(2.20) и (2.21) следует

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{-2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f(1+f)\right)\right]. \tag{2.23}$$

Впервые это уравнение было получено в работе Компанейца [1957] и его астрофизические приложения были детально исследованы в работах [Sunyaev, Zeldovich, 1970a; Zeldovich, Sunyaev, 1969; Илларионов, Сюняев, 1975а, б]. Отметим две важные особенности комптоновского взаимодействия квантов и электронов. Во-первых, как следует из уравнений (2.20)–(2.22), в этом процессе сохраняется полное число квантов. Умножая левую и правую части (2.20) на x^2 и интегрируя по x от 0 до ∞, легко получить

$$\frac{d}{dt}(n_\gamma a^3) \propto \int x^2 S_t[f]dx = 0, \tag{2.24}$$

где n_γ – концентрация фотонов.

Этот результат имеет наглядную интерпретацию см. [Zeldovich, Sunyaev, 1969; 1970]. Поскольку динамика процесса сопровождается перераспределением квантов, ясно, что убыль числа квантов в одном диапазоне приводит к появлению квантов в другом, так что полная их концентрация не изменяется. Второе важное следствие получается из уравнения (2.20) при его умножении на x^3 и интегрировании по x:

$$\frac{1}{\varepsilon_\gamma a^4}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_\gamma a^4) = 4\tau_t'\frac{T_e}{m_e}\left[1 - \frac{T_e^4}{4\pi^2\varepsilon_\gamma}\int_0^\infty x^4 f(1+f)dt\right], \tag{2.25}$$

где ε_γ – плотность энергии излучения. Первое слагаемое в квадратных скобках правой части уравнения (2.25) соответствует тепловому комптон-эффекту, второе описывает эффект “отдачи” [Hu, Silk, 1993].

2.4. Комптоновское искажение спектра излучения при взаимодействии с горячими электронами

В этом разделе мы рассмотрим одно из важнейших приложений теории эффекта Зельдовича–Сюняева к модели взаимодействия космологических “горячих” электронов с квантами реликтового излучения. В приближении $T_e \gg T_\gamma$ в уравнении (2.23) удобно перейти от переменной $x=\dfrac{p}{T_e}$ к $\xi=\dfrac{p}{T_\gamma}$ и пренебречь слагаемым в правой части (2.23), пропорциональными $f(f+1)\dfrac{T_\gamma}{T_e}$. Тогда (2.23) преобразуется к виду

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\xi^{-2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^4\frac{\partial f}{\partial\xi}\right]. \tag{2.26}$$

Следуя работе [Sunyaev, Zeldovich, 1970a], для нахождения решения этого уравнения в пределе $y\ll 1$, можно воспользоваться теорией возмущений, подставив в правую часть (2.26) невозмущённое планковское выражение для $f_0(x)=(e^x-1)^{-1}$ После этого для возмущения функции распределения Δf из (2.26) будем иметь

$$\Delta f\approx\frac{e^x\cdot xy}{(e^x-1)^2}\left\{\frac{x}{\tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)}-4\right\} \tag{2.27}$$

и

$$\frac{\Delta f}{f_0}\approx\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}\left\{\frac{x}{\tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)}-4\right\}. \tag{2.28}$$

В асимптотике Релея–Джинса $x\ll 1$ из уравнения (2.27) немедленно следует

$$\frac{\Delta f}{f_0}\approx\frac{\delta T_{Rj}}{T_{Rj}}=-2y. \tag{2.29}$$

В общем случае для любых значений параметра y и при любых x деформация спектра квантов может быть представлена в интегральной форме [Sunyaev, Zeldovich, 1970a]:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi y}}\int_0^\infty\frac{d\xi}{\xi}f_0(0,\xi)\exp\left[-\frac{(\ln x-\ln\xi+3y)^2}{4y}\right], \tag{2.30}$$

