Часть I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Глава I

ИНТУИЦИЯ И ЛОГИКА В МАТЕМАТИКЕ

I

Изучая труды великих и даже рядовых математиков, невозможно не заметить и не различить две противоположные тенденции — или скорее два рода совершенно различных умов. Одни прежде всего заняты логикой; читая их работы, хочется думать, что они шли вперед лишь шаг за шагом, по методу какого-нибудь Вобана, который предпринимает свою атаку против крепости, ничего не вверяя случаю. Другие вверяют себя интуиции и подобно смелым кавалеристам авангарда сразу делают быстрые завоевания, впрочем, иногда не совсем надежные.

Не предмет, о котором они трактуют, внушает им тот или другой метод. Если часто говорят о первых, что они *аналитики*, и если других называют *геометрами*, то это не мешает одним оставаться аналитиками даже тогда, когда они работают в геометрии, точно так же как другим быть геометрами, если даже они занимаются чистым анализом. Самая природа их ума делает из них сторонников логики или интуиции и они не в силах отрешиться от нее, когда приступают к новому предмету.

И не воспитание развило в них одну из этих двух склонностей и заглушило другую. Математиками родятся, а не делаются, и, по-видимому, также родятся геометрами или родятся аналитиками.

Мне хотелось бы привести примеры, и в них конечно не будет недостатка; но, чтобы подчеркнуть контраст, я хотел бы начать с крайнего примера; пусть мне простят, если я возьму для него двух еще находящихся в живых математиков.

Так, Мере хочет доказать, что двучленное уравнение всегда имеет корень, или, говоря просто, что всегда можно разделить угол на части. Если есть истина, которую мы могли бы узнать непосредственной интуицией, то она здесь. Кто станет сомневаться, что угол всегда можно разделить на какое угодно число равных частей? Мере думает не так; в его глазах это предложение нисколько не очевидно, и чтобы доказать это, ему нужно несколько страниц.

Напротив, посмотрите на Клейна: он изучает один из самых абстрактных вопросов теории функций; требуется узнать, всегда ли существует на данной поверхности Римана функция, допускающая данные сингулярности. Что делает знаменитый немецкий геометр? Он заменяет поверхность Римана металлической поверхностью, электропроводность которой меняется по известным законам, и соединяет две точки ее с двумя полюсами элемента. Ток, говорит он, непременно пройдет, и распределение этого тока по поверхности определит функцию, особыми свойствами которой будут именно те, которые предусмотрены условием.

Без сомнения, Клейн знает, что он дал здесь лишь наглядный очерк; и все-таки он не задумался опубликовать его; вероятно, он надеялся найти здесь если не строгое доказательство, то по крайней мере как бы нравственную уверенность. Логик с ужасом отбросил бы подобную концепцию или — вернее — ему и не нужно было бы ее отбрасывать, потому что она никогда не могла бы возникнуть в его уме.

Позвольте мне еще сравнить двух людей, которые составляют гордость французской науки; они недавно умерли, но давно уже стяжали себе бессмертие. Я говорю о Бертране и Эрмите. Они воспитывались в одной школе и в одно и то же время; получили одно воспитание и подверглись одним и тем же влияниям; и однако какое различие — не только в их сочинениях, но и в их преподавании, в их манере говорить, в самой их внешности! Эти две личности запечатлелись в памяти всех их учеников неизгладимыми чертами; воспоминание о них еще свежо у всех тех, кто имел счастье слушать их лекции; нам легко восстановить его.

Когда говорил Бертран, он все время находился в движении; то он как будто боролся с каким-то внешним врагом, то движением руки чертил фигуры, которые он изучал. Очевидно, он видел их и хотел изобразить, поэтому он и прибегал к жесту. Что касается Эрмита, то это совершенная противоположность; глаза его как бы избегали соприкосновения с миром; не вне, а внутри искал он образ истины.

Между немецкими геометрами той же эпохи два имени пользуются особенной славой; это имена тех двух ученых, которые основали общую теорию функций, Вейерштрасса и Римана. Вейерштрасс все сводит к рассмотрению рядов и к их аналитическим преобразованиям; можно сказать, он превращает анализ как бы в продолжение арифметики; можно перелистать все его сочинения и не встретить в них ни одного чертежа. Напротив, Риман постоянно прибегает к помощи геометрии; каждая концепция его есть образ, который никто не может позабыть, раз его смысл понят.

