Приложения

Приложение I

1. Интегрирующий множитель

Если некоторое выражение

$$Pdx + Qdy \tag{П1.1}$$

есть полный дифференциал, то это означает, что можно подобрать такую функцию $u(x, y)$, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy\ . \tag{П1.2}$$

Нетрудно увидеть, что самое общее решение (П1.2) есть

$$u_1(x, y) = u(x, y) + C\ . \tag{П1.3}$$

В самом деле

$$du = Pdx + Qdy\ , \quad du_1 = Pdx + Qdy\ ,$$

откуда

$$d(u_1 - u) = 0$$

или

$$u_1 - u = C\ .$$

Но если дифференциал некоторой функции равен тождественно нулю, то частная производная этой функции по всем независимым переменным равна нулю, и, следовательно, сама функция есть величина постоянная, то есть $u_1 - u = C$.

Обратно, пусть существует такая функция u_1, что

$$du_1 = Pdx + Qdy\ . \tag{П1.4}$$

Покажем, что с необходимостью должно быть

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0. \qquad (\text{П}1.5)$$

Соотношение (1.4) может быть переписано в виде

$$Pdx+Qdy=\frac{\partial u_1}{\partial x}dx+\frac{\partial u_1}{\partial y}dy \qquad (\text{П}1.6)$$

и так как величины dx и dy, как дифференциалы независимых переменных, совершенно произвольны, то это равенство может иметь место только при условии, что равны коэффициенты при dx и dy в обеих частях равенства (П1.6), то есть

$$P=\frac{\partial u_1}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial u_1}{\partial y},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial^2 u_1}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}. \qquad (\text{П}1.7)$$

Итак, если некоторое выражение $Pdx+Qdy$ есть полный дифференциал функции $u_1(x,y)$, то $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ и

$$u_1(x,y)=\int(Pdx+Qdy)+C. \qquad (\text{П}1.8)$$

Если выражение $Pdx+Qdy$ не есть полный дифференциал, то

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\neq 0. \qquad (\text{П}1.9)$$

Покажем, что всегда можно найти такую функцию λ, при умножении на которую выражение $Pdx+Qdy$ обращается в полный дифференциал и его можно будет проинтегрировать.

$$\lambda(Pdx+Qdy)=du. \qquad (\text{П}1.10)$$

Всякая такая функция λ называется *интегрирующим множителем*. Для того, чтобы функция λ была интегрирующим множителем, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x} = 0. \qquad \text{(П1.11)}$$

Выражение

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{(П1.12)}$$

может быть рассмотрено как уравнение для определения интегрирующего множителя λ.

Можно определить интегрирующий множитель и из других соображений. Пусть $Pdx + Qdy$ не есть полный дифференциал. Дифференциальное уравнение

$$Pdx + Qdy = 0 \qquad \text{(П1.13)}$$

всегда имеет, в силу теоремы существования, общий интеграл, который можно записать в виде

$$F(x, y) = 0. \qquad \text{(П1.14)}$$

Функция $F(x, y)$ должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad \text{(П1.15)}$$

где $\frac{\partial y}{\partial x}$, в силу (П1.13), можно заменить на $\left(-\frac{P}{Q}\right)$, то есть должно иметь место тождество

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Q}. \qquad \text{(П1.16)}$$

Обозначая через λ общую величину этих двух равных отношений, мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda P\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda Q\,, \tag{П1.17}$$

то есть λ есть интегрирующий множитель любого выражения $Pdx + Qdy$.

2. Уравнения Пфаффа

Уравнениями Пфаффа называются уравнения типа

$$\delta Q = Xdx + Ydy + Zdz + \cdots, \tag{П1.18}$$

где величины, $x, y, z,...$, служат аргументами, а величины $X, Y, Z,...$ являются функциями этих аргументов. Если уравнение (П1.18) имеет «интегрирующий множитель» (то есть имеется такая функция, после умножения на которую правая часть уравнения обращается в выражение полного дифференциала), то уравнение называется *голономным*. По теореме Коши всякое уравнение типа уравнения Пфаффа (П1.18) с двумя аргументами голономно. По той же теореме оно имеет бесчисленное множество интегрирующих множителей, ибо если известен один интегрирующий множитель, то его произведение на любую функцию от величины, стоящей под знаком полного дифференциала, также является интегрирующим множителем.

Для уравнений Пфаффа с тремя и более аргументами дело обстоит сложнее. Далеко не всякое уравнение Пфаффа с тремя и более аргументами имеет интегрирующий множитель. Чтобы уравнение имело интегрирующий множитель, между функциями $X, Y, Z,...$ должны иметься некоторые соотношения, а именно: при существовании интегрирующего множителя μ должны быть удовлетворены следующие условия:

$$\frac{\partial \mu X}{\partial y} = \frac{\partial \mu Y}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial \mu Z}{\partial z} = \frac{\partial \mu X}{\partial z}\,, \text{ и так далее.} \tag{П1.19}$$

Эту совокупность соотношений нередко называют правилом приравнивания накрест взятых производных.

Приложение II

Однородные функции, теорема Эйлера об однородных функциях

Однородными называют полиномы, состоящие из членов одного и того же измерения.

