

«длины» падающего участка характеристики, имеем:

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\frac{2}{3} & \text{при } x < -1, \\ -x + \frac{x^3}{3} & \text{при } |x| \leq 1, \\ -\frac{2}{3} & \text{при } x \geq 1; \end{cases} \quad \varphi'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq 1, \\ x^2 - 1 & \text{при } |x| \leq 1; \end{cases}$$

$x' = \sqrt{\frac{K-1}{K}}$  (как и в предыдущем примере), а  $x''$  определяется уравнением

$$x'' - \frac{2}{3}K = -\{x' + K\varphi(x')\} = \frac{2}{3}(K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}},$$

т. е.

$$x'' = \frac{2}{3} \left\{ (K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}} + K \right\}^1.$$

Тогда

$$\tau = 2 \int_1^1 \left\{ Kx - \frac{K-1}{x} \right\} dx + 2 \int_1^{x''} \frac{dx}{x} = 1 - (K-1) \ln \frac{K}{K-1} + \\ + 2 \ln \frac{2}{3} \left[ (K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}} + K \right]$$

и

$$T = C(R_a - R_g) \left\{ 1 - (K-1) \ln \frac{K}{K-1} + \right. \\ \left. + 2 \ln \frac{2}{3} \left[ (K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}} + K \right] \right\}.$$

## § 6. Механические разрывные колебания

Рассмотрим механические колебания, которые могут при известных условиях совершать тела, испытывающие большое трение, но обладающие малой массой [69]. Для конкретности будем считать, что речь идет о тормозном устройстве, схематически изображенном на рис. 533<sup>2)</sup>. Для этого устройства имеем следующее уравнение движения:

$$J\ddot{\varphi} = -k\varphi + M(\Omega - \omega)$$

<sup>1)</sup> Мы предполагали здесь, что  $x'' > 1$ ; это выполняется, как нетрудно видеть, при  $K > 4/3$ . Если же  $1 < K < 4/3$ , то при автоколебаниях мульти-вibratorа ламповая группа будет работать только на падающем участке характеристики, вследствие чего период автоколебаний будет выражаться формулой, полученной в предыдущем примере.

<sup>2)</sup> Заметим, что это устройство представляет собой (конечно, сильно схематизированную) модель обычных тормозных устройств и зажима Прони, применяемого для измерения мощности. Поэтому все сказанное ниже относительно колебаний в такой системе, по-видимому, может служить упрощенной теорией вибрации тормозов и колебаний зажима Прони, часто наблюдаемых на практике.

или эквивалентную систему двух уравнений первого порядка:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad J\dot{\omega} = -k\varphi + M(\Omega - \omega), \quad (10.31)$$

где  $\varphi$  — угол поворота тормозной колодки (относительно положения, в котором момент силы пружин равен нулю),  $J$  — момент инерции тормозной колодки,  $k$  — коэффициент упругости системы,  $\Omega$  — угловая скорость вала (мы будем полагать ниже, что  $\Omega = \text{const}$ ) и  $M(\Omega - \omega)$  — функция, выражающая зависимость момента силы сухого трения от относительной скорости  $\Omega - \omega$  (рис. 534).

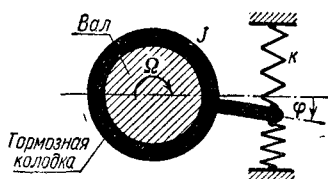


Рис. 533.

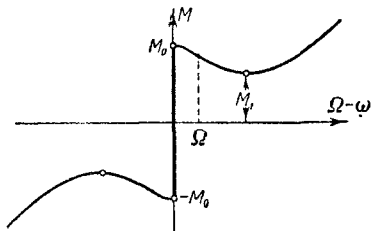


Рис. 534.

