7.5. Статистика пиков на картах анизотропии

В предисловии мы уже отмечали, что наблюдательные данные, полученные с помощью экспериментов BOOMERANG и MAXIMA-1 [Bernardis de et al., 2000; Hanany et al., 2000], открыли новую эпоху в изучении спектра реликтового излучения. На измеренном угловом спектре (рис. 7.4) ясно виден пик на угловых масштабах, соответствующих спектральной гармонике с номером мультиполя $l \approx 200$. Это сахаровский пик. Однако для $l > 400$ структура анизотропии спектра реликтового излучения ещё не ясна и поэтому необходим последующий ряд экспериментов, таких как MAP и PLANCK.

Существует несколько факторов, играющих главную роль в будущих экспериментах. Например эксперименты MAP и PLANCK покроют значительно большую площадь неба, чем BOOMERANG и MAXIMA-1. К тому же в PLANCK имеется два HFI канала с $\nu \approx 545$ ГГц и $\nu \approx 857$ ГГц, которые обеспечивают разрешение FWHR = 5′

В данном разделе мы анализируем статистику пиков (максимумов и минимумов) на карте анизотропии реликтового излучения. Мы сравниваем эту статистику для карт, полученных в экспериментах BOOMERANG и MAXIMA-1 со статистикой

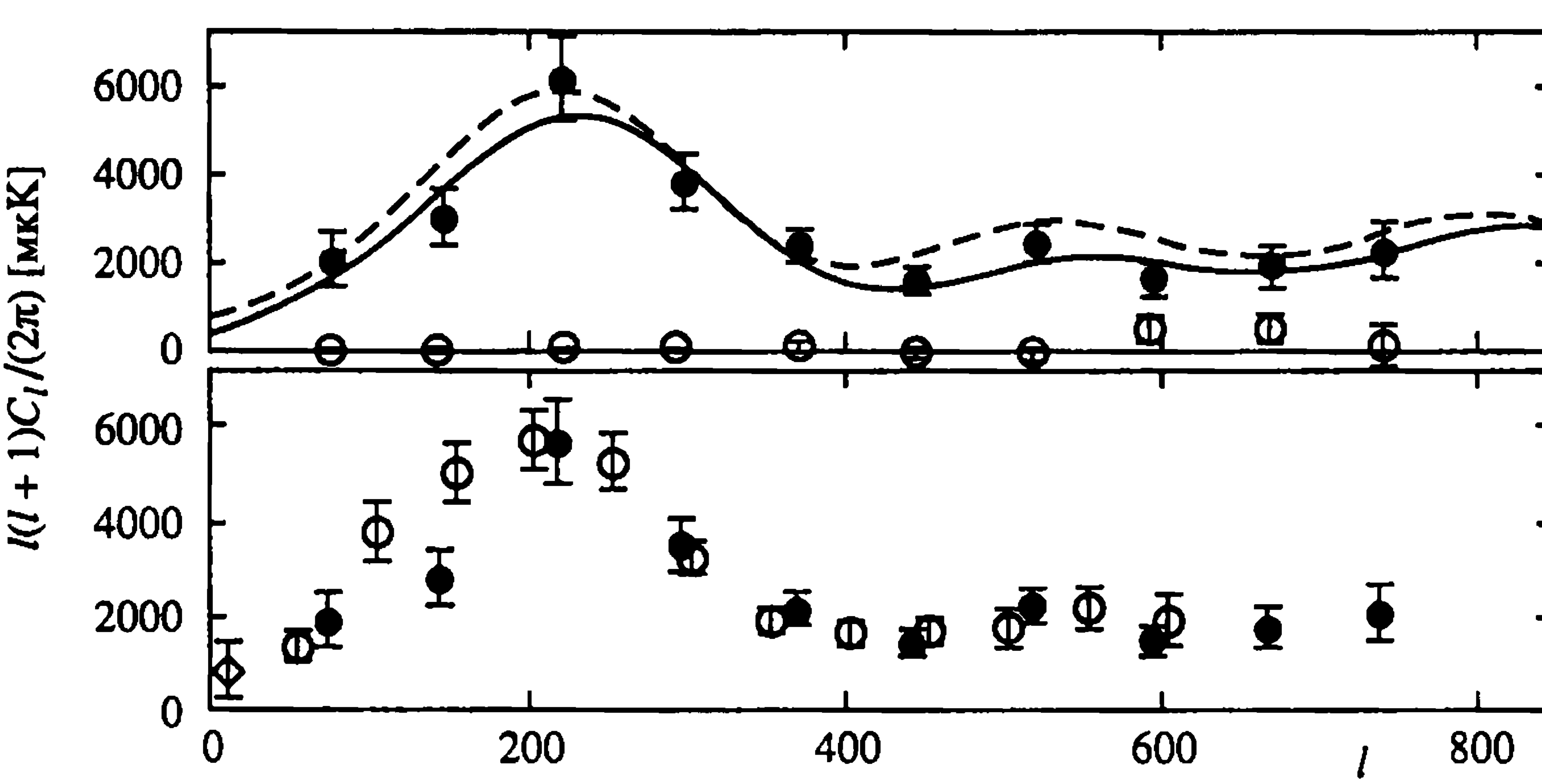

Рис. 7.4. Спектр анизотропии реликтового излучения, полученный в рамках эксперимента MAXIMA-1 [Hanany et al., 2000] (вверху), в сравнении с данными эксперимента BOOMERANG [de Bernardis et al., 2000] (внизу). Сплошная линия соответствует наиболее подходящей CDM-модели, штриховая – модели ΛCDM. Чёрные кружки соответствуют данным эксперимента MAXIMA-1, белые – данным эксперимента BOOMERANG, ромбики – данным DMR

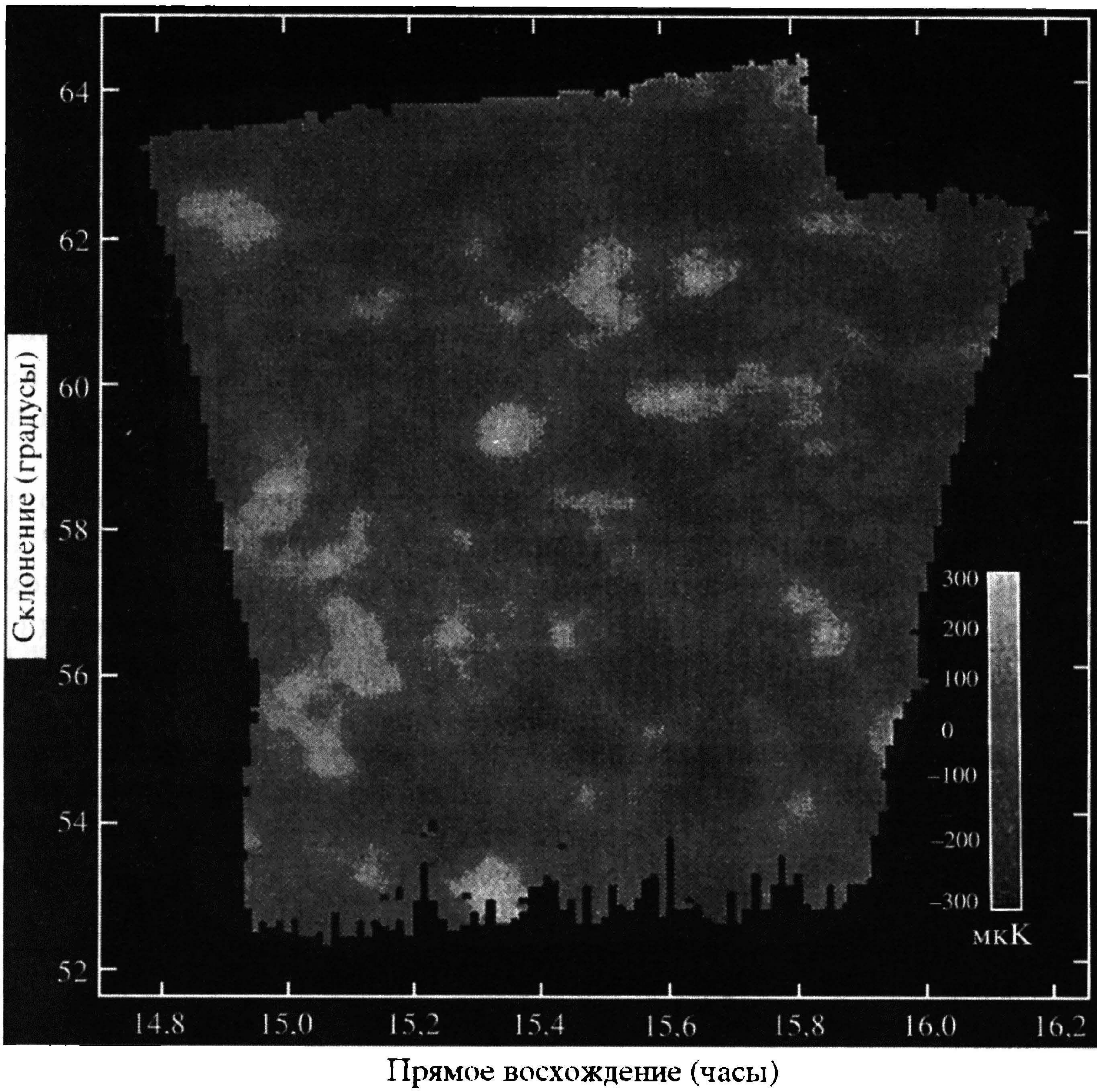

Рис. 7.5. Карта участка неба, полученная в рамках эксперимента MAXIMA-1 (использован фильтр Винера). Карта аккумулирует три 150 ГГц канала и один 240 ГГц канал

будущих наблюдений MAP и PLANCK и предсказываем некоторые свойства пиков и их форму для этих наблюдений.