Возьмем примеры более свежие. Ли был интуитивистом. При чтении его трудов могли возникнуть сомнения, но все они исчезали после беседы с ним; сейчас же было видно, что он мыслит в образах. Ковалевская была логиком.

У наших студентов мы замечаем те же самые различия; одни больше любят решать задачи «аналитически», другие — «геометрически». Первые не способны «представлять в пространстве», последние скоро утомились бы и запутались бы в длинных вычислениях. Оба рода умов одинаково необходимы для прогресса науки; как логики, так и интуитивисты создали великие вещи, которых не могли бы создать другие. Кто осмелится сказать, что, на его взгляд, было бы лучше, если бы Вейерштрасс никогда не писал, или что он предпочел бы, чтобы Римана не существовало? Итак и анализ, и синтез играют каждый свою законную роль. Но интересно поближе рассмотреть, какое место в истории науки отводится одному и какое — другому.

II

Интересная вещь! Если мы перечитаем сочинения древних, у нас явится склонность причислить всех их к интуитивистам. И однако природа всегда остается одной и той же; мало вероятно, что она только в нашу эпоху начала создавать расположенные к логике умы.

Если бы мы могли снова вникнуть в ход тех идей, которые господствовали в их время, мы узнали бы, что многие из древних геометров по своему направлению были аналитиками. Например, Евклид воздвиг здание науки, в котором его современники не могли найти недостатка. В этом обширном построении — каждая часть которого все же была обусловлена интуицией — мы можем еще и теперь без особого труда признать творчество логика.

Изменились не умы, а идеи; интуитивные умы остаются все теми же, но их читатели потребовали от них больше уступок.

Какова же причина этой эволюции?

Нетрудно обнаружить ее. Интуиция не может дать нам ни строгости, ни даже достоверности — это замечается все больше и больше.

Приведем несколько примеров. Мы знаем, что существуют непрерывные функции, не имеющие производных. Ничто так не подрывает доверие к интуиции, как эта внушенная нам логикой теорема. Наши отцы не преминули бы сказать: «очевидно, что любая непрерывная функция имеет производную, потому что любая кривая имеет касательную».

Почему же интуиция может обмануть нас в этом случае? А потому, что когда мы стараемся вообразить кривую, мы не можем представить себе ее без толщины; то же самое — когда мы представляем себе прямую, мы видим ее в форме прямолинейной полосы известной ширины. Мы отлично знаем, что эти линии не имеют толщины; мы силимся вообразить их все более и более тонкими и таким образом приблизиться к пределу; до некоторой степени нам это удается, но мы никогда не достигнем этого предела.

Теперь ясно, что мы всегда будем в состоянии представить себе эти две узкие полосы — одну прямолинейную, другую криволинейную — в таком положении, что они будут слегка захватывать друг друга, не пересекаясь.

Таким образом, мы поневоле придем, — если не будем предупреждены строгим анализом, — к заключению, что кривая всегда имеет касательную.

Для другого примера я возьму принцип Дирихле, на котором основано так много теорем математической физики; теперь он доказывается самыми строгими, но очень длинными рассуждениями; напротив, прежде довольствовались одним кратким пояснением. Определенный интеграл, зависящий от произвольной функции, никогда не может обращаться в нуль. Отсюда заключали, что он должен иметь минимум. Недостаток этого рассуждения непосредственно очевиден для нас, потому что мы употребляем абстрактный термин «функция» и потому что мы освоились со всеми особенностями, которые могут иметь функции, когда это слово понимается в самом общем значении.

Но этого бы не было, если бы мы пользовались конкретными образами — если бы, например, смотрели на эту функцию как на электрический потенциал; можно было бы справедливо утверждать, что электростатическое равновесие может быть достигнуто. Однако, может быть, сравнение из физики возбудило бы некоторое смутное недоверие. Но если бы постараться перевести рассуждение на язык геометрии, средний между языком анализа и физики, то этого недоверия, без сомнения, не возникало бы и, таким образом, может быть, можно было бы еще теперь обмануть многих непредубежденных читателей.

