

плавающему в отдалении насекомому или увеличить потенциальную энергию прутика, одна половина которого находится в воде, а другая — на песчаном берегу.

Если внешняя сила (приложенная к открытой среде) совершает гармоническое колебание, то вызванные ею волны называются *гармоническими бегущими волнами*. В установившемся состоянии все движущиеся элементы системы совершают гармоническое движение с частотой внешнего воздействия.

*Амплитудные соотношения.* Если волна распространяется в двухмерной или трехмерной среде, то амплитуда движения будет тем меньше, чем дальше от источника находится движущийся элемент (предполагается, что источник мал). С другой стороны, если среда одномерная (например, натянутая струна, к одному концу которой приложена внешняя сила, а другой конец простирается до бесконечности или подсоединен к устройству, которое поглощает волну), то амплитуда движущихся элементов, совершающих гармоническое колебание, не будет уменьшаться с увеличением расстояния от источника (предполагается, что среда однородна). Это может быть справедливо не только для одномерных волн, но и в случае двухмерных «прямых волн» (зыбь на поверхности океана от далекого шторма) и трехмерных «плоских волн» (радиоволны от далеких звезд).

*Фазовые соотношения.* Относительная фаза двух различных движущихся элементов открытой среды, по которой распространяются гармонические бегущие волны, не совпадает с относительной фазой для стоячих волн в замкнутой системе. В случае стоячей волны, которая может быть либо нормальной модой свободных колебаний замкнутой системы, либо ее вынужденным колебанием, все движущиеся элементы колеблются в фазе друг с другом (с точностью до возможного изменения знака смещения). Иначе обстоит дело для бегущей волны. Если движущийся элемент бесконечной струны  $b$  находится дальше от внешней силы, чем движущийся элемент  $a$ , то он будет совершать то же движение, что и  $a$ , но в более поздний момент времени.

Это запаздывание равно времени, необходимому, чтобы волна пробежала расстояние от  $a$  до  $b$ . Таким образом, фаза элемента  $b$  отлична от фазы элемента  $a$  на величину, равную произведению частоты на время запаздывания.

#### **4.2. Гармонические бегущие волны в одномерном пространстве и фазовая скорость**

Предположим, что наша одномерная система является непрерывной однородной струной, простирающейся от  $z=0$  до бесконечности. В точке  $z=0$  струна присоединена к выходным зажимам устройства («передатчика»), которое может ее «трясти» и таким образом вызывать распространение бегущих волн вдоль струны. Предположим, что смещение на выходе передатчика является гармонической

функцией времени:

$$D(t) = A \cos \omega t. \quad (1)$$

Мы хотим найти смещение  $\psi(z, t)$  движущегося элемента, координата  $z$  которого лежит где-то между  $z=0$  и бесконечностью. Легко написать выражение  $\psi(z, t)$  для  $z=0$ . Так как струна присоединена непосредственно к выходу передатчика, то смещение струны в  $z=0$  равно  $D(t)$ :

$$\psi(0, t) = D(t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

*Фазовая скорость.* Из повседневного опыта нам известно, что бегущие по воде волны распространяются с постоянной скоростью, пока свойства среды (например, глубина воды) не меняются. В случае гармонических бегущих волн эта скорость называется *фазовой скоростью*  $v_\phi$ . Мы также знаем, что смещение элемента с координатой  $z$  в момент времени  $t$  равно смещению элемента с координатой  $z=0$  в более ранний момент времени  $t'$ . Разность между  $t$  и  $t'$  равна времени, которое нужно волне, распространяющейся со скоростью  $v_\phi$ , чтобы пройти расстояние  $z$ :

$$t' = t - \frac{z}{v_\phi}. \quad (3)$$

Поэтому уравнение бегущей синусоидальной волны имеет вид  $\psi(z, t) = \psi(0, t') = A \cos \omega t' =$

$$= A \cos \omega \left( t - \frac{z}{v_\phi} \right) = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega z}{v_\phi} \right). \quad (4)$$

Заметим, что для фиксированного  $z$  смещение  $\psi(z, t)$  является гармонической функцией времени. Аналогично, для фиксированного времени  $t$  функция  $\psi(z, t)$  представляет собой синусоиду в пространстве. Конечно, оба эти утверждения справедливы и для синусоидальной стоячей волны, уравнение которой имеет, например, следующий вид:

$$\psi(z, t) = B \cos \omega t \cos(\alpha - kz), \quad (5)$$

где  $\alpha$  — константа. Для фиксированного момента времени бегущая волна, определяемая выражением (4), имеет такую же форму, что и стоячая волна (5). Если уравнение бегущей волны переписать в виде

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz), \quad (6)$$

то мы сможем использовать понятие волнового числа  $k$  (и длины волны  $\lambda$ ) точно так же, как это было сделано в случае стоячей волны. Сравнивая уравнения (4) и (6), мы видим, что для синусоидальной бегущей волны в фиксированный момент времени скорость возрастания фазового угла на единицу длины (это и есть величина  $k$ ) равна

$$k = \frac{\omega}{v_\phi}. \quad (7)$$

Это значит, что фазовую скорость можно выразить формулой

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}, \quad (8a)$$

или, так как  $\omega = 2\pi\nu$  и  $k = 2\pi/\lambda$ ,

$$v_{\phi} = \lambda\nu, \quad (8б)$$

или, так как  $\nu = 1/T$ ,

$$v_{\phi} = \frac{\lambda}{T}. \quad (8в)$$

Фазовая скорость синусоидальной бегущей волны является очень важной величиной. Мы специально привели различные формы уравнения (8), которые рекомендуем выучить наизусть. На рис. 4.1 показана синусоидальная бегущая волна.