Рассмотрим модель, близкую к реальной, полученной благодаря успешным балонным наблюдениям MAXIMA-1. Согласно [Hanany et al., 2000] на карте, полученной с помощью этих наблюдений, имеется пик распределения $\Delta T/T$ с высокой амплитудой (рис. 7.5). Этот пик имеет следующие координаты: склонение $\simeq 58{,}6°$, прямое восхождение 15^h35^m. В отфильтрованной фильтром Винера карте этот пик будет иметь амплитуду $\Delta T \sim (2{,}3 \div 2{,}5)\sigma$, и величина анизотропии будет монотонно падать до уровня 1σ при $15{,}2^h < \alpha \leq 15{,}4^h$ и $58{,}5° < \delta < 60°$.

Ниже мы исследуем основные свойства строения таких пиков в будущих измерениях реликтового излучения в эксперименте PLANCK, которые будут выполняться с лучшим угловым разрешением, чем теперешние измерения. Аналогичное предсказание было предложено в работе [Bunn, Hoffman, Silk, 1995] для эксперимента на Тенерифе, в котором использовались данные COBE DMR, хотя и другим методом. Например, мы показываем, что более точные измерения не выявляют внутреннее строение в виде новых высоких ($>1{,}5\sigma$) пиков внутри области: упомянутой выше.

В реальном эксперименте антенна имеет конечное разрешение, а спектральные параметры зависят от диаграммы направленности θ_A и, следовательно, от количества сахаровских пиков, которые могут быть разрешены этой антенной. Это значит, что на будущих картах PLANCK строение высоких пиков $\Delta T/T$ может оказаться отличным от соответствующего строения пиков на картах, полученных с помощью BOOMERANG и MAXIMA-1.

Для всех космологических моделей спектр анизотропии реликтового излучения C_l может быть описан в виде суммы гауссовых пиков с центрами в точках максимумов l_n ($l \geq 30$) [Kotok et al., 2001]

$$\frac{l(l+1)C_l}{2N\pi} = \left\{\sum_n A_n \exp\left[-\frac{(l-l_n)^2}{2d_n^2}\right] + 1\right\} e^{-l^2 s^2}, \tag{7.28}$$

где n – количество пиков, d_n – ширина пика, l_n – его положение, N – нормировочный множитель для низких мультиполей (например, нормировка по COBE данным). Последний член уравнения (7.28) учитывает затухание Силка на угловом масштабе s. Заметим, что мы не ввели в уравнение (7.28) никаких низко- или высокомультипольных фильтров (функций пропускания и антенну). Это означает, что уравнение (7.28) описывает начальный спектр возмущений на небе без какого бы то ни было сглаживания. В действительности оба последних фактора очень важны и их влияние на карты $\Delta T/T$ играет решающую роль. Спектр вида (7.28) даёт информацию о влиянии каждого сахаровского пика на топологию карт $\Delta T/T$. Таким образом, используя приближение (7.28), мы можем изучить влияние первого, второго и последующих сахаровских пиков на спектральные параметры будущих карт, полученных с помощью экспериментов MAP, PLANCK и др.

Следующий вопрос связан с функцией пропускания $W(l)$ данного эксперимента. Мы будем моделировать основные свойства функции $W(l)$ в приближении малых угловых размеров карты следующим образом:

$$G(l)=\frac{W(l)}{l}=\exp\left[-l(l+1)\theta_A^2\right]\begin{cases} l^m & l\ll 30 \\ l^{-1} & l\gg 30 \end{cases} \qquad (7.29)$$

(для двухлучевой схемы низкомультипольной фильтрации $m = 2$, а для трёхлучевой $m = 3$). Экспонента в уравнении (7.29) описывает антенну с $\theta_A \simeq 7{,}45 \quad 10^{-3}\left(\frac{\theta_{\text{FWHM}}}{1^\circ}\right)$. Для описания асимптот множителя уравнения (7.29) введём функцию, которая соответствует обоим пределам,

$$G(l)\simeq\frac{(lR)^{m+1}}{l[1+(lR)^{m+1}]}, \qquad (7.30)$$

где R – характерный угловой масштаб (см. уравнение (7.29)) для низкомультипольной фильтрации. Таким образом, спектральные параметры для такой модели выражаются следующим соотношением:

$$\sigma_i^2=\int\limits_0^\infty dl l^{2i}g(l)\left[1+\sum_n A_n\exp\left(-\frac{(l-l_n)^2}{2d_n^2}\right)\right]\ e^{-l^2\left(s^2+\theta_A^2\right)},\ \ i=0,1,2. \qquad (7.31)$$