Итак, интуиция не дает нам достоверности. Вот почему должна была возникнуть эволюция; теперь посмотрим, как она возникла.

Вскоре заметили, что строгость не могла бы иметь места в рассуждениях, если не ввести ее сначала в определения.

Долгое время предметы, которыми занимаются математики, были по большей части плохо определены; думали, что знают их, потому что представляли себе их при помощи чувств или воображения; но получался только грубый образ, а не ясная идея, на которой можно было бы строить рассуждение.

Вот сюда-то прежде всего логики и должны были направить свои усилия.

Точно то же произошло и для иррационального числа.

Смутная идея непрерывности, которой мы обязаны интуиции, разрешилась в сложную систему неравенств, касающуюся целых чисел.

Благодаря ей трудности при переходе к пределу или при рассмотрении бесконечно малых окончательно устраняются.

Теперь в анализе остаются только целые числа или конечные и бесконечные системы целых чисел, связанных между собой сетью отношений равенства или неравенства.

Математика, как говорят, арифметизировалась.

III

Прежде всего возникает вопрос: закончилась ли эта эволюция?

Достигли ли мы наконец абсолютной строгости? Ведь на каждой стадии эволюции наши предки также верили в то, что достигли ее. Если они ошибались, то не ошибаемся ли и мы подобно им?

Мы надеемся уже не прибегать в наших рассуждениях к интуиции; философы скажут нам, что это иллюзия. Чистая логика всегда приводила бы нас только к тавтологии; она не могла бы создать ничего нового; сама по себе она не может дать начало никакой науке.

Эти философы правы в одном смысле: для того чтобы создать геометрию или какую бы то ни было науку, нужно нечто другое, чем чистая логика. Для обозначения этого другого у нас нет иного слова, кроме слова «интуиция». Но сколько различных идей скрывается под одним и тем же словом?

Сравним такие четыре аксиомы:

1) Две величины, равные третьей, равны между собой.

2) Если теорема справедлива для 1 и если доказывается, что она справедлива для $n+1$, когда справедлива для n, то она будет справедлива для всех целых чисел.

3) Если точка C лежит на прямой между A и B, а точка D между A и C, то точка D будет лежать между A и B.

4) Через одну точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

Все четыре аксиомы должны быть приписаны интуиции, и однако же первая является выражением одного из правил формальной логики; вторая — настоящее синтетическое суждение à priori, это — основание строгой математической индукции; третья есть обращение к воображению; четвертая — скрытое определение.

Интуиция не основывается неизбежно на свидетельстве чувств; чувства скоро оказались бы бессильными; мы не можем, например, представить себе тысячеугольника и однако же интуитивно рассуждаем о многоугольниках вообще, а они включают в себя как частный случай и тысячеугольник.

Вам известно, что подразумевал Понселе под *принципом непрерывности*. То, что справедливо для действительной величины, говорил Понселе, должно быть справедливо и для мнимой; то, что справедливо для гиперболы, асимптоты которой действительны, должно быть поэтому справедливо и для эллипса, асимптоты которого мнимые. Понселе был одним из самых интуитивных умов в этом веке; он был страстным интуитивистом и чуть ли не гордился этим; он видел в принципе непрерывности одну из самых смелых своих концепций, и, однако, этот принцип не покоился на свидетельстве чувств — уподоблять гиперболу эллипсу было скорее противоречием этому свидетельству. Здесь имело место лишь какое-то поспешное инстинктивное обобщение, что, впрочем, я не хочу отстаивать.

Итак, мы имеем несколько родов интуиции; сначала обращение к чувствам и воображению; затем обобщение посредством индукции, так сказать, срисованное с приемов экспериментальных наук; наконец, мы имеем интуицию чистого числа, ту интуицию, из которой вышла вторая из только что приведенных мною аксиом и которая может дать начало настоящему математическому умозаключению.

Две первые не могут дать достоверности, выше я показал это на примерах; но кто станет серьезно сомневаться относительно третьей, кто станет сомневаться в арифметике?

В новейшем анализе, — если пожелаем взять на себя труд быть строгими, — находят место лишь силлогизмы и обращения к этой интуиции чистого числа, единственной интуиции, которая не может обмануть нас. Можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость.