Например, выражение $2x^2 - 3xy + 7y^2$ есть однородный полином второй степени. Если умножить переменные x и y на некоторый множитель t, то весь многочлен приобретёт множитель t^2. Это обстоятельство справедливо для любого полинома.

Дадим определение однородной функции:

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n аргументов, определённая в области D, называется **однородной функцией степени** m, если при умножении всех её аргументов на множитель t функция приобретает этот же множитель в степени m, что равносильно тождественному выполнению равенства

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^m \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (\text{П}2.1)$$

Рассмотрим однородную функцию $f(x, y, z)$ степени m от трёх переменных (количество переменных ограничено для простоты рассуждений), имеющую в открытой области D непрерывные частные производные по всем аргументам. Для произвольно зафиксированной точки (x_0, y_0, z_0) из D, в силу основного тождества (П2.1) можем записать для любого $t > 0$:

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^m \cdot f(x_0, y_0, z_0). \qquad (\text{П}2.2)$$

Дифференцируя левую часть (П2.2) по правилу дифференцирования сложной функции, а правую просто как степенную, получим

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)y_0 + f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)z_0 =$$

$$= mt^{m-1} \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Полагая $t = 1$, получим

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)y_0 + f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)z_0 =$$

$$= m \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, для любой точки (x, y, z) имеет место равенство

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}z = m \cdot f(x,y,z), \quad (\text{П}2.3)$$

представляющее собой *теорему Эйлера об однородных функциях*.

Приложение III
Вариационное исчисление

1. Условие стационарности интегрального функционала

Рассмотрим интегральный функционал вида

$$S = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right), \quad (\text{П}3.1)$$

где f - заданная функция, а относительно x известно, что это некоторая функция от t, однако не известно, какая именно.

Задача вариационного исчисления состоит в определении, какой функцией от t должно быть x, чтобы на этой функции функционал S принимал стационарное значение при малых изменениях x.

Рассмотрим в качестве примера задачу об определении кратчайшего расстояния между двумя точками. Здесь функционалом будет длина плоской кривой, соединяющей две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Если уравнение кривой задано в виде $y = y(x)$, то функционал длины дуги может быть найден по формуле

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\ . \tag{П3.2}$$

Концы кривой определяются заданными точками $y_0 = y_0(x_0)$ и $y_1 = y_1(x_1)$. Нетрудно представить, что длина дуги кривой s будет минимальной, если положить

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \tag{П3.3}$$

то есть линия s, соединяющая две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) - прямая.

Характерная особенность задач вариационного исчисления, в отличии от обычных задач нахождения максимума или минимума функции, состоит в том, что неизвестная функция и её производная находятся под знаком интеграла.

Для вычисления интеграла (П3.1) мы должны знать значения x для всех значений t в соответствующем интервале, и чтобы сделать интеграл стационарным, должны найти бесконечное число значений x. Для решения поставленной задачи необходимо дать строгое определение понятию «стационарности» интеграла.

Полагая $\frac{dx}{dt} = p$, рассмотрим f как функцию трёх переменных x, p, t и предположим, что в некоторой области D изменения этих переменных, вторые частные производные f по x, p, t непрерывны как функции x, p, t. Если $x(t)$ и $x'(t)$ удовлетворяют сделанным выше предположениям и разница между ними мала, мы можем написать

$$x'(t) = x(t) + \delta x(t), \tag{П3.4}$$

где

$$\delta x(t) = \alpha g(t), \tag{П3.5}$$

а $g(t)$ - произвольная функция класса C_2.

Будем говорить, что при $x(t)$ функционал принимает стационарное значение, если

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{t_0}^{t_1} f\left(x', \frac{dx'}{dt}, t\right)dt = 0\,, \tag{П3.6}$$

когда $\alpha = 0$.

Перепишем (П3.6) с учётом (П3.4) и (П3.3)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{t_0}^{t_1} f\left(x+\alpha g(t), p+\alpha\frac{dg}{dt}, t\right)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\alpha} f\left(p+\alpha\frac{dg}{dt}, x+\alpha g, t\right)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{dg}{dt}\frac{\partial f}{\partial p} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right)dt\;. \tag{П3.7}$$

Здесь

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\alpha} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot g + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 0\,.$$

Интегрируя первое слагаемое в (П3.7) по частям получим

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha} = \left[g\frac{\partial f}{\partial p}\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} g\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p}\right)dt = 0\,. \tag{П3.8}$$

Здесь мы приняли

$$du = \frac{dg}{dt}dt = dg\,,\quad u = g\,,$$

$$v = \frac{\partial f}{\partial p}\,,\qquad dv = d\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p}dt\;.$$

Из того, что выражение (П3.8) равно нулю, ещё не следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \text{ при } t = t_0, t_1 \text{ и } \varphi = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \tag{П3.9}$$