Заметим, что для второго и более далёких сахаровских пиков $l_n^2/d_n^2\gg 1$ и только для первого пика $l_n^2/d_1^2\simeq 5$. Для аналитического приближения интеграла в уравнении (7.31) требуется асимптотика $l_n^2/d_n^2\gg 1$ для всех пиков спектра (7.28). Используя это приближение, получаем следующие формулы для спектральных параметров σ_i^2:

$$\sigma_0^2=\frac{1}{2}\left[2\ln\frac{r}{\xi}-C+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_n A_n\frac{d_n}{l_n}\exp\left(\frac{-l_n^2\xi^2}{1+2d_n^2\xi^2}\right)\cdot\left(1+2d_n^2\right)^{1/2}\right], \qquad (7.32)$$

$$\sigma_1^2=\frac{1}{2\xi^2}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_n\frac{A_nl_nd_n\exp\left(\frac{-l_n^2\xi^2}{1+2d_n^2\xi^2}\right)}{(1+2d_n^2\xi^2)^{3/2}}\left[1+\Phi\left(\frac{l_n}{d_n\sqrt{2(1+2_n^2\xi^2)}}\right)\right], \qquad (7.33)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2\xi^4} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n \frac{A_n l_n^3 d_n \exp\left(\dfrac{-l_n^2\xi^2}{1+2d_n^2\xi^2}\right)}{(1+2d_n^2\xi^2)^{7/2}} \left[1+\Phi\left(\frac{l_n}{d_n\sqrt{2(1+2d_n^2\xi^2)}}\right)\right]. \tag{7.34}$$

Здесь C – константа Эйлера, $\xi^2 = \theta_A^2 + s^2$, $\Phi(x) = 2/\sqrt{\pi}\int\limits_0^x dx e^{-x^2}$ – интеграл вероятности. Как видно из уравнения (7.32), для расчёта дисперсии σ_0^2 важен только первый сахаровский пик. Влиянием второго и последующих пиков можно практически пренебречь из-за падения амплитуды A_n и соотношения $d_n l_n$. Однако эти пики определяют топологическое строение карт $\Delta T/T$ (см. уравнения (7.35), (7.36)) – например, количество максимумов и минимумов для различных порогов $\nu_n\sigma_0 = \Delta T/T$. Уравнения (7.33) и (7.34) описывают реальную модель с $d_n^2\xi^2 \ll 1$ и $l_n^2\xi^2 \le 1$ В этой модели плотность всех пиков при $\nu(-\infty, \infty)$ выражается особенно просто,

$$N_{PK}^+ = N_{PK}^- = \frac{1}{8\pi\sqrt{3}}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(\text{ср})^{-1}, \tag{7.35}$$

где N_{PK}^+ и N_{PK}^- – плотности всех максимумов и минимумов соответственно.

Рассмотрим теперь модельную ситуацию, в которой все сахаровские пики сглажены ($A_n = 0$). Для такой модели спектральные параметры θ_* и γ имеют вид

$$\theta_*^2 = 2\xi^2, \qquad \gamma = \left(2\ln\frac{R}{\xi} - C\right)^{-1/2} \tag{7.36}$$

и плотности всех максимумов и минимумов произвольной высоты суть $N_{PK}^+ = N_{PK}^- = \frac{1}{8\pi\sqrt{3}}\xi^{-3}$ Если для некоторого $\Delta T/T$ эксперимента обозначить степень покрытия неба через f_{sky} (например, $f_{\text{sky}} \simeq 0{,}3\%$ для эксперимента MAXIMA-1), то количество максимумов (или минимумов) на наблюдательной карте будет

$$N_{\max} \simeq 16\left(\frac{f_{\text{sky}}}{0{,}003}\right)\left(\frac{\theta_{\text{FWHM}}}{1^\circ}\right)^{-2} \tag{7.37}$$

Согласно [de Bernardis et al., 2000; Hanany et al., 2000] для экспериментов MAXIMA-1 и BOOMERANG антенна соответствует FWHM $\simeq 10'$ Это означает, что при отсутствии сахаровских пиков в спектре мы можем обнаружить 576 максимумов на соответствующих картах. Однако из уравнений (7.32)÷(7.34) следует, что наличие сахаровских пиков в первичном спектре уменьшает количество пиков на карте до 271. Таким образом, благодаря нашему анализу становится ясно, что влияние сахаровских пиков ведёт к уменьшению примерно в два раза количества горячих и холодных пятен на карте.

Следующий вопрос, который будет нас интересовать, это насколько чувствительна топология карты $\Delta T/T$ к амплитудам второго A_2 и третьего A_3 пиков, если предположить, что амплитуда и положение первого пика известны. Чтобы дать ответ на этот вопрос, сравним $\gamma(A_2, A_3)$ и $N_{pk}(A_2, A_3)$ для следующих моделей. В первой модели берём амплитуду A_1, соответствующую данным [Hanany et al., 2000], а координаты и ширины последующих пиков будем считать такими: $l_1 = 210$ при ширине $d_1 = 95$, $l_2 = 580$ при ширине $d_2 = 110$ и $l_3 = 950$ при ширине $d_3 = 130$. Соответствующие графики даны на рис. 7.6.