IV

Философы приводят еще другое возражение: «То, что вы выигрываете в строгости, — говорят они, — вы теряете в объективности. Вы можете подняться к вашему логическому идеалу, только порвав те связи, которые соединяют вас с реальностью. Ваша наука непогрешима, но она может оставаться такою, только замыкаясь в свою раковину и запрещая себе всякое сношение с внешним миром. При малейшем же применении ей надо выходить оттуда».

Я хочу, например, доказать, что такое-то свойство принадлежит такому-то объекту, понятие которого кажется мне сначала неопределимым, потому что оно интуитивно. Я сначала затрудняюсь или бываю должен удовлетвориться приближенными доказательствами; наконец, я решаюсь дать моему объекту точное определение — то, которое позволяет мне установить это свойство безукоризненным образом.

«Что же после, — говорят философы, — ведь остается еще доказать, что отвечающий этому определению объект есть тот же самый, который открыт вам интуицией; или еще, что такой-то реальный и конкретный объект, сходство которого с вашей интуитивной идеей вы думаете узнать непосредственно, отвечает вашему новому определению. Только тогда вам будет можно утверждать, что он имеет данное свойство. Вы только переместили затруднение».

Это неточно; затруднение не перемещено, оно разделено. Предложение, которое нужно было обосновать, в действительности состояло из двух различных истин, которые не сразу были отличены друг от друга. Первая — математическая истина, и теперь она строго обоснована. Вторая — истина экспериментальная. Только опыт может научить нас, что такой-то реальный, конкретный объект отвечает или не отвечает такому-то абстрактному определению. Эта вторая истина не доказывается математически, но она и не может доказываться, точно так же, как не могут доказываться эмпирические законы физических и естественных наук. Было бы безрассудно требовать большего.

Но разве не большой шаг вперед — различить то, что долгое время неправильно смешивали?

Не значит ли это, что нужно совсем откинуть это возражение философов? Этого я не хочу сказать; сделавшись строгой, математическая наука получает искусственный характер, который поражает всех; она забывает свое историческое происхождение; видно, как вопросы могут разрешаться, но уже не видно больше, как и почему они ставятся.

Это указывает нам на то, что недостаточно одной логики; что наука доказывать не есть еще вся наука и что интуиция должна сохранить свою роль как дополнение — я сказал бы, как противовес или как противоядие логики.

Я уже имел случай указать то место, какое должна иметь интуиция в преподавании математических наук. Без нее молодые умы не могли бы проникнуться пониманием математики; они не научились бы любить ее и увидели бы в ней лишь пустое словопрение; без нее особенно они никогда не сделались бы способными применять ее.

Но теперь я хотел бы говорить прежде всего о роли интуиции в самой науке. Если она полезна для студента, то она еще более полезна для творческого ума ученого.

V

Мы ищем реальность, но что такое реальность?

Физиологи учат нас, что организмы образуются из клеточек; химики прибавляют, что сами клеточки образуются из атомов. Значит ли это, что эти атомы или клеточки составляют реальность или по крайней мере единственную реальность? Тот типичный способ, по которому упорядочиваются эти клеточки и который порождает единство индивидуума, не есть ли также реальность, гораздо более интересная, чем реальность отдельных элементов, и стал ли бы думать какой-нибудь натуралист, что он достаточно знает слона, если бы он всегда изучал это животное только под микроскопом?

Но в математике есть нечто аналогичное. Логик, так сказать, разлагает каждое доказательство на множество элементарных операций; когда рассмотрят одну за другой эти операции и констатируют, что каждая из них правильна, можно ли думать, что понят истинный смысл доказательства? Поймут ли его даже тогда, когда напряжением памяти будут в состоянии повторить это доказательство, воспроизведя все эти элементарные операции в том же порядке, в каком их разместил изобретатель?

Очевидно, нет, мы еще не овладеем всецело реальностью; то нечто, что́ создает единство доказательства, совсем ускользнет от нас.

Чистый анализ предоставляет в наше распоряжение много приемов, гарантируя нам их непогрешимость; он открывает нам тысячу различных путей, которым мы смело можем вверяться; мы уверены, что не встретим там препятствий; но какой из всех этих путей скорее всего приведет нас к цели? Кто скажет нам, какой следует выбрать? Нам нужна способность, которая позволяла бы видеть цель издали, а эта способность есть интуиция. Она необходима для исследователя в выборе пути, она не менее необходима и для того, кто идет по его следам и хочет знать, почему он избрал его.