Выражения (8) имеют большое значение, и мы получим их другим способом. Определим *фазовую функцию*  $\varphi(z, t)$  синусоидальной бегущей волны, распространяющейся в направлении  $+z$ , как аргумент волновой функции  $\cos(\omega t - kz)$ :

$$\varphi(z, t) = \omega t - kz. \quad (9)$$

При данном  $z$  фаза линейно растет со временем (член  $\omega t$ ). Для заданного  $t$  она линейно уменьшается с ростом  $z$  (член  $-kz$ ). Увеличение  $z$  уменьшает фазу, так как большего значения  $z$  достигает волна, испущенная раньше. (Выбранная нами система знаков не может считаться универсальной. Иногда имеют дело с фазой  $kz - \omega t$ .) Если мы хотим следить за каким-нибудь гребнем волны [максимум  $\cos \varphi(z, t)$ ] или за ее впадиной [минимум  $\cos \varphi(z, t)$ ] при распространении волны, то должны по мере увеличения времени переходить ко все большим значениям  $z$ , с тем чтобы фаза  $\varphi(z, t)$  была постоянна. Беря полный дифференциал от  $\varphi(z, t)$  и полагая его равным нулю, легко найти соотношение между  $z$  и  $t$  для точек постоянной фазы. Полный дифференциал от  $\varphi(z, t)$  имеет вид

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz = \omega dt - k dz. \quad (10)$$

Он равен нулю, если

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (11)$$

Мы получили равенство (8a).

*Совпадают ли дисперсионные соотношения для бегущей и стоячей волны?* В главе 2 было показано, что дисперсионное соотношение, определяющее зависимость частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$  (или  $k$  от  $\omega$ ) для стоячих волн свободных колебаний в данной среде, не

зависит от граничных условий, хотя реализующиеся частные значения  $k$  зависят от них. В главе 3 мы нашли, что стоячие волны вынужденных колебаний замкнутой системы удовлетворяют тому же дисперсионному закону, что и стоячие волны свободных колебаний с определенными значениями  $k$ , зависящими от граничных условий. (Мы открыли также волны нового типа, а именно экспоненциальные волны, которые появляются при воздействии на систему с частотой, большей или меньшей частоты максимальной или минимальной моды.)

Теперь, при рассмотрении бегущих волн в открытых системах, у нас есть только одно граничное условие, относящееся к концу, соединенному с передатчиком. Можно думать, что, как и раньше, дисперсионное соотношение не будет зависеть от граничных условий. Однако бегущая волна отличается от стоячей волны (свободных или вынужденных колебаний) тем, что различные движущиеся элементы системы имеют разные фазы, тогда как в стоячей волне (трением пренебрегаем) все движущиеся элементы имеют одинаковую фазу.

Не может ли это обстоятельство изменить дисперсионное соотношение? Как мы сейчас покажем, дисперсионное соотношение остается неизменным.

*Дисперсионное соотношение для линейной последовательности связанных маятников.*

Рассмотрим частный случай (имеющий, однако, достаточно общее значение), который покажет нам, что дисперсионное соотношение имеет одну и ту же форму как для бегущих, так и для стоячих волн. Мы начали рассмотрение бегущих волн, выбрав в качестве модели непрерывную струну. Однако бегущие волны можно изучать, подобно стоячим волнам, на моделях с

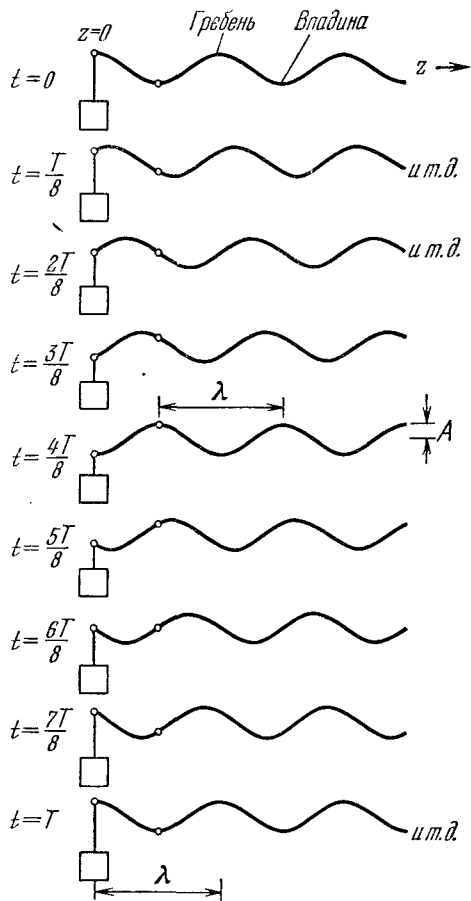


Рис. 4.1. Вынуждающая сила (в точке  $z=0$ ) создает гармоническое движение с периодом  $T$ . В направлении  $+z$  распространяется бегущая волна.

Длина волны  $\lambda$ . Фазовая скорость равна  $\lambda/T = \omega/k = \lambda v$ . Каждая точка струны повторяет в более поздний момент времени гармоническое движение точки  $z=0$ .

сосредоточенными параметрами. Весьма общие результаты можно получить, рассмотрев уже знакомую нам систему связанных маятников. Мы будем искать *дисперсионное соотношение для бесконечной линейной последовательности связанных маятников*, на которую в точке  $z=0$  действует внешняя сила.