для всех промежуточных значений t, как можно было бы сделать, если бы δx была произвольной. Примем без доказательства (его нетрудно найти в соответствующей литературе по вариационному исчислению), что для выполнения равенства (П3.8), $\partial f / \partial p$ должно обращаться в нуль на концах интервала t_0, t_1, а равенство $\varphi = 0$ должно выполняться во всех промежуточных точках. В общем случае $\partial f / \partial p$ зависит от p, поэтому $\varphi = 0$ обычно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно x. Условия задачи могут включать ещё и требование, чтобы $\delta x = 0$ в точках t_0 и t_1, как это было в случае простейшей задачи о нахождении кратчайшего расстояния между двумя точками. Поскольку в выражении (П3.2) мы рассматриваем y_0 и y_1 как наперёд заданные, мы не можем варьировать y на концах; и допустимыми считаются все функции δy, для которых $\delta y_0 = \delta y_1 = 0$. В этом случае $\partial f / \partial p$ не обязано обращаться в нуль на концах интервала, и два граничных условия, которым должно удовлетворять решение, состоят не в равенстве нулю $\partial f / \partial p$ на концах интервала, а в том, что там y должно принимать указанные значения.

Важным для приложений, является случай, когда функция f не содержит в явном виде t. Умножая на p равенство $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} - p\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p} = 0\,. \tag{П3.10}$$

Так как

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} \tag{П3.11}$$

и

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{\partial f}{\partial p} \right) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} + p\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial p} \right), \tag{П3.12}$$

с учётом

$$\frac{dp}{dt} = 0\,, \tag{П3.13}$$

получим

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{\partial f}{\partial p} - f \right) = p\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0\,. \tag{П3.14}$$

Первый интеграл этого уравнения имеет вид

$$p\frac{\partial f}{\partial p} - f = const\,. \tag{П3.15}$$

Итак, мы рассмотрели условия стационарности интегрального функционала. Чтобы выяснить, достигает функционал максимума или минимума или просто является стационарным на выбранной нами функции для всех её возможных вариаций, нужно рассмотреть вторую вариацию.

2. Свободные пределы интегрирования

При выводе формулы (П3.8)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \left[g\frac{\partial f}{\partial p} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} g\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p} \right) dt = 0 \tag{П3.8}$$

мы считали пределы интегрирования t_0 и t_1 фиксированными. Предположим, что они тоже меняются на Δt_0 и Δt_1. Тогда S будет возрастать на $[f\Delta t]_{t=t_1}$ на верхнем пределе интегрирования и уменьшаться на $[f\Delta t]_{t=t_{01}}$ нижнем пределе.

В результате проинтегрированная часть (П3.8) примет вид

$$\left[f\Delta t + \frac{\partial f}{\partial p}\delta x \right]_{t_0}^{t_1}. \tag{П3.16}$$

В этом выражении δx представляет вариацию x для данного t, и поэтому, вычисляя δx_1, *не следует* t_1 заменять на $t_1 + \Delta t_1$. Если проварьированная функция x в точке $t_1 + \Delta t_1$ есть $x_1 + \Delta x_1$, то мы можем положить

$$\Delta x_1 = \delta x_1 + p_1 \Delta t_1, \tag{П3.17}$$

и проинтегрированная часть (П3.16) запишется в виде

$$\left[\left(f - p\frac{\partial f}{\partial p} \right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial p}\Delta x \right]_{t_0}^{t_1}. \tag{П3.18}$$

3. Функционалы с несколькими неизвестными функциями

Пусть $q_1, q_2, ..., q_n$ - неизвестные функции и $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ их производные по времени t, тогда вариация

$$S = \int_{t_0}^{t_1} f(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t)dt \tag{П3.19}$$

для малых приращений, с учётом (П3.18) функции $q_r(t)$, примет вид

$$\delta S = \left[\left(f - \sum_{R=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \right) \Delta t + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \Delta q_r \right]_{t_0}^{t_1} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \right\} \delta q_r dt, \qquad (П3.20)$$

где, если $\Delta t_1 \neq 0$, то

$$(\Delta q_r)_1 = (q_r + \delta q_r)_{t_1 + \Delta t_1} - (q_r)_{t_1} \qquad (П3.21)$$

и аналогично, если $\Delta t_0 \neq 0$. Из этого следует, что в случае, когда вариации δq_r могут быть выбраны независимо друг от друга, условия стационарности S таковы, что

$$\frac{\partial f}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \right) = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, n, \qquad (П3.22)$$

$$\left(f - \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \right) \Delta t + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \Delta q_r = 0. \qquad (П3.23)$$

Условие (П3.23) выполняется на обоих пределах интегрирования. Если f не содержит в явном виде t, то первый интеграл имеет вид

$$f - \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} = const. \qquad (П3.24)$$

Если $\Delta t_0 = \Delta t_1 = 0$, то

$$\delta q_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} = 0 \qquad (П3.25)$$

на концах интервала интегрирования.