Следующая модель (рис. 7.7) соответствует гипотетической ситуации, когда амплитуда первого доплеровского пика в два раза меньше, чем в предыдущем случае. Как видно из уравнений (7.32)–(7.34) и рисунков 7.6 и 7.7, в этой второй "игрушечной модели" структура спектральных параметров $\gamma(A_2, A_3)$ и $N_{pk}(A_2, A_3)$ коренным образом изменяется. Количество максимумов возрастает и становится больше 420, тогда как параметр γ практически сохраняет своё значение $\gamma \simeq 0{,}4 \div 0{,}47$. Этот результат важен и для анализа глобальной и локальной топологий карт. В экспериментах BOOMERANG и MAXIMA-1 положения и амплитуда первого сахаровского пика в спектре C_l были измерены с точностью 10%. Это означает, что теоретически предсказанное количество пиков реликтового излучения на наблюдательных картах может измениться от 263 до 279 из-за этой 10-процентной погрешности. Разница в 16 пиков соответствует $\frac{\delta N}{N} \sim N^{1/2}$ статистической флуктуации числа пиков N на карте практически без особых изменений параметра γ. В целом, основываясь на приведённых выше результатах, можно констатировать, что распределение пиков на картах MAXIMA-1 соответствует гипотезе о гауссовой природе сигнала.

Однако возникает вопрос: как изменится локальная топология карты реликтового излучения при увеличении разрешающей способности приёмной аппаратуры и уменьшении уровня её шумов? Смогут ли будущие измерения выявить внутреннее строение пиков, которые были найдены благодаря экспериментам BOOMERANG и MAXIMA-1? Например, смогут ли они обнаружить новые пики в тонкой структуре внутри области $0 \le \nu \le 2$? И если да, то какова будет типичная высота этих пиков? Ответы на эти вопросы зависят от пик-пик корреляции на картах высокого разрешения. Разброс количества пиков от одной реализации к другой по сетке Ω_p связан с пик-пик корреляционной функцией C_{pk-pk} следующим образом:

$$\langle(\Delta N_{pk}^{+})^2\rangle / \langle N_{pk}^{+}\rangle^2 = \langle N_{pk}^{+}\rangle^{-1} + \int \frac{d\Omega_{\bar{q}} d\Omega_{\bar{q}'}}{\Omega_p^2} C_{pk-pk}(\bar{q} - \bar{q}'), \qquad (7.38)$$

где $\langle N_{pk}^{+}\rangle = n_{pk}^{+}(\nu_t)\Omega_p$, $n_{pk}^{+}(\nu_t)$ – концентрация максимумов с высотой ν выше некоторого порога ν_t. Заметим, что первый член уравнения (7.38) соответствует пуассоновскому распределению пиков. Сравнительно недавно Хивенс и Снетс [Heavens, Sheth, 1999] провели аналитический и численный расчёты пик-пик корреляционной функции и показали, что C_{pk-pk} стремится к нулю при $\theta < \theta_*$ и достигает отрицательного значения $C_{pk-pk} = -1$ при $\theta = 0$. Этот результат отражает тот факт, что разные высокие пики не могут находиться близко друг к другу. Так, например, два высоких пика с амплитудами $\nu_1 \sim \nu_2 \sim$ $\sim (2 \div 2{,}5)\sigma$ должны отстоять друг от друга на расстояние $\theta \gg \theta_*$. Согласно работе [Heavens, Sheth, 1999] типичный угловой масштаб θ_* для наиболее предпочтительной космологической модели ΛCDM близок к 20′. Этот масштаб в два раза больше, чем FWHM в экспериментах BOOMERANG и MAXIMA-1 и в четыре раза больше, чем в эксперименте PLANCK. Полезно, однако, отметить, что на хорошо разрешённой карте внутри упомянутой области вокруг высокого пика может оказаться около десяти низкоамплитудных $\nu \le 1$ пиков. Таким образом, можно заключить, что изолированные $(2 \div 2{,}5)\sigma$ пики, обнаруженные на плохо разрешённых картах BOOMERANG и MAXIMA-1, проявят себя как изолированные пики на картах PLANCK.