Вернемся к рис. 3.10 из п. 3.5, на котором показано взаимное расположение трех связанных маятников. Перепишем точное уравнение (3.62) движения для  $n$ -го маятника:

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{K}{M}(\psi_{n+1} - \psi_n) - \frac{K}{M}(\psi_n - \psi_{n-1}). \quad (12)$$

В установившейся бегущей волне (так же как и при вынужденных установившихся колебаниях замкнутой системы) все движущиеся элементы совершают гармоническое движение. Поэтому, какой бы ни была фазовая константа, для  $\psi_n$  должно выполняться условие

$$\ddot{\psi}_n = -\omega^2\psi_n. \quad (13)$$

Подставляя уравнение (13) в уравнение (12) и деля на  $\psi_n(t)$ , получим

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M} - \frac{K}{M} \frac{(\psi_{n+1} + \psi_{n-1})}{\psi_n}. \quad (14)$$

*Синусоидальная бегущая волна.* Предположим, что мы имеем *синусоидальную бегущую волну* вида

$$\psi_n = A \cos(\omega t + \varphi - kz), \quad z = na.$$

Легко показать, что в этом случае

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = 2\psi_n \cos ka$$

и уравнение (14) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M}(1 - \cos ka) \quad (15)$$

или

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{1}{2} ka. \quad (16)$$

Это соотношение в точности повторяет дисперсионное соотношение [уравнения (3.91)—(3.98), п.3.5] для вынужденных колебаний. Мы видим, что диапазон частот у синусоидальных волн одинаков для бегущих и для стоячих волн и простирается от  $\omega_{\min}$  до  $\omega_{\max}$ , где

$$\omega_{\min}^2 = \frac{g}{l} \equiv \omega_0^2, \quad \omega_{\max}^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M}. \quad (17)$$

*Экспоненциальные волны в открытой системе.* Можно думать, что для открытой системы при частотах возмущающего воздействия, меньших граничной частоты  $\omega_{\min} = \omega_0$ , дисперсионный закон имеет тот же вид, что и для замкнутой системы. Это предположение верно. Для открытой системы связанных маятников, простирающейся от  $z=0$  до  $+\infty$  (внешнее воздействие приложено в точке  $z=0$ ) и

возбуждаемой в точке  $z=0$  частотой  $\omega < \omega_0$ , имеем

$$\psi(z, t) = Ae^{-\kappa z} \cos \omega t, \quad z = na, \quad (18)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M} \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \kappa a. \quad (19)$$

*Экспоненциальные «зигзагообразные» волны.* Аналогично, если частота возмущающего воздействия больше верхней граничной частоты, то мы имеем *экспоненциальные «зигзагообразные» волны:*

$$\psi(z, t) = A(-1)^n e^{-\kappa z} \cos \omega t, \quad z = na, \quad (20)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} \kappa a. \quad (21)$$

Таким образом, экспоненциальные волны в открытой системе, находящейся под внешним воздействием, отличаются от тех же волн в закрытой системе лишь отсутствием члена с  $\exp \kappa z$ , который обращается в бесконечность при  $z = \infty$ . Заметим, что в экспоненциальной волне все движущиеся элементы колеблются с одинаковой фазой [см. уравнения (18) и (20)]; поэтому здесь уже нет такого понятия, как фазовая скорость, так как нет ни волны, которая распространялась бы без изменения формы, ни волны, распространяющейся с изменением формы, но с различимыми гребнями и впадинами.

Мы показали на примере связанных маятников, что закон дисперсии для данной среды, связывающий  $\omega$  и  $k$ , одинаков как для бегущих волн, так и для стоячих волн, обусловленных либо свободными колебаниями, либо установившимися вынужденными колебаниями замкнутой системы.

*Диспергирующие и недиспергирующие синусоидальные волны.* Волны называют *недиспергирующими* (или волнами без дисперсии), если закон дисперсии имеет вид

$$v(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \text{константа (не зависит от } k). \quad (22)$$

В противном случае волны называют *диспергирующими* (или волнами с дисперсией). Символ  $k$  в выражении (22) напоминает нам, что мы имеем дело с синусоидальными волнами. Диспергирующая волна, представляющая собой суперпозицию бегущих волн с различными волновыми числами, будет менять свою форму по мере распространения в пространстве, так как составляющие с различными длинами волн распространяются с разной скоростью. Таким образом, различные по частоте составляющие расходятся («диспергируют») в пространстве. *Диспергирующими волнами или волнами с дисперсией называются синусоидальные волны, для которых фазовая скорость  $v_\phi = \omega/k$  изменяется с длиной волны.*

*Реактивные экспоненциальные волны.* Когда частота возмущающего воздействия  $\omega$  не лежит в полосе пропускания между нижней и верхней граничными частотами (в некоторых случаях первая из этих частот может быть равна нулю, а вторая — бесконечности), то, как мы только что видели, волны имеют в пространстве экспонен-

циальную форму. Такой тип волны иногда называют «реактивной» волной. Иногда говорят о «дисперсивной» среде и о «реактивной» среде, имея в виду прозрачную и непрозрачную среду соответственно (см. главу 3, стр. 135). Очевидно, что одна и та же среда может быть дисперсивной в одном частотном диапазоне (полоса пропускания или прозрачности) и реактивной в другом диапазоне (полоса поглощения или непрозрачности).

В приведенных ниже примерах мы будем иметь дело с фазовыми скоростями диспергирующих волн.