4. Принцип Гамильтона

Воспользуемся первой формой основного уравнения

$$\sum_{r=1}^{N}\left(m_r\ddot{x}_r - X_r\right)\delta x_r = 0\,. \qquad (2.1.6)$$

Интегрируя это уравнение по времени от t_0 до t_1, получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{N} m_r\ddot{x}_r\delta x_r dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{N} X_r\delta x_r dt\,. \qquad (П3.26)$$

Проинтегрируем левую часть (П3.26) по частям

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{N} m_r\ddot{x}_r\delta x_r dt = \left[\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r\delta x_r\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r\frac{d}{dt}\delta x_r dt =$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r\delta x_r\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r\delta\dot{x}_r dt\,. \qquad (П3.27)$$

Учитывая, что

$$\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r\delta\dot{x}_r = \delta\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r^2\right), \qquad (П3.28)$$

перепишем (П3.27) в виде

$$\left[\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r\delta x_r\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\delta\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r^2\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{N} X_r\delta x_r dt\,. \qquad (П3.29)$$

Если $\delta x_r = 0$ в точках t_0 и t_1, то окончательно можно записать

$$\delta S \equiv \int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r^2\right) + \sum_{r=1}^{N} X_r\delta x_r\right\}dt = 0\,. \qquad (П3.30)$$

Мы получили наиболее *общую форму принципа Гамильтона* классической динамики. Функция $\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \dot{x}_r^2$ является кинетической энергией T. Если предположить, что существует функция V, зависящая от x_r и, возможно, от t, но не зависящая от $\dot{x}_r$, такая, что

$$X_r = \frac{\partial V}{\partial x_r}, \tag{П3.31}$$

то для вариации V при изменении координат x_r на δx_r можно записать

$$\delta V = \sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r . \tag{П3.32}$$

Теперь (П3.30) можно записать в сокращённом виде (для консервативной системы материальных точек)

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + V) dt = 0 . \tag{П3.33}$$

Выражения (П3.30) и (П3.33) содержат только скалярные величины, и мы можем пользоваться введённым выше аппаратом вариационного исчисления.

5. Уравнения Лагранжа

В третьей главе мы вывели уравнения Лагранжа из уравнений движения. Рассмотрим вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона, используя изложенные выше идеи вариационного исчисления.

Пусть

$$x_r = x_r(q_1, q_2, ..., q_N). \tag{П3.34}$$

Воспользуемся полученными в третьей главе равенствами (3.1.2), (3.1.3), и (1.6.4)

$$\delta x_r = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial x_r}{\partial q_m} \delta q_m , \tag{П3.35}$$

$$\dot{x}_r = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial x_r}{\partial q_m} \dot{q}_m , \tag{П3.36}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial x_r}{\partial q_m}, \tag{П3.37}$$

$$2T = \sum_{r=1}^{N} m_r \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial x_r}{\partial q_m} \dot{q}_m \right)^2 , \tag{П3.38}$$

$$\sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r = \sum_{m=1}^{N} \delta q_m \sum_{r=1}^{N} X_r \frac{\partial x_r}{\partial q_m} = \sum_{m=1}^{N} Q_m \delta q_m . \tag{П3.39}$$

С учётом написанных выше выражений напишем (П3.33) в виде

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{m=1}^{N} Q_m \delta q_m \right) dt = 0 , \tag{П3.40}$$

где T (кинетическая энергия) и Q_m (обобщённые силы) являются функциями от q_m и $\dot{q}_m$.

В соответствии с изложенными выше правилами вариационного исчисления, мы можем записать

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \left[\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial T}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m dt$$

и, следуя условию (П3.40), для всех дважды дифференцируемых δq_m, приравнивая коэффициенты при δq_m, получим *уравнения Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \,. \qquad (П3.41)$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона, объясняет, почему левая часть (П3.41) имеет вид, характерный для уравнений вариационного исчисления.

Далее, может случиться, что в действительности движение зависит от некоторых связей, наложенных на x_r и, следовательно, на q_m. Наиболее важен случай, когда некоторые частицы принадлежат одному абсолютно твердому телу, и координаты можно варьировать только так, чтобы расстояния между частицами этого тела оставались неизменными. Другой важный случай, когда какая-то координата вынуждена изменяться во времени определенным образом под действием внешней силы, например часть системы должна двигаться с заданной линейной или угловой скоростью. Однако мы можем рассматривать вариации δq_m, нарушающие эти ограничения; и, следовательно, можем считать все δq_m независимыми и приравнять при них коэффициенты.

Тогда уравнения (П3.41) остаются справедливыми, но меняется их физическая интерпретация. В то время как в системе свободных частиц уравнения (П3.41) - это дифференциальные уравнения для независимых координат, в системе с дополнительными связями в действительном движении некоторые из q_m будут определенными функциями от других координат и от времени, а соответствующие им Q_m реакциями, необходимыми для того, чтобы эти связи не нарушались. Далее, принято использовать множество только тех q_m, которые можно варьировать, не нарушая наложенные на систему связи. Число их как раз достаточно для описания движения. Тогда для этого множества выполняются уравнения Лагранжа. Другие же q_m не надо рассматривать совсем, до тех пор, пока мы не захотим найти соответствующие реакции в явном виде. Однако возможно, что некоторые q_m из последнего множества функционально зависят от времени. В этом случае x_r, зависящие от тех q_m, на которые не наложены связи, зависят еще и от времени. Таким образом, время может в явном виде войти в выражение кинетической энергии. Это не окажет влияния на вид уравнений (П3.41), но повлияет на их первые интегралы. Для определения положения абсолютно твердого тела необходимо 6 координат. Можно сразу получить принцип Даламбера для абсолютно твердого тела, если рассматривать его состоящим из таких частиц, что сила между любыми частицами действует по прямой, их соединяющей. Сумма внутренних сил любой пары частиц равна нулю, также как и сумма моментов этих сил относительно любой оси (см. задачи №№ 5 и 6).