Вернёмся к рассмотрению высокого пика с $\sigma = 58{,}6°$, $RA = 15^h 35^m$ на карте MAXIMA-1. Расположение этого пика

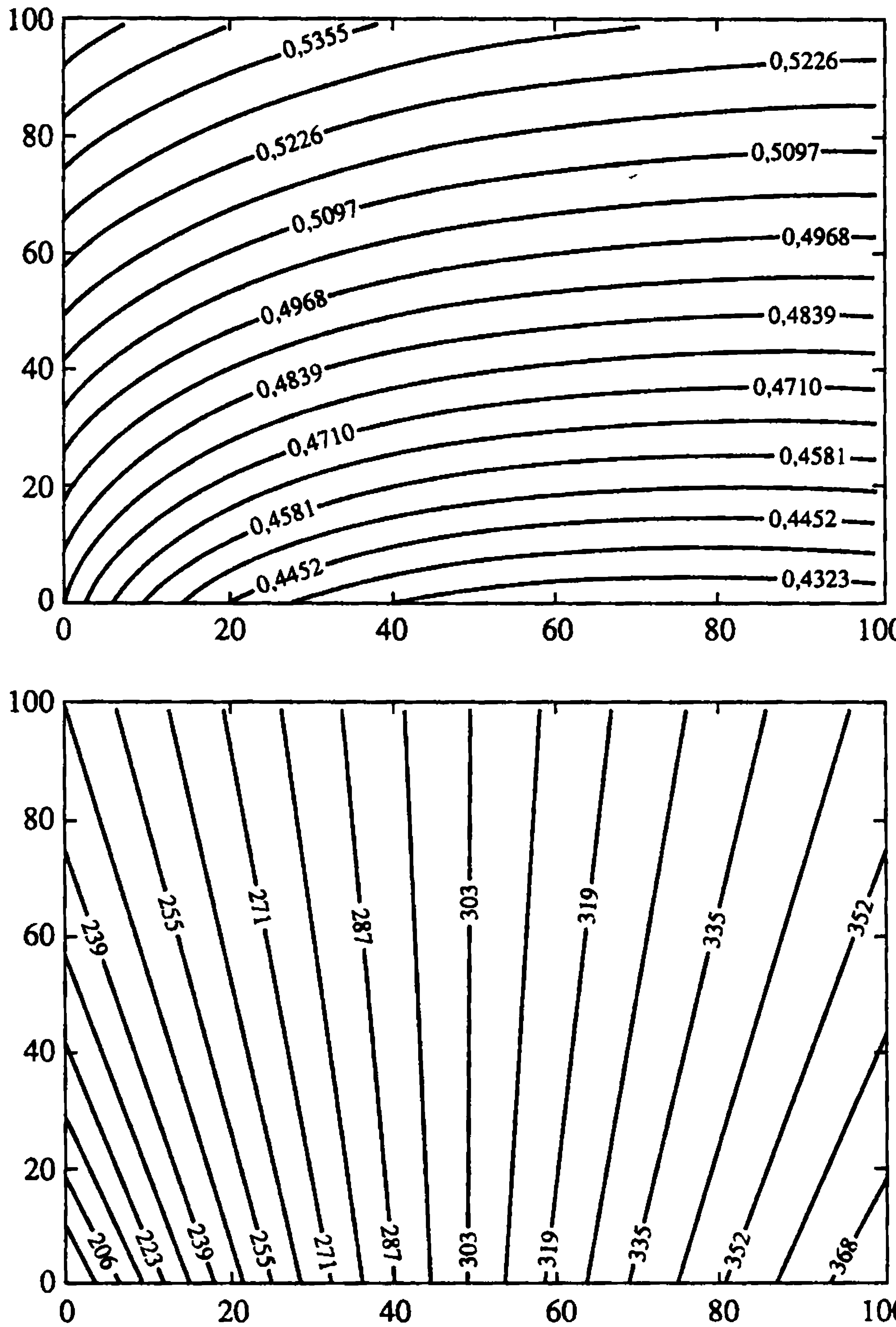

Рис. 7.6. Зависимость $\gamma(x, y)$ (вверху) и $N_{pk}(x, y)$ (внизу) от параметров $x = 10^2 A_2/A_1$ (горизонтальная ось) и $y = 10^2 A_3/A_1$ (вертикальная ось). Числа на кривых соответствуют значениям $\gamma(x, y)$ и $N_{pk}(x, y)$. Отметим, что точка $x = 26$, $y = 46$ соответствует амплитудам первого и двух следующих доплеровских пиков согласно экспериментам MAXIMA-1 и BOOMERANG

практически не зависит от хорошего углового разрешения будущего эксперимента PLANCK, а его амплитуда может быть описана следующим образом. Представим себе, что благодаря идеальному эксперименту с антенной в виде δ-функции найден самый высокий пик с координатами $\overline{\delta}$, $\overline{RA}$. Амплитуду такого