Если вы присутствуете при шахматной партии, чтобы понять ее, вам недостаточно будет знать правила ходов фигур. Это только позволило бы вам знать, что каждый ход сделан по правилам игры, а это преимущество, конечно, не имело бы большой цены. Однако в таком положении был бы читатель математической книги, если бы он был только логиком. Совсем другое дело — понимать партию; это значит знать, почему игрок выдвигает одну фигуру раньше другой, которую он мог бы подвинуть, не нарушая правил игры. Это значит подметить скрытую мысль, которая делает из этого ряда последовательных ходов нечто вроде организованного целого. Тем более эта способность необходима для самого игрока, т. е. для изобретателя.

Оставим это сравнение и вернемся к математике. Посмотрим, что произошло, например, с идеей непрерывной функции. Вначале это был только чувственный образ, например образ непрерывной черты, проведенной мелом на черной доске. Потом мало-помалу она стала очищаться: скоро воспользовались ею для построения сложной системы неравенств, которая воспроизводила, так сказать, все черты первообраза; когда это построение было окончено, тогда освободили ее от «строительных лесов», отбросив то грубое представление, которое служило ей некоторое время подпорой, а теперь стало бесполезным; не осталось больше ничего, кроме самого построения, безупречного в глазах логика. Однако же если бы первообраз совершенно исчез из нашей памяти, как бы мы угадали, по какой прихоти были построены так, одно за другим, эти неравенства?

Вы найдете, может быть, что я злоупотребляю сравнениями; однако позвольте мне сделать еще одно. Вы, конечно, видели те тонкие соединения кремнистых игл, которые образуют скелет известных губок. Когда органическая материя исчезла, остается только хрупкое, изящное кружево. Правда, тут только кремнезем, но что интересно, так это та форма, которую принял этот кремнезем, и мы не можем понять ее, если мы не знаем живой губки, которая именно и придала ему такую форму. Так, старые интуитивные понятия наших отцов даже тогда, когда мы оставили эти понятия, придают еще форму логическим построениям, которыми мы заменили их.

Этот вид целого необходим для изобретателя; он одинаково необходим и для того, кто хочет действительно понять изобретателя; может ли логика дать нам его?

Нет; названия, которое дают ей математики, было бы достаточно для того, чтобы доказать это. В математике логика называется *анализом*, анализ же значит *разделение*, *рассечение*. Поэтому она не может иметь никакого другого орудия, кроме скальпеля и микроскопа.

Таким образом, логика и интуиция играют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства; интуиция есть орудие изобретательства.

VI

Но едва только я сформулировал этот вывод, как меня охватывает сомнение.

Вначале я различал два рода математических умов: одни — логики и аналитики, другие — интуитивисты и геометры. Но ведь и аналитики также были изобретателями. Имена, которые я привел в начале этой главы, избавляют меня от необходимости настаивать на этом.

Здесь есть какое-то, по крайней мере кажущееся, противоречие, которое необходимо разъяснить.

Прежде всего, думаем ли мы, что эти логики всегда шли от общего к частному, как, казалось бы, побуждали их к этому законы формальной логики? Но так они не могли бы расширить границы науки; научное завоевание можно делать только с помощью обобщения.

В одной из глав «Науки и гипотезы» я имел случай исследовать природу математического умозаключения; я показал, как это умозаключение, не переставая быть безусловно строгим, могло поднимать нас от частного к общему при помощи процесса, который я назвал *математической индукцией.*

Благодаря этому-то процессу аналитики и двигали вперед науку и если разобраться в самых деталях их доказательств, то можно в любой момент найти его там рядом с классическим силлогизмом Аристотеля.

Итак, мы уже видим, что аналитики — не просто искусные мастера силлогизмов, вроде схоластов.

С другой стороны, можно ли поверить тому, что они всегда шли шаг за шагом, не имея пред своими взорами той цели, которой они хотели достигнуть? Им нужно было угадывать дорогу, которая привела бы их к этой цели, они нуждались в путеводителе.