Даже если силы реакции между парой частиц не направлены вдоль соединяющей их прямой, и если внутренние силы реакции обладают силовой функцией, которая зависит только от взаимных расстояний между всеми частицами и не распадается на части, зависящие только от расстояния между двумя частицами, эти силы реакции ничего не добавляют к $\sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r$, если δx_r не изменяют взаимных расстояний между частицами. Чтобы обобщить последнюю сумму на случай упругого тела, надо было бы вычесть энергию упругой деформации, которая обращается в нуль, если расстояния между точками не меняются.

6. Уравнение Гамильтона-Якоби

Рассмотрим голономную систему материальных точек с заданной силовой функцией V . Полагая для функции Лагранжа $L = T - V$, составим выражение типа (П3.33), считая пределы интегрирования постоянными

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = \left[\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\delta q_m\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)\delta q_m dt\,.$$

(П3.42)

Если же пределы интегрирования t_0 и t_1 изменяются на Δt_0 и Δt_1 и Δq_m есть вариация q_m при новых пределах, то проинтегрированная часть в соответствии с (П3.16) - (П3.18) примет вид

$$\left[\sum_{m=1}^{N}\left(L-\dot{q}_m\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)\Delta t+\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\Delta q_m\right]_{t_0}^{t_1}, \qquad (П3.43)$$

где

$$\Delta q_m = \delta q_m + \dot{q}_m \Delta t\,. \qquad (П3.44)$$

Положим

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\dot{q}_m\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}-L\right)=H\,, \qquad (П3.45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}=p_m \qquad (П3.46)$$

и назовём H *функцией Гамильтона*, а p_m - *обобщённым импульсом.*

Перепишем с учётом (П3.43) - (П3.16) равенство (П3.42)

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\left[-H\Delta t+\sum_{m=1}^{N}p_m\Delta q_m\right]_{t_0}^{t_1}+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_m}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)\delta q_m dt\,. \qquad (П3.47)$$

Если теперь мы предположим, что q_m заданы в моменты t_0, t_1, то соответствующие p_m будут, вообще говоря, определены, так как даже только один набор обобщённых импульсов в точке t_0 даст заданный набор перемещений к моменту времени t_1. Поэтому, если интеграл $S=\int_{t_0}^{t_1}Ldt$ берётся вдоль пути движения системы материальных точек, то S будет представлять собой определённую функцию от

$t_0, t_1, (q_m)_0, (q_m)_1$. Величину S назовём *главной функцией* Гамильтона. Это функция от q_m для реальных моментов времени t_0, t_1, но так как они могут изменяться, можно заменить t_1 на t.

Принимая во внимание, что последний интеграл в (П3.47), в силу уравнений Лагранжа, обращается в нуль, мы можем для момента времени t записать

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q_m} = p_m, \tag{П3.48}$$

а для момента времени t_0

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t_0}\right) = (H)_{t_0}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial q_{m0}}\right) = -(p_m)_{t_0}. \tag{П3.49}$$

Используя (П3.46) мы можем исключить $\dot{q}_m$ из H, тогда H станет функцией q_m, p_m и, возможно, t. Теперь мы можем записать

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q_m, p_m, t) = -H\left(q_m, \frac{\partial S}{\partial q_m}, t\right), \tag{3.50}$$

являющееся *уравнением Гамильтона-Якоби*, которое представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка от $n+1$ переменной. В него не входит S в явном виде, и поэтому его полный интеграл содержит $n+1$ независимых постоянных. С нашей первоначальной точки зрения, S является функцией только t и содержит $2n+1$ произвольных постоянных, а именно t_0, исходные координаты и импульсы. Однако если начальные и конечные координаты и $t - t_0$ заданы, то начальные импульсы определены и, следовательно, не являются произвольными. Поэтому естественно, что S, выраженное как функция t и q_m, включает именно $n+1$ произвольных постоянных.

Если L не зависит от времени явно, то $H = const$ есть интеграл энергии (интеграл Якоби (3.5.3)). Обозначив последнюю постоянную через h, можем записать

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h\,, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial t_0}\right) = h\,. \qquad \text{(П3.51)}$$

Поэтому

$$S = -h(t - t_0) + f(q_m, q_{m0}). \qquad \text{(П3.52)}$$

Как и раньше, $\dfrac{\partial S}{\partial q_{m0}}$ равно просто $-p_{m0}$, что не зависит от t, и, таким образом, у нас есть n уравнений, выражающих тот факт, что $\dfrac{\partial S}{\partial q_{m0}}$, являющиеся функциями q_m, q_{m0} и, может быть, t, постоянны во время всего движения и равны $-p_{m0}$.