где по-прежнему $f_0(0,\xi)=(e^\xi-1)^{-1}$. Умножая $f(x,y)$ на x^3 и инте-

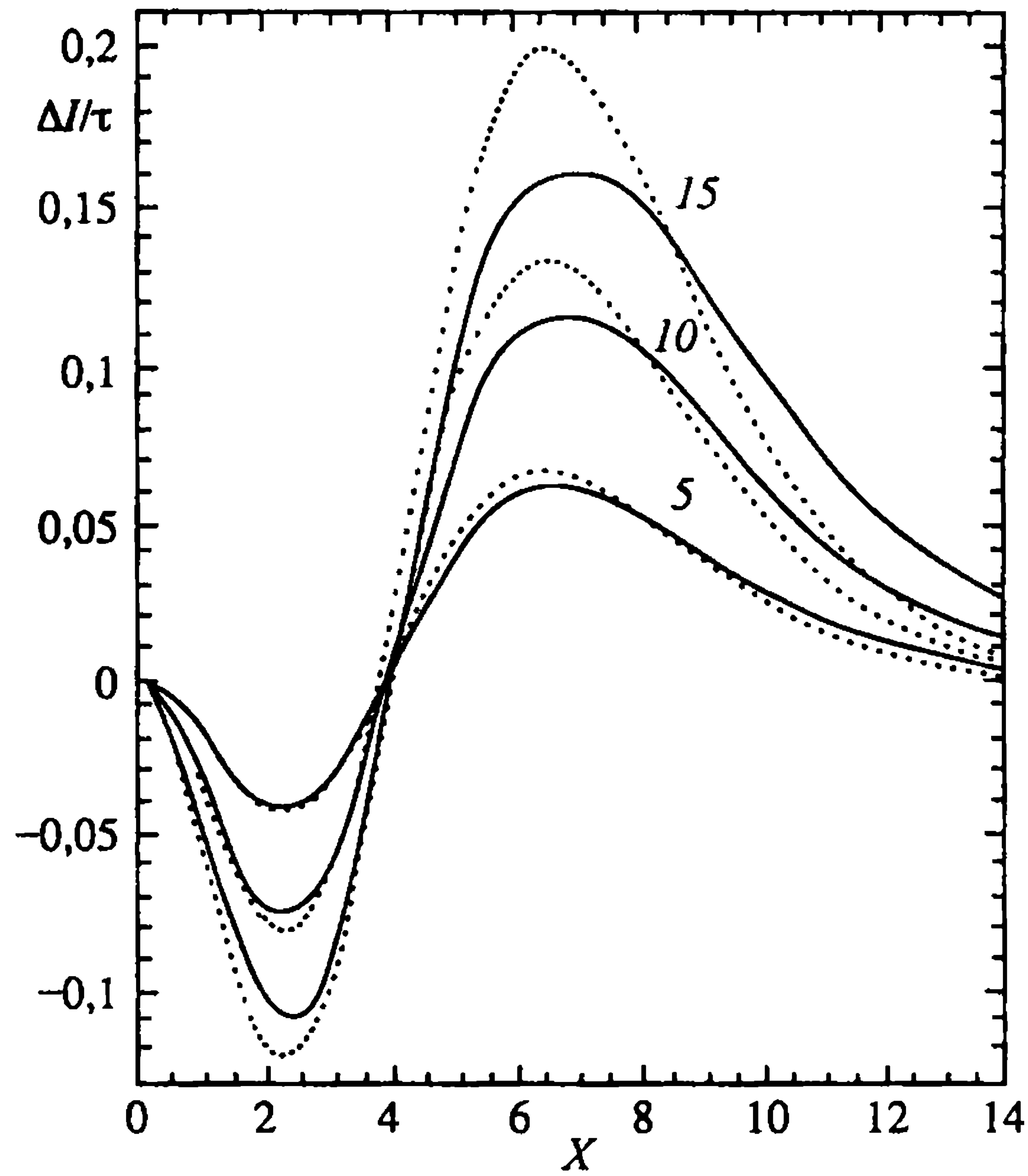

Рис. 2.1. Сравнение интенсивностей $\Delta I/\tau$ в приближении Зельдовича-Сюняева (пунктирные линии) с учётом релятивистских поправок (сплошные линии). Числами над кривыми обозначены электронные температуры в кэВ. Единицы измерения $\Delta I/\tau$ выбраны в долях $(hc)^2/2(KT_0)^3$

грируя по всей области изменения x, мы приходим к хорошо известному выражению для плотности энергии излучения

$$\varepsilon_\gamma(y) = \sigma T_{0,\gamma}^4 e^{4y}, \tag{2.31}$$

где $T_{0,\gamma}$ – невозмущённое значение температуры. Поскольку в диапазоне Релея–Джинса комптон-эффект приводит к понижению температуры, а следовательно, и плотности энергии, то становится ясно, что увеличение плотности энергии квантов (уравнение (2.30)) соответствует их накоплению в виновской области спектра. Это обстоятельство впервые было отмечено в работе [Sunyaev, Zeldovich, 1970a]. На рис. 2.1 приведён спектр реликтового излучения в приближении y искажений для разных значений параметра y. Если не вдаваться в обсуждение возможных механизмов нагрева электронов, то в самом общем случае зависимость эффективной температуры от частоты и величины параметра y может быть представлена как на рис. 2.1. Анализ этого рисунка мы отложим до следующего раздела, где будут рассмотрены релятивистские поправки к эффекту Зельдовича–Сюняева.