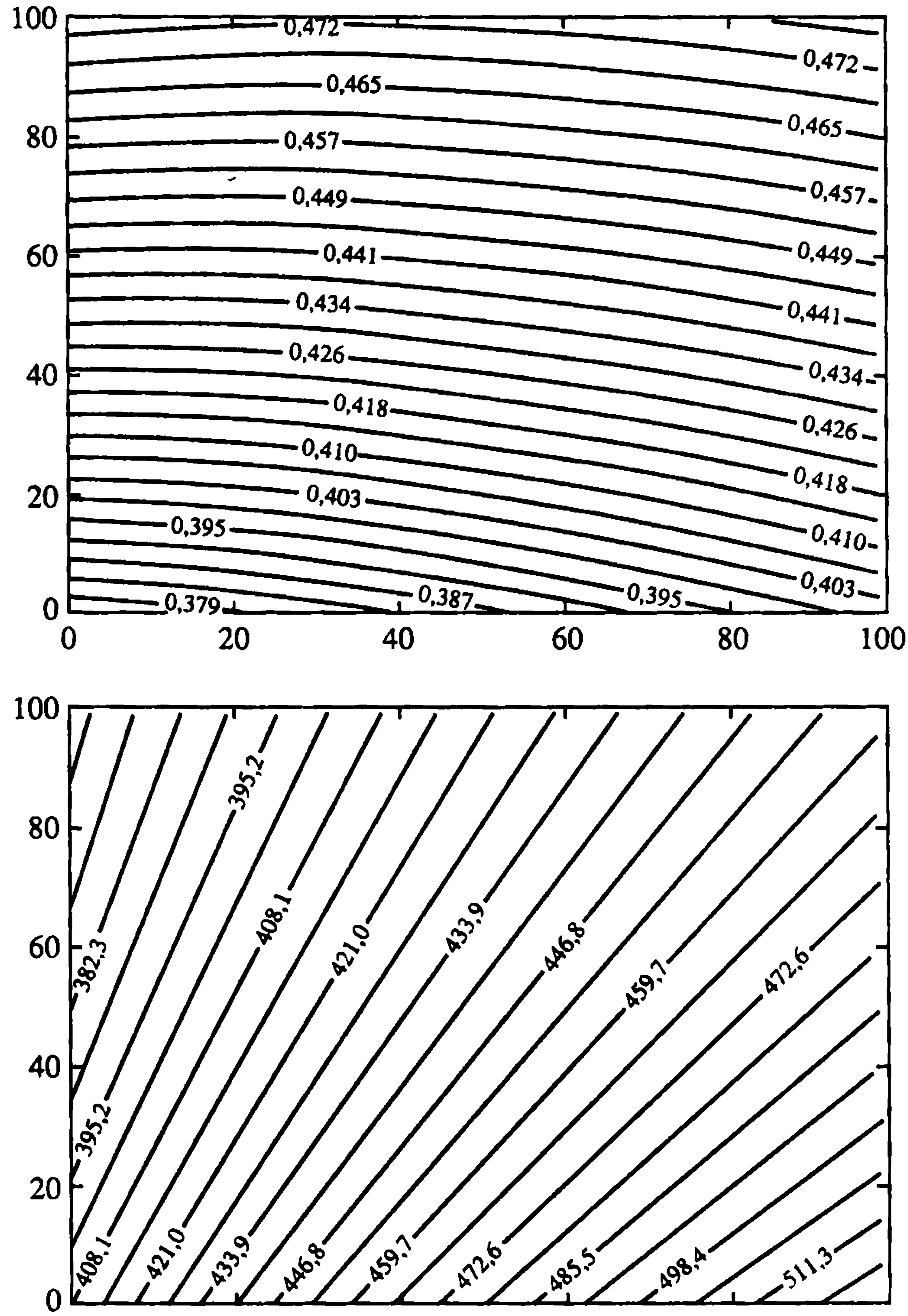

Рис. 7.7. То же, что и на рис. 7.6, но для игрушечной модели с амплитудой первого сахаровского пика в два раза меньшей, чем на рис. 7.6

пика, измеренную в единицах дисперсии, можно выразить в виде

$$\nu_{in} = \Delta T / \sigma_{0(in)}, \tag{7.39}$$

где $\sigma_{0(in)}$ соответствует уравнению (7.33) при $\theta = 0$ и $\xi = s$. Для простоты предположим, что распределение $\Delta(x, y)$ вокруг точки максимума гауссово с характерными масштабами a и $b = ka$,

k – константа

$$\Delta T(x,y) = \nu_{\text{in}}\sigma_{0(\text{in})}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}\right), \tag{7.40}$$

параметр a пропорционален типичному корреляционному масштабу первичного сигнала. Следуя [BE], можно описать локальную форму пика высотой ν, измеряя радиальную кривизну Γ и "эллиптичность" ε в полярных координатах θ и φ,

$$\delta(\bar\theta,\bar\varphi) = \sigma_{0(\text{in})}\left[\nu_{\text{in}}-\frac{1}{2}\gamma\Gamma\left(\frac{\bar\theta}{\theta_C}\right)^2(1+2e_1\cos 2\bar\varphi)\right]. \tag{7.41}$$