Строго говоря, момент сил трения  $M$  является функцией не только относительной скорости  $\Omega - \omega$ , но и угла  $\varphi$ ; именно, при  $\Omega - \omega = 0$

$$M = \begin{cases} M_0 & \text{при } k\varphi > M_0, \\ k\varphi & \text{при } |k\varphi| \leq M_0, \\ -M_0 & \text{при } k\varphi < -M_0, \end{cases}$$

где  $M_0$  — максимальная величина момента силы трения покоя (т. е. момент силы трения при отсутствии движения колодки относительно вала уравнивает момент сил пружин  $\dot{k}\varphi$ , если последний не превышает по абсолютной величине момент силы трения покоя  $M_0$ ). Ниже мы будем считать, что характеристика трения имеет падающие участки, где момент силы трения  $M$  убывает с увеличением относительной скорости  $\Omega - \omega$ . Только при наличии в характеристике трения таких падающих участков мы сможем объяснить появление автоколебаний в рассматриваемой нами механической системе.

Рассматриваемая нами система имеет единственное состояние равновесия:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \omega = 0,$$

причем угол  $\varphi_0$  при равновесии, очевидно, определяется условием

$$k\varphi_0 = M(\Omega).$$

Это состояние равновесия неустойчиво (система самовозбуждается и в ней будут устанавливаться автоколебания), если

$$M'(\Omega) < 0$$

(см. также § 6 гл. I); это условие мы будем считать в дальнейшем выполненным. Если  $-M'(\Omega) \ll \sqrt{kJ}$  и нелинейность характеристики трения (в интересующем нас интервале скоростей) невелика, то автоколебания системы будут близки к синусоидальным (их можно рассчитать, пользуясь методами Ван-дер-Поля или Пуанкаре, изложенными в предыдущей главе).

Мы рассмотрим сейчас другой предельный случай, когда тормозная колодка имеет *малый* момент инерции

$$J \ll \frac{[M'(\Omega)]^2}{k},$$

вследствие чего, как мы увидим, автоколебания будут *релаксационными*, т. е. сильно отличающимися от синусоидальных. В этом случае колебательный процесс отчетливо распадается на два чередующихся и существенно различающихся друг от друга типа движений.

1) В состояниях, в которых момент силы пружин уравновешен (или почти уравновешен) моментом силы трения, система будет иметь сравнительно небольшие ускорения  $\dot{\omega}$ , несмотря на малый момент инерции  $J$ , что приведет при движениях через эти состояния к *сравнительно медленным изменениям скорости*  $\omega$ . В этой области член  $J\dot{\omega}$  мал:

$$J|\dot{\omega}| \ll k|\varphi| \approx |M(\Omega - \omega)|,$$

и им можно пренебречь. Поэтому эти состояния, в которых  $\omega$  изменяется сравнительно медленно, изображаются на фазовой плоскости  $\varphi, \omega$  точками, лежащими в малой окрестности линии  $F$ :

$$F(\varphi, \omega) \equiv -k\varphi + M(\Omega - \omega) = 0,$$

являющейся, очевидно, фазовой линией «вырожденной» системы (с  $J=0$ ); эта окрестность стягивается к  $F$ , когда  $J$  уменьшается, стремясь к нулю.

2) В состояниях, в которых моменты силы трения и силы пружин не уравновешивают друг друга, ускорения  $\dot{\omega}$  очень велики, поскольку момент инерции колодки  $J$  достаточно мал. Этим состояниям, в которых *скорость  $\omega$  изменяется очень быстро*, на фазовой плоскости  $\varphi, \omega$  соответствуют точки, лежащие вне некоторой малой окрестности той же линии  $F$ , также стягивающейся к  $F$  при  $J \rightarrow +0$ . В этой области быстрых изменений скорости  $\omega$  при  $J \rightarrow +0$   $\dot{\omega} \rightarrow \infty$  ( $\dot{\omega} \rightarrow +\infty$  слева от линии  $F$  и  $\dot{\omega} \rightarrow -\infty$  справа от нее), в то время как сами скорости  $\dot{\varphi} = \dot{\omega}$  остаются конечными. В этой области

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{J\dot{\omega}}{-k\varphi + M(\Omega - \omega)} \rightarrow 0$$

при  $J \rightarrow +0$ , т. е. она будет заполнена фазовыми траекториями, близкими к вертикальным прямым  $\varphi = \text{const}$ , по которым изображающая точка будет двигаться «скачком» (с  $\dot{\omega} \rightarrow \infty$  при  $J \rightarrow +0$ ).