**Пример 1.** *Поперечные волны в струне с грузами.* Дисперсионное соотношение \*) для поперечных волн в струне с грузами имеет вид [см. уравнение (2.70), п. 2.4]

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{Ma} \sin^2 \frac{1}{2} ka, \quad 0 \leq k \leq \frac{\pi}{a}, \quad (23)$$

где  $T_0$  — натяжение в равновесном состоянии,  $M$  — масса грузика и  $a$  — расстояние между грузиками. Отсюда следует, что фазовая скорость поперечных бегущих волн в этом случае равна

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{4T_0}{Ma} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} ka}{k^2} \quad (24)$$

для  $0 \leq k \leq \pi$ . Для частот, больших граничной частоты

$$\omega_0 = \sqrt{4T_0/Ma},$$

имеем экспоненциальные «зигзагообразные» волны, и в этом случае не существует понятия фазовой скорости. Для частот между нулем и  $\omega_0$  имеем диспергирующие волны, так как фазовая скорость не постоянна, а зависит от  $k$ . Для больших длин волн (или маленьких расстояний между грузиками), когда  $a/\lambda \ll 1$ , фазовая скорость перестает зависеть от длины волны и волны приобретают характер волн без дисперсии. Это можно показать, разложив  $\sin \frac{1}{2}ka$  в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} v_\phi &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}ka\right)}{\left(\frac{1}{2}ka\right)}} = \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \frac{\left(\frac{1}{2}ka\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}ka\right)^3 + \dots}{\left(\frac{1}{2}ka\right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \left[1 - \frac{1}{24}(ka^2) + \dots\right]}. \quad (25) \end{aligned}$$

Введя понятие средней массы на единицу длины (в состоянии равновесия), т. е.  $\rho_0 \equiv M/a$ , получим для *непрерывной струны*

$$v_\phi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \quad (26)$$

---

\*) Прекрасная демонстрация дисперсионного соотношения [см. уравнение (23)] дана в статье: J. M. Fowler, J. T. Brooks, E. D. Lamb, One-dimensional Wave Demonstration (Опыты с одномерными волнами), Am. J. Phys. 35, 1065 (1967).

Таким образом, фазовая скорость поперечных бегущих волн для непрерывной струны постоянна и не зависит от частоты. Уравнение (26) аналогично результату, полученному в главе 2 для отношения  $\omega/k$  в случае стоячих волн в непрерывной струне [уравнение (2.22), п.2.2].

**Пример 2. Продольные волны в струне с грузами.** Закон дисперсии в этом случае можно получить из закона дисперсии для поперечных волн, если заменить натяжение  $T_0$  произведением коэффициента жесткости  $K$  пружины на расстояние между грузами  $a$  [см. уравнение (2.78), п.2.4]. В непрерывном приближении получим [подставляя в уравнение (26)  $Ka$  вместо  $T_0$ ]

$$v_{\Phi} = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{K_L L}{\rho_0}}. \quad (27)$$

Обозначение  $Ka = K_L L$  должно напомнить, что если вы добавите последовательно еще несколько пружин и полная длина пружин станет равной  $L$ , то коэффициент жесткости всей пружины  $K_L$  будет

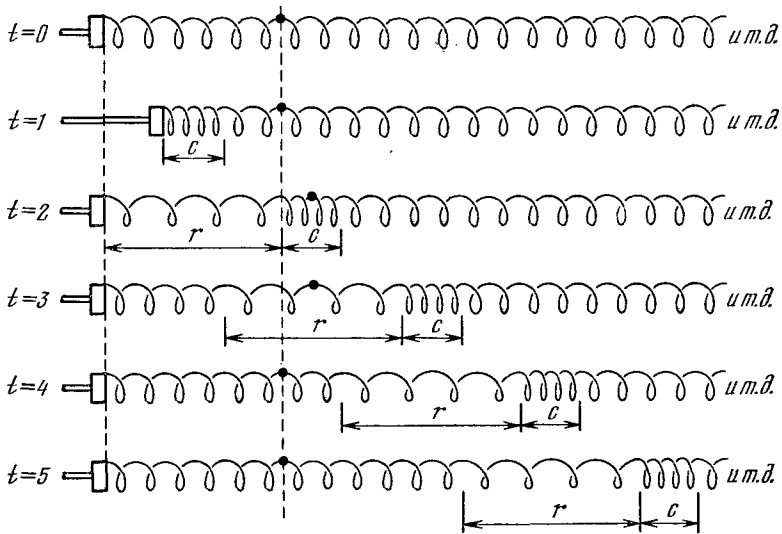


Рис. 4.2. Продольные бегущие волны сжатия ( $c$ ) и разрежения ( $r$ ) в пружине. Шестой виток спирали отмечен, что позволяет следить за его движением.

равен произведению  $a/L$  на  $K$ , где  $K$  — коэффициент жесткости для одного элемента пружины длиной  $a$ . В соответствии с уравнением (27) продольные волны в непрерывной струне не имеют дисперсии. На рис. 4.2 показан бегущий «волновой пакет», состоящий из областей сжатия и разрежения.

**Фазовая скорость звука. Модель Ньютона.** Ньютон первым вывел уравнение, позволяющее определить скорость звуковых волн в воздухе. Однако его формула дала неверный результат — около



280 м/сек, в то время как измеренная на опыте скорость звука равна 332 м/сек (при нормальных температуре и давлении, т. е. при давлении в 1 атмосферу и температуре 0° С). Вывод формулы Ньютона чрезвычайно прост, а причина ошибки достаточно интересна. Рассмотрим этот вывод.