Отсюда если мы задали S, то у нас есть n уравнений для определения q_m, через t и начальные условия; поэтому, если можно определить S, то полное решение задачи сводится к решению этих уравнений. Этот результат принадлежит Гамильтону. Сложность его применения в только что сформулированном виде заключается в том, что, хотя бывает довольно легко получить полный интеграл уравнения (П3.50), включающий $n+1$ постоянных, эти постоянные обычно зависят и от q_{m0} и от p_{m0} и выразить их только через q_{m0} часто нелегко. Эта теорема была дополнена Якоби, который обнаружил, что любой полный интеграл уравнения (П3.50) можно использовать точно таким же образом, как и полный интеграл, зависящий только от q_{m0}. Для доказательства теоремы Якоби необходимо записать уравнения движения в Гамильтоновой форме.

7. Уравнения Гамильтона

Ранее мы установили, что функция Лагранжа L зависит от $q_m, \dot{q}_m$ и, возможно, от t, а функция Гамильтона зависит от q_m, p_m и, возможно, от t. С учётом вышесказанного, для произвольных вариаций q_m и $\dot{q}_m$ при неизменном t, используя правило суммирования по индексу m мы можем написать

$$\delta H = \delta\left(\dot{q}_m p_m - L\right) = \dot{q}_m \delta p_m + p_m \delta\dot{q}_m - \frac{\partial L}{\partial q_m}\delta q_m - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\delta\dot{q}_m . \quad (\text{П}3.53)$$

Учитывая, что $p_m = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$, перепишем (П3.53) в виде

$$\delta H = \dot{q}_m \delta p_m - \frac{\partial L}{\partial q_m}\delta q_m . \quad (\text{П}3.54)$$

С другой стороны

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m + \frac{\partial H}{\partial p_m}\delta p_m . \quad (\text{П}3.55)$$

Сравнивая (П3.54) и (П3.55), получим

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_m} = -\frac{\partial L}{\partial q_m} . \quad (\text{П}3.56)$$

Из уравнения Лагранжа получим выражение для $\dot{p}_m$ (см., также, (5.1.10))

$$\dot{p}_m = \frac{d}{dt}p_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_m} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad (\text{П}3.57)$$

и окончательно запишем

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}. \tag{П3.58}$$

Таким образом, мы получили *уравнения Гамильтона*, представляющие собой систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, в отличие от n уравнений Лагранжа второго порядка.

Установим связь уравнений Гамильтона с вариационным принципом. Рассмотрим выражение

$$B = \int_{t_0}^{t_1} \{p_m \dot{q}_m - H(q_m, p_m)\} dt. \tag{П3.59}$$

Его вариация есть

$$\delta B = \int_{t_0}^{t_1} \left(p_m \delta\dot{q}_m + \dot{q}_m \delta p_m - \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m - \frac{\partial H}{\partial p_m}\delta p_m \right) dt =$$

$$= [p_m \delta q_m]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(-\dot{p}_m \delta q_m + \dot{q}_m \delta p_m - \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m - \frac{\partial H}{\partial p_m}\delta p_m \right) dt. \tag{П3.60}$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \tag{П3.58}$$

являются *условиями стационарности* B для всех вариаций $\delta q_m, \delta p_m$, таких, что $\delta q_m = 0$ при t_0, t_1, если считать, что p_m и q_m изменяются независимо. Когда уравнения (П3.58) удовлетворены, а пределы интегрирования изменяются, можно записать

$$\delta B = [(p_m \dot{q}_m - H)\Delta t + p_m \delta q_m]_{t_0}^{t_1} = [p_m \Delta q_m - H \Delta t]_{t_0}^{t_1}, \tag{П3.61}$$

что в точности совпадает с выражением для ΔS.

8. Теорема Якоби

Предположим, что

$$S = f\left(q_1, q_2, ..., q_n; t; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) + \alpha_{n+1} \qquad (\text{П}3.62)$$

есть полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Обычно константы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ являются координатами, соответствующими начальному моменту времени t_0. Якоби отказывается от этого и вместо $\frac{\partial S}{\partial q_{m0}} = -p_{m0}$ полагает

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = -\beta_r, \qquad (\text{П}3.63)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_m} = p_m, \qquad (\text{П}3.64)$$

где β_r - новые константы. Теорема состоит в том, что если эти уравнения всё ещё рассматривать как уравнения для определения q_m и p_m, то получающиеся в результате q_m и p_m будут удовлетворять уравнениям Гамильтона и поэтому будут описывать движение системы материальных точек.

Из (П3.63) следует

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m}\right)\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} =$$

$$= \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t} + \dot{q}_m \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial q_m} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_r} + \dot{q}_m \frac{\partial H}{\partial \alpha_r} = 0\,. \qquad (\text{П}3.65)$$

Так как α_r входят в H только из-за того, что p_m в соответствии с (3.64) зависят от α_r, то из (П3.58) следует, что

$$-\frac{\partial H}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_r}+\dot q_m\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_r}=\left(\dot q_m-\frac{\partial H}{\partial p_m}\right)\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_r}=0 \qquad (\text{П}3.66)$$

для $r=1,2,...,n$. Равенства (П3.66) будут выполняться если

$$\dot q_m=\frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad m=1,2,...n, \qquad (\text{П}3.67)$$

