2. Задача Кеплера. Пусть частица с достаточно малой массой движется в поле тяготения массивной материальной точки или тела со сферическим распределением плотности. Начало координат совместим с центром массы этого тела. Масса M последнего остается постоянной, тогда как масса m движущейся частицы изменяется со скоростью по закону (3,1,2). Сила, действующая на эту частицу, равна

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma M m}{r^3}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы относительно центрального тела. Гравитационную массу частицы мы отождествили с его инертной массой (3,1,2).

Согласно (3,1,4), закон движения частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\gamma M}{r^3}\mathbf{r} = \frac{\gamma M}{c^2 r^3}(\mathbf{r}, \mathbf{v})\,\mathbf{v}. \qquad (3,2,1)$$

Введем угол α, образованный радиусом-вектором частицы и ее скоростью. Считая, что оскулирующей орбитой является эллипс, этот угол можно определить с помощью (1,6,7). Формула (3,2,1) показывает, что кроме центральной силы притяжения, отвечающей обычной форме закона тяготения Ньютона, к частице приложено возмущающее ускорение

$$T = \frac{\gamma M}{r^2}\frac{v^2}{c^2}\cos\alpha,$$

направленное по касательной к орбите.

Проекции этого ускорения на радиус-вектор частицы и на перпендикуляр к нему равны

$$R = \frac{\gamma M}{r^2}\frac{v^2}{c^2}\cos^2\alpha; \quad S = \frac{\gamma M}{r^2}\frac{v^2}{c^2}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (3,2,2)$$

Ввиду относительной малости возмущающего ускорения скорость частицы можно вычислить по обычной формуле задачи двух тел.

$$v^2 = \frac{\gamma M}{a}\,\frac{1 + e^2 + 2e\cos\varphi}{1 - e^2},$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты.

Внося это значение в (3,2,2) и учитывая (1,6,7), получим

$$r^2 R = \frac{(\gamma M)^2 e^2}{c^2 a(1 - e^2)}\sin^2\varphi; \quad r^3 S = \frac{(\gamma M)^2 e}{c^2}\sin\varphi. \qquad (3,2,3)$$

Влияние возмущающего ускорения на движение частицы можно исследовать по методу вариации элементов. Воспользовавшись 3-м,

4-м и 5-м уравнениями (1,6,3), легко находим

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{2\gamma M \sin^2 \varphi}{c^2 a (1 - e^2)};$$

$$\frac{da}{d\varphi} = \frac{2\gamma M e \sin \varphi}{c^2 (1 - e^2)^2} (1 + e^2 + 2e \cos \varphi); \qquad (3,2,4)$$

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{2\gamma M e \sin \varphi}{c^2 a (1 - e^2)} (e + \cos \varphi),$$

определяющие движение линии апсид и изменение размеров и формы орбиты.

Ввиду малости этих эффектов интерес могут представить только вековые изменения элементов, которые находятся путем интегрирования соотношений (3,2,4) по истинной аномалии. Интегрируя, находим приращение элементов за время одного обращения

$$\Delta\omega = \frac{2\pi\gamma M}{c^2 a (1 - e^2)}; \quad \Delta a = \Delta e = 0. \qquad (3,2,5)$$

Большая полуось и эксцентриситет орбиты не испытывают вековых изменений; линия апсид вращается в плоскости орбиты в прямом направлении.

Впервые этот эффект, обусловленный зависимостью массы движущейся частицы от скорости, обнаружил Зоммерфельд при исследовании движения электрона в электрическом поле атомного ядра. Полная энергия электрона оказалась зависящей не только от его эллиптического движения, отвечающего случаю постоянной массы, но и от прецессии орбиты, что позволило дать первое объяснение тонкой структуры спектра водорода.

Качественно эффект (3,2,5) отвечает известному движению перигелиев планетных орбит, но количественно он оказывается в три раза меньше найденной Эйнштейном величины, хорошо согласующейся с наблюдениями. Например, в случае Меркурия формула (3,2,5) дает для векового перемещения перигелия около 14″ в столетие вместо наблюдаемых 43″.

3. Обобщение закона тяготения Ньютона. Выше рассматривалось влияние релятивистского эффекта массы на движение частицы в центральном поле при условии, что закон тяготения Ньютона сохраняет обычную форму. Полученные результаты могут представить известный интерес, поскольку в случае статического поля закон тяготения не вступает в явное противоречие с выводами СТО. Однако рассмотренная задача имеет очень ограниченное значение. Для развития теории гравитации гораздо больший интерес представляют попытки согласовать с принципами СТО общую форму закона тяготения. Вопрос о возможности такого согласования с большой глубиной и тщательностью рассмотрел в 1905 г. Пуанкаре [2].