Если воздух находится в замкнутом сосуде, то он создает определенное давление на его стенки: воздух ведет себя как *сжатая* пружина, которая стремится выпрямиться. Предположим, что сосуд представляет собой цилиндр, плотно закрытый неподвижной стенкой с одной стороны, а с другой — невесомым поршнем, способным перемещаться. Воздух, подобно пружине, стремится вытолкнуть из цилиндра поршень, действуя на него с силой  $F$ . В равновесии внешняя сила, действующая на поршень, уравновешена силой, с которой воздух действует на поршень. Для пружины, начальная длина которой  $L_1$ , а длина в сжатом состоянии  $L$  ( $L < L_1$ ) и коэффициента жесткости  $K_L$ , сила  $F$  равна  $F = K_L(L_1 - L)$ . Изменение силы  $F$  при изменении длины пружины  $L$  мы получим, дифференцируя это выражение:

$$dF = -K_L dL. \quad (28)$$

Аналогично, воздух действует на поршень с силой  $F = pA$ , где  $p$  — давление, а  $A$  — площадь поперечного сечения цилиндра. При смещении поршня от положения равновесия на небольшую величину  $dL$  объем изменяется на  $dV = A dL$ . Соответственно сила меняется на величину

$$dF = A dp = A \left( \frac{dp}{dV} \right)_0 A dL, \quad (29)$$

где индекс нуль означает, что производная  $dp/dV$  взята при равновесном объеме. Сравнивая уравнения (28) и (29), мы можем написать для воздуха в цилиндре выражение, эквивалентное коэффициенту жесткости пружины:

$$K_L = -A^2 \left( \frac{dp}{dV} \right)_0. \quad (30)$$

Рассмотрим сжатую пружину с коэффициентом жесткости  $K_L$ , находящуюся в равновесии при длине  $L_0$ . Пусть линейная плотность массы пружины равна  $\rho_0$  (лин.). В этом случае фазовая скорость продольных волн равна [см. уравнение (27)]

$$v^2 = \frac{K_L L_0}{\rho_0 \text{ (лин.)}}. \quad (31)$$

Мы найдем с помощью выражения (31) скорость звука, если воспользуемся формулой (30) для  $K_L$ . Объем воздуха в равновесии равен  $V_0 = AL_0$ , а линейная плотность массы воздуха в цилиндре равна

$$\rho_0 \text{ (лин.)} L_0 = \rho_0 \text{ (объемн.)} AL_0, \quad (32)$$

где  $\rho_0$  (объемн.) — объемная плотность массы в состоянии равновесия. Подставляя выражения (30) и (32) в (31) и опуская обозначение (объ-

емн.) у  $\rho_0$ , получим следующее выражение для скорости звука:

$$v^2 = - \frac{V_0 (dp/dV)_0}{\rho_0}. \quad (33)$$

Нам остается найти  $dp/dV$  — скорость изменения давления при изменении объема. Ньютон использовал закон Бойля — Мариотта, из которого следует, что при постоянной температуре произведение давления на объем есть постоянная величина:

$$pV = p_0V_0, \quad p = \frac{p_0V_0}{V}. \quad (34)$$

Здесь  $p_0$  — давление в равновесном состоянии. После дифференцирования имеем

$$\frac{dp}{dV} = - \frac{p_0V_0}{V^2}.$$

В состоянии равновесия, когда  $V=V_0$ , получим

$$V_0 \left( \frac{dp}{dV} \right)_0 = -p_0. \quad (35)$$

Подставляя это выражение в формулу (33), получаем *результат Ньютона*:

$$v_{\text{Ньютона}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (36)$$

Для нормальных условий имеем

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2, \\ \rho_0 &= \frac{29 \text{ г/моль}}{22,4 \text{ л/моль}} = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3, \end{aligned} \quad (37)$$

и численное значение скорости звука, найденное Ньютоном, равно

$$v_{\text{Ньютона}} = \sqrt{\frac{1,01 \cdot 10^6}{1,29 \cdot 10^{-3}}} = 2,80 \cdot 10^4 \text{ см/сек} = 280 \text{ м/сек}. \quad (38)$$

Полученное *экспериментально* значение скорости (которое вы должны помнить) для нормальных условий равно

$$v = 332 \text{ м/сек}. \quad (39)$$

[Вспомните обычный способ расчета расстояния до вспышки молнии по количеству секунд, разделяющих вспышку и гром. В этой оценке «три километра примерно равны 10 секундам».]

*Исправление ошибки Ньютона.* Теперь возникает законный вопрос: что не верно в выводе Ньютона, который дает результат, отличающийся на 15% от действительного? Оказывается, что все дело в законе Бойля — Мариотта, который справедлив только при постоянной температуре. Температура в звуковой волне не остается постоянной. В такой волне, как мы уже говорили, существуют области сжатия и разрежения. В областях сжатия температура чуть-чуть выше, чем в областях разрежения (энергия сохраняется, так как избыток энергии при сжатии компенсирует уменьшение энергии при разрежении). При сжатии давление увеличивается из-за возрастания

температуры и становится больше, чем предсказываемое законом Бойля — Мариотта, а при разрежении, наоборот, меньше. Это явление приводит к большему значению возвращающей силы, чем то, которое ожидалось, и поэтому фазовая скорость возрастает.

Вместо закона Бойля — Мариотта (который справедлив для постоянной температуры) нам следует применить адиабатический газовый закон, который дает соотношение между  $p$  и  $V$  при отсутствии теплообмена. (Тепло не успевает переместиться из области сжатия в область разрежения, и температура не может выравняться. Прежде чем такой поток возникнет, уже пройдет половина цикла и в области сжатия возникнет разрежение. Таким образом, можно представить себе условно, что области сжатия и разрежения разделены стенкой, которая не дает теплу перетекать из данной области в смежные.)

Адиабатический закон для газа имеет вид

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma, \quad p = p_0V_0^\gamma V^{-\gamma}, \quad (40)$$

где  $\gamma$  — постоянная, называемая отношением удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Она равна  $\gamma=1,40$  для воздуха при нормальных условиях. Дифференцируя выражение (40) и полагая  $V=V_0$ , получим

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma-1}, \quad V_0 \left( \frac{dp}{dV} \right)_0 = -\gamma p_0.$$

Подставляя это выражение в (33), получаем правильный результат для скорости звука:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = V \sqrt{1,40} v_{\text{Ньютона}} = 332 \text{ м/сек.} \quad (41)$$

Рассмотрим подробнее, почему тепловой поток не успевает выравнивать температуры в смежных областях сжатия и разрежения. Чтобы это выравнивание имело место, необходимо, чтобы тепловой поток проходил расстояние в полдлины волны (от области сжатия к разрежению) за время, меньшее половины периода колебаний (после половины периода области сжатия и разрежения меняются местами). Таким образом, тепло будет течь достаточно быстро при выполнении неравенства

$$v_n \gg \frac{1/2 \lambda}{1/2 T} = v_{зв}, \quad (42a)$$

где  $v_n$  — скорость теплового потока.