Этот путеводитель — прежде всего аналогия.

Например, одно из любимых рассуждений аналитиков основано на применении возрастающих функций. Известно, что оно помогло разрешению многих проблем; тогда в чем состоит роль изобретателя, который хочет применить его к новой проблеме? Нужно прежде всего, чтобы он признал аналогию этого вопроса с теми вопросами, которые были уже разрешены с помощью этого метода; потом нужно, чтобы он заметил, чем отличается этот новый вопрос от других, и чтобы он вывел отсюда те видоизменения, которым должен подвергнуться метод.

Но как подметить эти аналогии и различия?

В только что приведенном мною примере они почти всегда очевидны, но я мог бы подыскать другие примеры, где они гораздо более скрыты, и, для того чтобы открыть их, часто требуется незаурядная проницательность.

Чтобы не упустить из виду этих скрытых аналогий, т. е. чтобы иметь возможность изобретения, аналитики должны, без помощи чувств и воображения, иметь непосредственное ощущение того, что создает единство умозаключения, что, так сказать, создает его душу и внутреннюю жизнь.

Когда беседовали с Эрмитом, он никогда не прибегал к чувственному образу, и однако вы скоро заметили бы, что самые абстрактные сущности были для него живыми существами. Он не видел их, но чувствовал, что они не представляют собой искусственного подбора, что у них есть какой-то принцип внутреннего единства.

Но, скажут, здесь опять интуиция. Станем ли мы заключать отсюда, что сделанное вначале различение было только кажущимся, что есть только один род умов и все математики — интуитивисты, по крайней мере те, которые способны изобретать?

Нет, наше различение соответствует некоторой действительности. Выше я сказал, что есть несколько видов интуиции. Я сказал, насколько интуиция чистого числа — та, из которой может вытекать строгая математическая индукция, — отличается от чувственной интуиции, для которой работает воображение в собственном смысле.

Менее ли глубока, чем кажется с первого взгляда, пропасть, которая разделяет их? Окажется ли при внимательном рассмотрении, что эта чистая интуиция сама по себе не может обойтись без помощи чувств? Это дело психолога и метафизика, и я не стану обсуждать этот вопрос. Но довольно и того, что дело подлежит сомнению, чтобы я имел право признавать и утверждать существенное различие между двумя родами интуиции; у них не один и тот же объект и они, по-видимому, пользуются двумя различными способностями нашей души; можно сказать, что это два прожектора, наведенные на два чуждые друг другу мира.

Интуиция чистого числа, интуиция чистых логических форм как раз озаряет и направляет тех, кого мы назвали *аналитиками*.

Она-то и позволяет им не только доказывать, но еще и изобретать. Через нее-то они и подмечают сразу общий план логического здания, и это — без всякого вмешательства со стороны чувств.

Отказываясь от помощи воображения, которое, как мы видели, не всегда бывает непогрешимо, они могут двигаться вперед, не боясь ошибиться. Счастливы же те, которые могут обойтись без этой поддержки! Мы должны удивляться им; но как они редки!

Итак, среди аналитиков есть изобретатели, но их немного.

Большинство из нас, если бы захотели смотреть вдаль с помощью одной чистой интуиции, тотчас почувствовали бы головокружение. Наша слабость нуждается в более прочной поддержке, и, несмотря на исключения, о которых мы только что говорили, тем не менее верно то, что чувственная интуиция есть самое обыкновенное орудие изобретения в математике. По поводу последних моих размышлений выдвигается вопрос, для которого у меня нет времени ни решить его, ни даже изложить с надлежащими подробностями.

Уместно ли сделать новое разделение и отличать среди аналитиков тех, которые пользуются главным образом этой чистой интуицией, и тех, для которых на первом месте стоит формальная логика?

Например, Эрмит, которого я неоднократно упоминал, не может быть причислен к геометрам, которые применяют чувственную интуицию; но он также и не логик в собственном смысле этого слова. Он не скрывает своего отвращения к чисто дедуктивным процессам, которые исходят от общего и направляются к частному.

Глава II

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ[1]

I

Пока мы не выходим из области сознания, понятие времени относительно ясно. Мы не только без труда отличаем настоящее ощущение от воспомина-

[1]) См. сноску на с. 80.— *Примеч. ред.*