точках удара будем считать заданными.

Теорема Кельвина. *Энергия системы материальных точек меньше, чем в любом другом движении, при котором указанные точки имеют заданные скорости.*

Запишем уравнение (12.5.1) с учётом того, что система материальных точек покоилась:

$$\sum muU = \sum PU \,. \qquad (12.5.1)$$

Пусть $\vec{u}_2$ есть любая другая система скоростей, при которой указанные точки имеют заданные значения скорости. Полагая $\vec{U} = \vec{u} - u_2$, находим

$$\sum mu(u - u_2) = \sum P(u - u_2). \qquad (12.5.17)$$

Правая часть этого равенства равна нулю, так как $\vec{P}$ обращается в нуль всюду, где разность $(u - u_2)$ отлична от нуля. Тогда

$$\sum mu(u - u_2) = 0 \qquad (12.5.18)$$

и мы можем написать, что

$$T_2 - T = R_2 \,. \qquad (12.5.19)$$

Теорема Кельвина утверждает, что *энергия потерянных скоростей при действительном движении минимальна*.

6. Теорема Тейлора (о связи между теоремами Бертрана и Кельвина)

Произведём мысленно три опыта, полагая в каждом из них, что в начальный момент времени система материальных точек находится в покое в некотором заданном положении.

1. В некоторых точках системы прикладываются ударные импульсы, сообщающие системе кинетическую энергию T.

2. Система подчинена связям и подвергается действию тех же ударных импульсов, что и опыте 1. Приобретённая кинетическая энергия системы в этом случае пусть будет равна T_1. По теореме Бертрана

$T - T_1 = R_1 > 0$.

3. Система подчинена тем же связям, что и в случае 1, прикладываются ударные импульсы такие, что скорости этих точек становятся равными тем, что были в случае 1; иными словами, эти точки получают такое же движение как в случае 1. Согласно теореме Кельвина $T_2 - T = R_2 > 0$.

Теорема Тейлора

Энергетический выигрыш в теореме Кельвина больше, чем потеря энергии в теореме Бертрана, то есть $R_2 > R_1$.

Для доказательства воспользуемся уравнениями (12.5.13) и (12.5.14), где положим $\vec{U} = \vec{u}_2$, а затем $\vec{U} = u_1$, тогда уравнения (12.5.15) примут вид: $\sum m u_2 (u - u_1) = 0$ и $\sum m u_1 (u - u_1) = 0$.

Вычтя второе из первого, получим

$$\sum m (u - u_1)(u_2 - u_1) = 0. \qquad (12.5.20)$$

Учитывая, что

$$(u - u_1)(u_2 - u_1) = (u_1 - u)\{(u_1 - u) - (u_2 - u)\}, \qquad (12.5.21)$$

перепишем (12.5.20) в виде

$$\sum m (u_1 - u)\{(u_1 - u) - (u_2 - u)\} = 0. \qquad (12.5.22)$$

Используя уравнение (12.5.6), получим

$$R_1 - R_2 + R_{12} = 0, \qquad (12.5.23)$$

где

$$R_{12} = \frac{1}{2} \sum m (u_2 - u_1)^2. \qquad (12.5.24)$$

Так как в соответствии с (12.5.24) $R_{12} > 0$, окончательно получим

$$R_2 - R_1 = R_{12} > 0, \qquad (12.5.25)$$

что доказывает теорему Тейлора.

§ 12.6. Использование обобщённых координат и квазикоординат в теории удара

В теории удара удобно использовать квазикоординаты, подобно тому, как они использовались в уравнениях Гиббса-Аппеля в пятой главе.

Воспользуемся уравнением (6.1.7)

$$dx_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri} dq_i + \alpha_r dt\,, \quad \left(r = 1,2,\ldots,\ N\right), \tag{6.1.7}$$

где k - число степеней свободы системы материальных точек.

Поделив обе части уравнения (6.1.7) на dt получим

$$u_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri} \omega_i + \alpha_r\,, \qquad \left(r = 1,2,\ldots,\ N\right), \tag{12.6.1}$$

где ω_i - составляющая скорости $\dot{q}_r$. На основании полученного уравнения (12.6.1) мы можем записать

$$\Delta u_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri} \Delta\omega_i \tag{12.6.2}$$

или

$$u_r - u_{r0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ri} \left(\omega_i - \omega_{i0}\right), \tag{12.6.3}$$

где коэффициенты α_{ri} считаются теперь постоянными.