Известно, однако, что поток тепла возникает главным образом потому, что молекулы передают друг другу кинетическую энергию поступательного движения посредством столкновений. Для молекулы воздуха с массой  $M$  при абсолютной температуре воздуха  $T$  среднеквадратичное значение тепловой скорости (скорость поступательного движения, обусловленная тепловой энергией) в направлении  $z$  равно

$$v_{\text{ср. кв}} = \langle v_z^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{kT}{M}}. \quad (42b)$$

Здесь  $k$  — постоянная Больцмана. Скорость звука также можно выразить через  $T$  и  $M$ :

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma k T}{M}}. \quad (42\text{в})$$

Таким образом, с точностью до  $\sqrt{\gamma}$  скорость звука равна среднеквадратичной тепловой скорости молекул в направлении  $z$ . Если бы молекулы двигались по прямым, смещаясь на расстояния порядка  $\lambda/2$  до столкновения, то они «как раз успевали бы» переносить тепло. Молекулы в среднем не удовлетворяют условию (42а), но для некоторых очень быстрых молекул оно будет справедливым. Таким образом, за один полупериод могло бы быть передано заметное количество тепла. В действительности молекулы не смещаются по прямой на расстояние порядка  $\lambda/2$ . Они совершают хаотическое движение, которое имеет случайный характер. При нормальных условиях молекулы воздуха между двумя столкновениями проходят расстояния порядка  $10^{-5}$  см. Поэтому для всех длин волн больших, чем  $10^{-5}$  см, адиабатический закон является очень хорошим приближением. [Самая короткая длина еще ощутимой нашим ухом звуковой волны соответствует частоте  $\nu \approx 20000$  гц, т. е.  $\lambda = v/\nu \approx 3,32 \cdot 10^4 / (2 \cdot 10^4) = 1,6$  см.]

**Пример 3.** *Электромагнитные волны в ионосфере Земли и фазовые скорости, превышающие скорость света  $c$ .* Дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в ионосфере имеет (приближенно) следующий вид:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (43)$$

где  $c$  — скорость света, а  $\omega_p = 2\pi\nu_p$  — круговая частота колебаний плазмы. Для частот  $\omega$ , больших граничной частоты  $\omega_p$ , ионосфера — дисперсивная среда и электромагнитные волны синусоидальны. Это типичные частоты телевидения или частотно-модулированных волн (ЧМ), близкие к 100 Мгц. Фазовая скорость бегущей волны при частоте  $\omega$  равна

$$v_{\text{ф}}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}. \quad (44)$$

Очевидно, что эта скорость больше скорости света в вакууме  $c$  (и скорости всех других электромагнитных волн, включая волны телевидения).

Действительно, фазовая скорость оказывается *больше  $c$* , но это не противоречит теории относительности. Напомним, что фазовая скорость  $v_{\text{ф}}$  определяет разность фаз между *установившимися* гармоническими колебаниями движущегося элемента (электрона в ионосфере) в положении  $z_1$  и другого движущегося элемента в положении  $z_2$ . При установившемся гармоническом колебании нельзя утверждать, что колебание в  $z_2$  является «результатом» колебания в  $z_1$ . Вся система находится в установившемся состоянии, и переходные процессы в ней давно окончились. В главе 6 мы увидим, что *модулированные колебания*, примером которых могут служить

модулированные по амплитуде электромагнитные волны, *не распространяются с фазовой скоростью*. Скорость их распространения называется групповой скоростью. Групповая скорость всегда меньше скорости  $c$  света в вакууме.

Попробуем понять, как возникает фазовая скорость, бóльшая  $c$ . Источник наших «трудностей» заключен в постоянном слагаемом  $\omega_p^2$ , входящем в дисперсионное соотношение. При  $\omega_p^2$ , равном нулю, фазовая скорость была бы равна  $c$ . Константа  $\omega_p^2$  равна возвращающей силе, действующей на один электрон и отнесенной к единице массы и единице смещения. Эта постоянная определяет частоту свободных колебаний электронов плазмы:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{M}. \quad (45)$$

В системе связанных маятников величине  $\omega_p^2$  соответствует вклад в возвращающую силу, возникающий от силы тяжести. Дисперсионное соотношение для системы связанных маятников имеет вид (в приближении длинных волн)

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{Ka^2}{M} k^2. \quad (46)$$

Это выражение аналогично дисперсионному соотношению для ионосферы [формула (43)].

Предположим, что мы перерезали пружины, соединяющие расположенные в ряд маятники. Это означает, что  $K=0$ . [Заметим, что мы не можем с такой же легкостью сделать  $c=0$  в уравнении (43). Поэтому система связанных маятников для наших рассуждений более удобна.] Тогда фазовая скорость для системы маятников будет равна

$$v_{\Phi}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{lk^2}. \quad (47)$$

Выбрав  $lk^2$  достаточно малым, мы можем сделать выражение (47) большим скорости *света* в вакууме! Это возможно, если в системе отсутствуют связи между маятниками, а вся система представляет собой группу маятников, устроенную таким образом, что все они колеблются с одинаковой амплитудой, а сдвиг фазы между данным маятником и следующим все время возрастает, так что длина волны (расстояние, на котором фазовая постоянная возрастает на  $2\pi$ ) оказывается больше, чем произведение  $c$  на период маятника. В этом случае фазовая скорость превышает  $c$ !