В соответствии с этим мы получаем разбиение фазовой плоскости на траектории для предельного случая  $J \rightarrow +0$ , изображенное на рис. 535. Вся плоскость вне линии  $F$  заполнена вертикальными прямолинейными фазовыми траекториями «бесконечных» ускорений, которые идут из бесконечности и от участков линии  $F$ , на которых

$$F'_\omega = -M'(\Omega - \omega) > 0$$

и которые, следовательно, соответствуют падающим участкам характеристики трения, к остальным участкам  $F^+$  линии  $F$ , изображенным на рис. 535 жирными линиями. Последние, очевидно, представляют собой предельное положение фазовых траекторий «конечных» ускорений (т. е. сравнительно медленных изменений скорости  $\omega$ ). Только на этих участках  $F^+$  фазовой линии  $F$  «вырожденной» системы малый момент инерции  $J$ , которым обладает реальная система, не является существенным для ее движения, т. е. движение системы

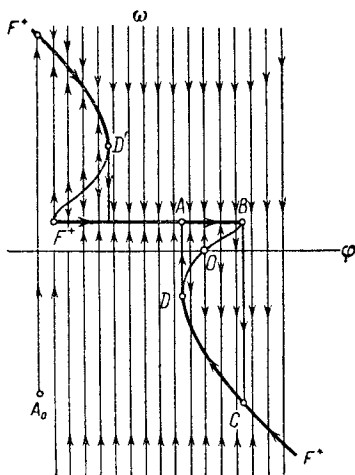


Рис. 535.

может быть приближенно описано «вырожденными» уравнениями:

$$-k\phi + M(\Omega - \omega) = 0, \quad \dot{\phi} = \omega. \quad (10.32)$$

Если положить  $J = 0$ , т. е. считать уравнения (10.32) применимыми всегда, то мы получим «дефектную» модель первого порядка с фазовой линией  $F$ , содержащей точки стыка фазовых траекторий (точки  $B, D, D'$  на рис. 535). Эти точки не являются состояниями равновесия, а, с другой стороны, на линии  $F$  нет фазовых траекторий системы (10.32), выходящих из этих точек. Таким образом, пользуясь этой моделью, мы не сможем проследить за движением системы. Исправление этой «дефектной» модели может быть сделано или путем фактического учета малого (или даже сколь угодно малого) момента инерции тормозной колодки или же путем введения дополнительного, соответствующим образом сформулированного постулата скачка изображающей точки из точек стыка фазовых траекторий.

Заметим, что точки стыка фазовых траекторий выделяют дуги линии  $F$ , которые соответствуют падающим участкам характеристики трения и вблизи которых изображающая точка не может двигаться при сколь угодно малых положительных моментах инерции  $J$ . Иначе говоря, фазовая линия «вырожденной» системы содержит участки, на которых сколь угодно малый момент инерции тормозной колодки является параметром, существенно определяющим характер движения системы.

Нетрудно видеть, что в силу динамики «вырожденной» системы (в силу уравнений (10.32)) рассматриваемая нами система не сможет находиться все время в состояниях, изображаемых точками на траекториях  $F^+$ ; рано или поздно изображающая точка, двигаясь по  $F^+$ , придет в одну из точек  $B, D$  или  $D'$  и «сорвется» в область «бесконечных»

ускорений. По соответствующей траектории скачка ( $BC$ ,  $DA$  или  $D'A'$ ) изображающая точка быстро, скачком вновь вернется на одну из траекторий «конечных» ускорений  $F^+$  и т. д. (при скачкообразных изменениях состояний скачком изменяется скорость системы  $\omega$  при неизменной координате  $\varphi$ ). В итоге самое большое после двух движений с конечными ускорениями (например, для движения, начинающегося из состояния  $A_0$  на рис. 535) в системе установятся разрывные периодические автоколебания, которым на фазовой плоскости соответствует предельный цикл  $ABCD A$  (рис. 535) и которые состоят из чередующихся движений с конечными и «бесконечными» ускорениями.