или

$$\frac{\partial(p_1,p_2,...,p_n)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}=0. \qquad (3.68)$$

Если бы было справедливо (П3.68), то существовали бы функциональные связи между p_m и начальные импульсы не могли бы изменяться независимо друг от друга, и мы в качестве верной версии выберем условие (П3.67). Продифференцируем по времени равенство (П3.64)

$$\frac{dp_m}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot q_l\frac{\partial}{\partial q_l}\right)\frac{\partial S}{\partial q_m}=-\left(\frac{\partial H}{\partial q_m}\right)_\alpha+\left(\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)_q\left(\frac{\partial p_l}{\partial q_m}\right)_\alpha. \qquad (\text{П}3.69)$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_m}\right)_\alpha=\left(\frac{\partial H}{\partial q_m}\right)_p+\left(\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)_q\left(\frac{\partial p_l}{\partial q_m}\right)_\alpha, \qquad (\text{П}3.70)$$

получим

$$\frac{dp_m}{dt}=-\left(\frac{\partial H}{\partial q_m}\right)_p. \qquad (\text{П}3.71)$$

Индексы α, q, p в соответствии с соглашениями принятыми в термодинамике означают, что при взятии частных производных переменные, обозначенные индексом, сохраняются.

Таким образом, мы убедились, что q_m и p_m , найденные из (П3.63) и (П3.64), удовлетворяют уравнениям Гамильтона.

Приложение IV
Движение по законам Кеплера

Рассмотрим движение Земли (рис. П1) вокруг Солнца по эллиптической орбите. Пусть Солнце находится в одном из фокусов эллипса S. Центр эллипса O совместим с началом координат, большую полуось $OP = a$ совместим с осью Ox, малая полуось $OB = b$ совпадёт с осью Oy.

Уравнение эллипса в декартовых координатах

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{П}4.1)$$

заменим параметрическими уравнениями. Из точки $M(x, y)$, изображающей положение планеты, опустим перпендикуляр MN на ось абсцисс. Продолжив перпендикуляр MN до пересечения с окружностью, описанной на большой оси эллипса AP как на диаметре, получим некоторую точку M'. Очевидно, что между точками M и M' существует однозначная зависимость. Положение точки M' однозначно определяется (*эксцентрической аномалией*) углом E, отсчитываемым от большой полуоси OP до радиуса OM' в направлении движения планеты.

Теперь уравнение (4.1) мы можем представить в эквивалентном параметрическом виде

$$x = a\cos E\,, \ y = b\sin E\,. \qquad (\text{П}4.2)$$

$e = \dfrac{OS}{OP}$ - эксцентриситет эллипса, характеризующий его форму.

Очевидны равенства

$$OS = ae\,, \qquad OB = a\sqrt{1-e^2}\,. \qquad (\text{П}4.3)$$

Введём дополнительную систему прямоугольных орбитальных координат $S\xi\eta$, оси которой параллельны осям системы координат

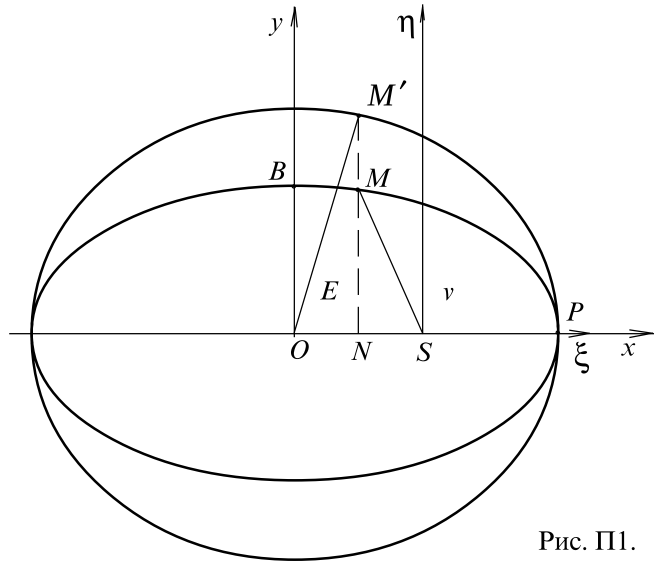

Рис. П1.

Oxy, а начало находится в фокусе S. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a\cos E - ae, \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2}\sin E. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П4.4})$$

Через r и v обозначим полярные координаты, соответствующие ξ и η. Угол v, отсчитываемый от радиус-вектора SP, направленного в *перигелий* P, называется *истинной аномалией* планеты. В соответствии со сделанными определениями можно записать

$$\xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v. \qquad (\text{П4.5})$$

Сравнивая (П4.5) с (П4.4), получим формулы

$$\left.\begin{aligned} r\sin v &= a\sqrt{1-e^2}\sin E, \\ r\cos v &= a(\cos E - e), \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П4.6})$$

для определения полярных орбитальных координат по заданным E.