Итак, фазовая скорость может быть *больше*  $c$ .

Очевидно, что *изменить* амплитуду движения какого-либо маятника с такой безумной скоростью невозможно. Связав маятники друг с другом, мы можем изменить характер движения какого-либо дальнего маятника, воздействуя на ближний маятник группы. При этом обнаружим, что скорость, с которой передается создаваемая нами модуляция, меньше фазовой скорости. Скорость перемещения модуляции называется групповой скоростью, и она меньше  $c$ .

**Пример 4. Передающая линия — фильтр низких частот.** Исследуемая нами система показана на рис. 4.3. Внешнее воздействие в виде синусоидально изменяющегося напряжения приложено ко входному концу системы ( $z=0$ ). Активным сопротивлением линии мы пренебрегаем. В п. 2.4 было найдено, что уравнение движения такой системы совпадает с уравнением движения для продольных колебаний системы из масс и пружин, если заменить  $K$  на  $C^{-1}/a$

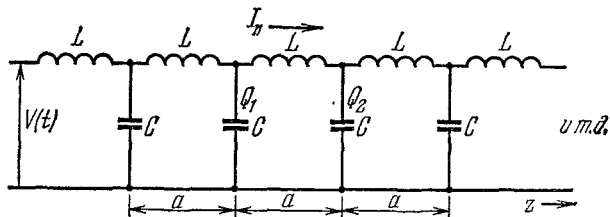


Рис. 4.3. Передающая линия возбуждается в точке  $z=0$  и простирается до бесконечности.

и  $M$  на  $L/a$ . Было показано, что в дисперсивном диапазоне частот (полоса пропускания системы), простирающемся от нуля до  $\omega_0 = 2\sqrt{C^{-1}/L}$ , закон дисперсии имеет вид

$$\omega^2 = \frac{4C^{-1}}{L} \sin^2 \frac{1}{2} ka.$$

В низкочастотном пределе (когда  $k \approx 0$ ) или в пределе непрерывной линии ( $a \approx 0$ ) мы можем заменить  $\sin \frac{1}{2} ka$  на  $\frac{1}{2} ka$ . Тогда фазовая скорость будет равна

$$v_{\text{ф}}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{(C/a)(L/a)}. \quad (48)$$

Здесь  $C/a$  — шунтирующая емкость на единицу длины, а  $L/a$  — последовательная индуктивность на единицу длины\*). Таким образом, для непрерывной передающей линии (такую линию может составить любая пара проводников) в вакууме фазовая скорость обратно пропорциональна квадратному корню из произведения погонных емкости и индуктивности. Фазовая скорость постоянна и не зависит от частоты. Таким образом, в рассматриваемом пределе волны напряжения и тока — недиспергирующие волны.

*Может ли фазовая скорость в рассмотренной передающей линии превышать скорость света  $c$ ?* Из примера 3 (распространение радиоволн в ионосфере) нам известно, что фазовая скорость этих волн может превышать скорость света  $c$  и что в этом нет противоречия с теорией относительности.

Мы видим, что наличие граничной частоты  $\omega_p$  позволяет иметь, по крайней мере в этом случае, практически любую фазовую скорость. Даже в системе связанных маятников можно иметь фазовую

\*) Будем называть эти величины погонной емкостью и погонной индуктивностью соответственно.

скорость, превышающую скорость  $c$ . В случае низкочастотного фильтра нет соответствующей частоты, аналогичной граничным частотам этих примеров. Это объясняется отсутствием возвращающей силы, действующей на токи в индуктивностях, помимо той, которая обусловлена присутствием емкостей. Поэтому мы не можем ожидать, что фазовая скорость будет больше  $c$ . Рассмотрим уравнение (48). Постараемся получить максимально большую фазовую скорость. Это значит, что погонная индуктивность  $L$  и погонная шунтирующая емкость  $C$  должны быть предельно малыми величинами. Из рис. 4.3 мы видим, что для индуктивности это условие можно выполнить, заменив ее прямым проводником, а для емкости — просто убрать емкость. Теперь вы можете предположить, что величины  $C/a$  и  $L/a$  будут равны нулю и фазовая скорость будет равна бесконечности. Однако это не так. Мы должны помнить, что два проводника (направления токов в проводниках противоположны) имеют вполне определенную, не равную нулю, погонную индуктивность и погонная емкость между проводниками также не равна нулю. Вы можете сами показать (вспомнив соответствующие места из тома II), что погонная емкость и погонная индуктивность для *двух бесконечно длинных, прямых и параллельных проводников* соответственно равны (задача 4.8)

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{4 \ln \left( \frac{D+r}{r} \right)} \text{ ед. СГСЭ}, \quad (49)$$

$$\frac{L}{a} = \frac{4}{c^2} \ln \left( \frac{D+r}{r} \right) \text{ ед. СГСЭ}. \quad (50)$$

Здесь  $r$  — радиус провода, а  $D$  — расстояние между проводами (от поверхности одного провода до поверхности другого). Перемножая уравнения (49) и (50), получаем замечательный результат:

$$\frac{C}{a} \frac{L}{a} = \frac{1}{c^2}. \quad (51)$$

Таким образом, *фазовая скорость бегущих волн тока (или напряжения) в передающей линии, образованной двумя прямыми и параллельными проводами, равна скорости света в вакууме.*

**Пример 5.** *Передающая линия из параллельных пластин.* Система, показанная на рис. 4.4, состоит из двух параллельных проводящих пластин. Ширина пластин  $w$ , а расстояние между внутренними поверхностями  $g$ . По пластинам в направлении  $z$  течет ток. Мы хотим вычислить погонную емкость и индуктивность в направлении оси  $z$ . Предположим, что потенциал между пластинами в точке  $z=0$  постоянен. Тогда имеем постоянный ток. (Можно считать, что пластины соединены в точке  $z=\infty$ , т. е. цепь замкнута. Мы могли бы предположить, что обе пластины простираются до бесконечности, не соединяясь. Результат не изменился бы.)