Рассмотрим основное уравнение (12.3.6)

$$\sum_{r=1}^{n} m_r \left(u_r - u_{r0}\right) = \sum_{r=1}^{n} P_r \Delta u_r\ . \tag{12.3.6}$$

Преобразуем правую часть основного уравнения с помощью (12.6.2)

$$\sum_{r=1}^{n} P_r \Delta u_r = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n} P_r \alpha_{ri} \right) \Delta\omega_i = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i \Delta\omega_i \ , \tag{12.6.4}$$

где

$$\Omega_i = \sum_{r=1}^{N} P_r \alpha_{ri} \tag{12.6.5}$$

есть обобщённая составляющая импульса. Величины Ω_i ищутся точно так же, как величины Q_i в пятой форме основного уравнения. Воспользуемся соотношением

$$\sum_{r=1}^{N} P_r \delta x_r = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i \delta q_i \ . \tag{12.6.6}$$

В наиболее распространённом случае, когда все коэффициенты α_r в (12.6.1) равны нулю, получим

$$\sum_{r=1}^{N} P_r u_r = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i \omega_i \ . \tag{12.6.7}$$

Выразив правую часть основного уравнения (12.3.6) через k величин $\Delta\omega_i$, получим

$$\sum_{r=1}^{N} m_r (u_r - u_{r0}) \Delta u_r = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i \Delta\omega_i \ , \tag{12.6.8}$$

уравнение, аналогичное пятой форме основного уравнения (6.2.11) в случае конечных сил.

Составим функцию

$$\Re = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N} m_r (u_r - u_{r0})^2 \ . \tag{12.6.9}$$

Используя уравнения (12.6.3), выразим эту функцию через разности $(\omega_r - \omega_{r0})$, в результате чего получим однородную квадратичную функцию от этих разностей. Если коэффициенты α_r все равны нулю, то $\Re$ зависит от $(\omega_r - \omega_{r0})$ так же, как T зависит от ω_r, то есть функцию $\Re$ можно построить по членам T_2 в выражении для T.

Преобразуем левую часть уравнения (12.6.8) с помощью уравнения (12.6.2)

$$\sum_{r=1}^{N} m_r (u_r - u_{r0}) \Delta u_r = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{N} m_r (u_r - u_{r0}) \alpha_{ri} \right) \Delta\omega_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{N} m_r (u_r - u_{r0}) \frac{\partial u_r}{\partial \omega_i} \right) \Delta\omega_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Re}{\partial \omega_i} \Delta\omega_i \qquad (12.6.10)$$

или в эквивалентной форме

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Re}{\partial \omega_i} \Delta\omega_i = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i \Delta\omega_i \; . \qquad (12.6.11)$$

Для получения уравнений движения в момент времени $t_1 + 0$, достаточно применить бесконечно малые вариации в уравнении (12.6.11), тогда оно примет вид

$$\delta\Re = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i \delta\omega_i \; . \qquad (12.6.12)$$

Если импульсивные связи отсутствуют и вариации $\delta\omega_i$ независимы, уравнение (12.6.12) приводится к уравнениям

$$\frac{\partial \Re}{\partial \omega_i} = \Omega_i \, , \quad (i = 1, 2, \dots, k). \qquad (12.6.13)$$

В случае импульсивных связей первого типа, например связи, выражаемой одним уравнением

$$b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + \dots + b_k\omega_k = 0 \, , \qquad (12.6.14)$$

движение в момент времени $t_1 + 0$ определяется условием $\delta\Re = 0$ и уравнением связи (12.6.14). В таком случае уравнения(12.6.12) примут вид:

$$\frac{\partial \Re}{\partial \omega_i} = \lambda b_i\,, \quad (i = 1,2,\ldots,k). \tag{12.6.15}$$

Множитель λ пропорционален величине импульса, создаваемого импульсивной связью.

Замечание. Если система материальных точек начинает движение из состояния покоя, функция $\Re$, определяемая формулой (12.6.9), совпадает с кинетической энергией T и формулу (12.6.12) можно представить так:

$$\delta T = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i \delta\omega_i\,. \tag{12.6.16}$$