Участок  $AB$  этого предельного цикла соответствует движению колодки, «захваченной» валом; колодка вращается вместе с валом равномерно со скоростью  $\Omega$ , при этом пружины деформируются — момент сил упругости возрастает, но вместе с тем возрастает и момент силы трения, все время оставаясь равным моменту силы пружин. Когда момент упругой силы становится равным максимальному моменту силы трения (в точке  $B$ ), происходит скачкообразное изменение скорости и по величине и по направлению при неизменном растяжении пружин; соответственно изображающая точка «перескакивает» из точки  $B$  в точку  $C$ , которая соответствует тому же значению момента силы трения

$$M(\Omega - \omega_c) = M_0$$

и которая снова лежит на фазовой траектории сравнительно медленных изменений скорости  $\omega$  — на траектории  $F^+$  1).

1) Практически натяжение пружин при «скачке» немного изменится, так как на самом деле скачок происходит не мгновенно, но чем меньше момент инерции  $J$ , тем меньше длительность скачка и тем меньше изменение координаты  $\varphi$  и натяжения пружин. Порядок величины изменений координаты  $\varphi$  при скачке скорости (от  $\Omega$  до  $\omega_c$ ) можно примерно оценить, исходя из следующих соображений. Так как реальная система все же обладает некоторым моментом инерции  $J$ , то при скачке скорости изменяется и кинетическая энергия системы на  $\frac{1}{2} J \Delta(\omega^2)$ . Это изменение кинетической энергии должно равняться работе сил натяжения пружин и силы трения:

$$\frac{1}{2} J \Delta(\omega^2) = \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta\varphi} [-k\varphi + M(\Omega - \dot{\varphi})] d\varphi \approx \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta\varphi} [-M_0 + M(\Omega - \omega)] d\varphi,$$

так как при рассматриваемом скачке

$$\varphi \approx \text{const} = \frac{M_0}{k}.$$

Если ввести среднее значение момента силы трения во время скачка  $M_{\text{ср}}$ , то  $\frac{1}{2} J \Delta(\omega^2) \approx -(M_0 - M_{\text{ср}}) \Delta\varphi$ , откуда изменение координаты  $\varphi$  при скачке угловой скорости:

$$\Delta\varphi \approx -\frac{1}{2} \frac{J \Delta(\omega^2)}{M_0 - M_{\text{ср}}}.$$

Далее происходит непрерывное изменение скорости и координаты, определяемое уравнениями (10.32), пока изображающая точка не придет по траектории  $CD$  в точку  $D$  ( $\omega = \omega_D$ ), соответствующую минимуму характеристики трения. Из этого состояния снова происходит скачок скорости (от  $\omega_D$  до  $\Omega$ ) при неизменной (точнее, при почти неизменной) координате  $\varphi = \frac{M_1}{k}$ , где  $M_1$  — минимальное значение момента силы трения (см. рис. 534). Дальше движение совершается таким же образом; колодка совершает автоколебания. Соответствующие осциллограммы автоколебаний угла  $\varphi$  и скорости  $\omega$  качественно изображены на рис. 536.

«Амплитуда» автоколебаний координаты  $\varphi$  может быть определена по разности максимального и минимального моментов силы трения — по  $M_0 - M_1$ ; именно, она (половина полного размаха) равна

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \frac{M_0 - M_1}{k}.$$

Для вычисления периода нужно подсчитать время движения изображающей точки по траекториям  $F^+$  от  $A$  к  $B$  и от  $C$  к  $D$  (рис. 535). Что же касается участков предельного цикла от точки  $B$  до точки  $C$  и от  $D$  до  $A$ , то при  $J \rightarrow +0$  они проходятся изображающей точкой мгновенно, а при достаточно малых  $J$  настолько быстро, что на периоде автоколебаний это заметно не сказывается. Так как на участке  $AB$   $\dot{\varphi} = \Omega$ , то время его прохождения равно:

$$T_1 = \frac{M_0 - M_1}{k\Omega}.$$

Время  $T_2$  прохождения изображающей точкой участка  $CD$  определяется интегрированием на этом участке уравнений (10.32):

$$T = \int_{M_0/k}^{M_1/k} \frac{d\varphi}{\omega} = -\frac{1}{k} \int_{\omega_C}^{\omega_D} \frac{M'(\Omega - \omega)}{\omega} d\omega,$$