Будем считать, что нижняя пластина заряжена положительно, а верхняя — отрицательно. *Электрическое поле* в этом случае *направлено по оси  $+x$*  (см. рис. 4.4). Допустим, что  $w$  велико по сравне-

нию с  $g$ , и поэтому пренебрежем краевыми эффектами. Пусть  $Q$  — заряд, расположенный на площади, ограниченной шириной линии  $w$  и длиной  $a$  вдоль оси  $z$  (см. рис. 4.4). Пусть  $C$  — емкость этой части системы. В этом случае справедливы следующие соотношения (если вы забыли их, посмотрите во II томе п. 3.5):

$$Q = CV, \quad (52)$$

$$V = gE_x, \quad (53)$$

$$E_x = \frac{4\pi Q}{wa}. \quad (54)$$

Выражения (52) и (53) записываются в единицах СГСЭ или в единицах СИ. Выражение (54) представляет собой произведение  $4\pi$  на

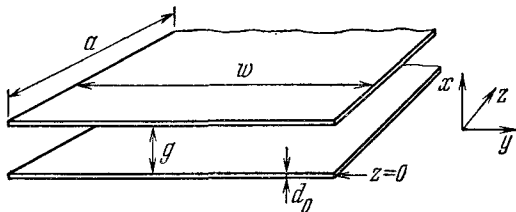


Рис. 4.4. Передающая линия из параллельных пластин.

Вынуждающая сила (не показана) создает разность потенциалов  $V(t)$  между пластинами в точке  $z=0$  и ток  $I(t)$ , который (в данный момент) направлен по  $+z$  в одной пластине и по  $-z$  в другой;  $a$  — произвольная длина вдоль оси  $z$ , малая по сравнению с длиной бегущей волны.

заряд, приходящийся на единицу площади, и определяет электрическое поле в единицах СГСЭ. Решая эти уравнения относительно  $C$ , получим погонную емкость нашей передающей линии:

$$\frac{C}{a} = \frac{w}{4\pi g}. \quad (55)$$

Теперь найдем  $L/a$  — значение погонной индуктивности. Считаем, что нижняя пластина подсоединена к положительному зажиму источника питания, а верхняя — к отрицательному. Поэтому положительный ток  $I$  по нижней пластине течет в направлении  $+z$  и в направлении  $-z$  по верхней пластине. С помощью правила правой руки и рис. 4.4 легко убедиться, что магнитное поле между пластинами направлено по положительной оси  $y$ . Вне пластины магнитное поле равно нулю. Пусть  $L$  — самоиндукция части пластин, указанной на рис. 4.4. Магнитный поток через сечение  $ga$  равен

$$\Phi = B_y ga. \quad (56)$$

Магнитное поле  $B_y$  определится из условия

$$wB_y = \frac{4\pi I}{c}. \quad (57)$$

(См. том II, п. 6.6; поверхностная плотность тока, введенная там, соответствует нашей величине  $I/w$ .) Самоиндукция  $L$  определяется равенством [см. том II, п. 7.8, формулы (7.53) и (7.54)]

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$



Для постоянного тока  $I$

$$LI = \frac{1}{c} \Phi. \quad (58)$$

Решая уравнения (56), (57) и (58) относительно  $L$ , найдем, что погонная самоиндукция равна

$$\frac{L}{a} = \frac{4\pi g}{c^2 \omega}. \quad (59)$$

Возможно, вас несколько смущает наше вычисление самоиндукции с помощью постоянного тока, тогда как уравнение Максвелла, из которого следует уравнение (57) для постоянного тока, имеет вид (том II, п.7.13)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (60)$$

Мы пренебрегаем током смещения, определяемым членом  $(1/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$ . Оказывается (задача 4.10), что такое пренебрежение законно, пока толщина  $d_0$  каждой пластины удовлетворяет условию

$$d_0 \ll \lambda. \quad (61)$$

Будем считать, что это условие выполняется.

Фазовая скорость бегущих волн равна [используем равенства (48), (55) и (59)]

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{(L/a)(C/a)}} = c. \quad (62)$$

Мы нашли, что в двух различных примерах передающих линий из проводов и пластин фазовая скорость равна  $c$ . Поэтому кажется правдоподобным и более общий результат: *фазовая скорость для любой передающей линии, состоящей из двух изолированных, одинаковых, прямых и параллельных проводников, в вакууме равна  $c$ .*

### 4.3. Показатель преломления и дисперсия

Если все пространство между параллельными пластинами передающей линии заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , то емкость увеличивается в  $\epsilon$  раз (см. том II, п. 9.9). (То же справедливо и для передающей линии из двух проводников, только в этом случае мы должны заполнить диэлектриком все пространство. В случае параллельных пластин электрическое поле вне области между пластинами равно нулю и поэтому не имеет значения, есть ли диэлектрик вне пластин, или его там нет.)

Аналогично, если магнитная проницаемость среды равна  $\mu$ , то погонная самоиндукция  $L$  возрастает в  $\mu$  раз. (Мы будем рассматривать такие материалы, как стекло, вода, воздух или им подобные, для которых магнитная проницаемость равна единице. В дальнейшем при общих выводах мы будем учитывать  $\mu$ , а при рассмотрении частных примеров будем полагать  $\mu$  равным единице.) Фазовая скорость бегущих волн напряжения и тока, распространяющихся вдоль