Возводя (П4.6) в квадрат и складывая правые и левые части, получим

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{П4.7}$$

Вычитая вторую формулу (П4.6) из (П4.7), получим

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos E), \tag{П4.8}$$

а складывая эти же самые формулы

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos E). \tag{П4.9}$$

Формулы (П4.8) и (П4.9) нетрудно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r}\sin\frac{v}{2} &= \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E}{2}, \\ \sqrt{r}\cos\frac{v}{2} &= \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{П4.10}$$

Поскольку углы $\frac{v}{2}$ и $\frac{E}{2}$ находятся всегда в одном и том же квадранте, неопределённость знака при извлечении квадратного корня не возникает.

Из формул (П4.10) легко получить выражение для угла $\frac{v}{2}$

$$tg\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}. \tag{П4.11}$$

Таким образом, для вычисления радиус-вектора r и истинной аномалии планеты v по заданной эксцентрической аномалии E мы можем вместо (П4.6) использовать формулу (П4.10) или совместно (П4.7) и (П4.11).

Выразим из второго уравнения (П4.6)

$$\cos E = \frac{r\cos v}{a} + e \tag{П4.12}$$

и подставим полученное значение в (П4.7), в результате чего получим

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos v}. \qquad (П4.13)$$

Полагая параметр эллипса $p = a\left(1-e^2\right)$, окончательно получим

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}. \qquad (П4.14)$$

Уравнение (П4.14) является общим уравнением конических сечений. При $e = 1$ оно представляет параболу, а при $e > 1$ - ветвь гиперболы, вогнутую по отношению к фокусу S .

Приложение V
Формулы для вычисления ускорений в ортогональных координатах

Для определения положения материальной точки в пространстве введём криволинейные координаты α, β, γ. Тогда квадрат линейного элемента ds в этих координатах примет вид

$$ds = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 + C^2 d\gamma^2, \qquad (П5.1)$$

где коэффициенты A, B, C являются функциями класса C_1 от переменных α, β, γ. Для каждой точки пространства определены три главных взаимно ортогональных направления. Так, для точки $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ первое главное направление (α-направление) задаётся касательной к кривой $\beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$, а α вдоль этого направления возрастает.

Запишем выражение для кинетической энергии материальной точки единичной массы в криволинейных координатах α, β, γ

$$T = \frac{1}{2}\left(A^2\dot{\alpha}^2 + B^2\dot{\beta}^2 + C^2\dot{\gamma}^2\right). \qquad (П5.2)$$

Здесь мы учли, что $v^2 = \dfrac{ds^2}{dt^2}$.

Пусть на материальную точку единичной массы действует сила с составляющими X, Y, Z по главным направлениям, тогда работа этой силы на виртуальном перемещении будет

$$XAd\alpha + YBd\beta + ZCd\gamma. \qquad (\text{П}5.3)$$

Уравнение Лагранжа для α-направления примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(A^2\dot{\alpha}\right) - \left(A\frac{\partial A}{\partial\alpha}\dot{\alpha}^2 + B\frac{\partial B}{\partial\alpha}\dot{\beta}^2 + C\frac{\partial C}{\partial\alpha}\dot{\gamma}^2 \right) = XA. \qquad (\text{П}5.4)$$

Составляющая ускорения для материальной точки единичной массы вдоль α-направления запишется в виде

$$X = \frac{1}{A}\left\{ \frac{d}{dt}\left(A^2\dot{\alpha}\right) - \left(A\frac{\partial A}{\partial\alpha}\dot{\alpha}^2 + B\frac{\partial B}{\partial\alpha}\dot{\beta}^2 + C\frac{\partial C}{\partial\alpha}\dot{\gamma}^2 \right) \right\}, \qquad (\text{П}5.5)$$

или в более подробной записи:

$$X = A\ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\left(\frac{\partial A}{\partial\alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\dot{\beta} + \frac{\partial C}{\partial\alpha}\dot{\gamma} \right) - \\ - \frac{1}{A}\left(A\frac{\partial A}{\partial\alpha}\dot{\alpha}^2 + B\frac{\partial B}{\partial\alpha}\dot{\beta}^2 + C\frac{\partial C}{\partial\alpha}\dot{\gamma}^2 \right). \qquad (\text{П}5.6)$$

Составляющие ускорения по направлениям β и γ выражаются аналогичным образом.

Приведём выражения составляющих ускорения для цилиндрических и сферических координат.

1. Цилиндрические координаты r, θ, z.

Квадрат линейного элемента ds в цилиндрических координатах имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \qquad (\text{П}5.7)$$

Полагая $A = 1$, $B = r$, $C = 1$, $\alpha = r$, $\beta = \theta$, $\gamma = z$, с помощью равенства (П5.6) получим выражение для составляющих ускорения в цилиндрических координатах

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \\ \ddot{z}.\end{array}\right\} \qquad (\text{П}5.8)$$

2. Сферические координаты r, θ, φ**.**

Квадрат линейного элемента ds в цилиндрических координатах имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 . \qquad (\text{П}5.9)$$

Полагая $A = 1$, $B = r$, $C = r \sin \theta$, $\alpha = r$, $\beta = \theta$, $\gamma = \varphi$ и учитывая (П5.6), получим выражение для составляющих ускорения в сферических координатах

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2\right), \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \\ r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2\left(\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}\right)\dot{\varphi}.\end{array}\right\} \qquad (5.10)$$