так как уравнения (10.32) можно записать также в виде:

$$k\omega = -M'(\Omega - \omega) \frac{d\omega}{dt}. \quad (10.32a)$$

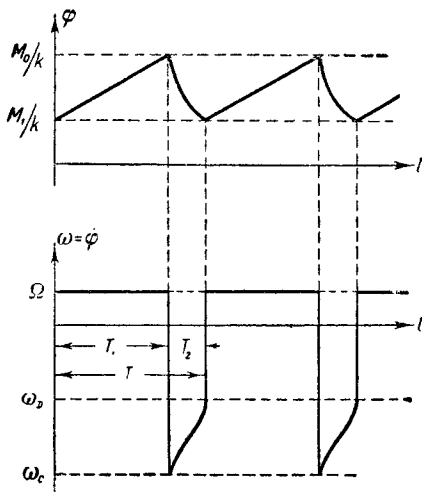


Рис. 536.

Вычислив  $T_2$  (например, графическим интегрированием), мы найдем и период автоколебаний:

$$T = T_1 + T_2.$$

Как уже было сказано, в действительности мгновенных изменений скорости не наблюдается, так как реальная система обладает

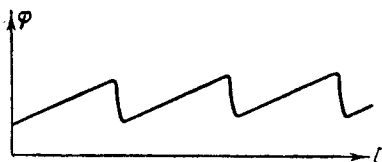


Рис. 537.

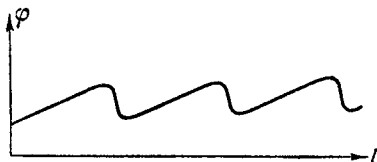


Рис. 538.

некоторым (пусть малым, но конечным) моментом инерции, в результате чего «скачки» происходят не с бесконечно большими, а с очень большими, но конечными ускорениями. Поэтому при  $J \neq 0$  фазовые траектории «быстрых» изменений скорости не будут прямолинейными, а должны несколько изогнуться. Однако при достаточно малом моменте инерции и больших моментах упругой силы и силы

трения изгиб этот практически совершенно не заметен. Но характер процесса существенно изменяется при увеличении момента инерции колодки. На рис. 537 и 538 изображены полученные экспериментально кривые колебаний колодки с разными моментами инерции. Форма кривых при увеличении момента инерции колодки получается все более и более близкой к форме гармонических колебаний, и «релаксационный маятник» превращается в маятник Фроуда — в автоколебательную систему, близкую к гармоническому осциллятору. Картина на фазовой плоскости (рис. 539), построенная по осциллограмме

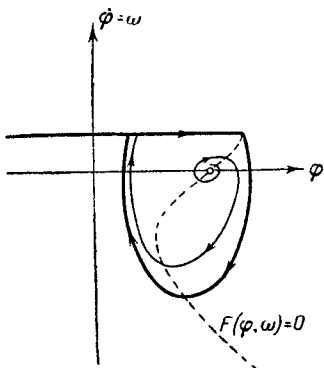


Рис. 539.

колебаний колодки с большим моментом инерции (рис. 538), значительно отличается от разбиения этой плоскости на траектории в предельном случае  $J \rightarrow +0$  (рис. 535). Наличие значительного момента инерции колодки сгладило скачки скорости.

## § 7. Два генератора электрических разрывных колебаний

Хорошими электрическими аналогами только что рассмотренной механической релаксационной системы являются простейшие генераторы электрических разрывных (релаксационных) колебаний: схема с неоновой лампой (или с вольтовой дугой) и динаatronный генератор.