Пусть $\theta^2 = x^2+y^2$ и $\cos 2\varphi = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. После этого находим

$$a^2 = \frac{\nu_{\text{in}}\theta_c^2}{(1+2e)\gamma\Gamma},\qquad b^2 = \frac{\nu_{\text{in}}\theta_c^2}{(1-2e)\gamma\Gamma},\qquad \varkappa^2 = \frac{1+2e_1}{1-2e_1}. \tag{7.42}$$

Учитывая эксцентричность, переписываем последнее соотношение уравнения (7.42) в виде

$$\varkappa^2 = 1/(1-\varepsilon^2). \tag{7.43}$$

Сравним два эксперимента, которые бы обследовали одну и ту же часть неба в окрестности пика с различным разрешением θ_1 и θ_2. Предположим, что θ_1 соответствует эксперименту MAXIMA-1, а θ_2 – эксперименту PLANCK ($\theta_1 \simeq 2\theta_2$). Обозначим амплитуду максимума в плохо разрешённом эксперименте через ν_{maxima}, а в хорошо разрешённом эксперименте – ν_{planck}. Для таких моделей амплитуда выражается уравнением

$$\widetilde{\Delta T}_j(x,y) = \frac{1}{2\pi\theta_j^2}\int dx'dy'\Delta T(x',y')\exp\left[-\frac{(\vec r-\vec r\,')^2}{2\theta_j^2}\right], \tag{7.44}$$

где индекс j = 1, 2 соответствует θ_1 и θ_2, а $\vec r(x,y)$ и $\vec r(x',y')$ являются векторами в декартовой системе координат, которые берут начало в центральной точке максимума. Вид функции $\widetilde{\Delta T}_j(x,y)$ из уравнения (7.40) для плохо и хорошо разрешённых экспериментов описывается следующим уравнением:

$$\widetilde{\Delta T}_j(x,y) = \frac{\nu_{\text{in}}\sigma_{0(\text{in})}ab}{\left[\left(a^2+\theta_j^2\right)\left(b^2+\theta_j^2\right)\right]^{1/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2\left(a^2+\theta_j^2\right)}-\frac{y^2}{2\left(b^2+\theta_j^2\right)}\right]. \tag{7.45}$$

Эта кривая определяет параметр $\xi^2 = \left(b^2+\theta^2\right)/\left(a^2+\theta^2\right)$, который можно измерить в окрестности пика при некотором пороге $\nu_t\sigma_0^{(1)}$, где $\sigma_0^{(1)}$ – дисперсия возмущений в плохо разрешённом эксперименте. В результате, согласно уравнению (7.41), амплитуда пика записывается как

$$\nu_{\rm maxima}\sigma_0^{(1)} = \frac{\nu_{\rm in}\sigma_0^{(\rm in)}\varkappa}{\xi_1(1+\theta_1^2/a^2)}. \tag{7.46}$$

Для хорошо разрешённых экспериментов из того же уравнения (15) имеем

$$\nu_{\rm planck}\sigma_0^{(2)} \simeq \frac{\nu_{\rm in}\sigma_0^{(\rm in)}\varkappa}{\left[\left(1+\theta_2^2/a^2\right)\left(\varkappa^2+\theta_2^2/a^2\right)\right]^{1/2}}, \tag{7.47}$$

а поскольку разница между $\sigma^{(\rm in)}$, $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ всего лишь логарифмическая, имеем

$$\nu_{\rm planck} \approx \nu_{\rm maxima}\frac{\xi_1(1+4\mu^2)}{\left[\left(1+\mu^2\right)\left(\varkappa^2+\mu^2\right)\right]^{1/2}}. \tag{7.48}$$

Например, для пика из MAXIMA-1 с координатами $\delta = 58{,}6°$, $\alpha = 15^{\rm h}35^{\rm m}$ это отношение равно ~ 1,2 ÷ 1,4. Принимая во внимание этот результат, мы можем трансформировать пики с $\nu_1 \simeq 2 \div 3$ из карты MAXIMA-1 в будущую карту PLANCK. Фактически это означает, что рассматриваемый нами пик с $\delta \simeq 58{,}6°$ и $\alpha = 15^{\rm h}35^{\rm m}$ соответствуют максимуму в распределении первичного сигнала на уровне $\nu \simeq 4$. Совершенно очевидно, что аналогичное предсказание можно сделать и по поводу высокоамплитудных пиков на карте радионеба, полученной в эксперименте BOOMEGANG.

7.6. Кластеризация пиков на картах анизотропии

При анализе структуры ΔT в окрестности точек экстремумов мы уже использовали результаты теории кластеризации пиков случайных гауссовых полей, астрофизические приложения которой были детально исследованы в работах [BBKS; BE; D. Novikov, Jørgensen, 1996a,b; Heavens, Sneth, 1999]. Очевидно, что в допол-