по координатам. Для данной линии эти символы являются определенными функциями параметра τ, зависящими от уравнений линии. Теми же уравнениями определяются производные $\frac{dx^\beta}{d\tau}$.

Равенства (4,3,9) составляют систему линейных однородных уравнений первого порядка относительно величин y^i. Поскольку при $\tau = \tau_0$ величины y^i принимают заданные значения y_0^i, эта система имеет единственное решение, однозначно определяющее параллельный перенос вдоль линии.

Предположим, что, найдя решение системы (4,3,9), мы определили затем значения компонент вектора в какой-либо определенной точке M_1 данной линии. Соединив точки M и M_1 другой линией, мы могли бы осуществить параллельный перенос вектора в точку M_1 по новому пути. Однако в случае геометрии Эвклида, которой мы до сих пор придерживаемся, значения компонент остались бы прежними: результат параллельного переноса данного вектора в эвклидовом пространстве определяется начальной и конечной точками и не зависит от выбранного пути.

4. Геометрия Римана. Эвклидово пространство n измерений представляет собой множество точек, каждая из которых находится в однозначном соответствии с n числами-координатами. Расстояние ds между двумя точками пространства с координатами x^i и $x^i + dx^i$ определяется инвариантной квадратической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{4,4,1}$$

коэффициентами которой служат ковариантные компоненты метрического тензора. Задание последнего определяет метрические свойства пространства, поскольку этот тензор позволяет найти длины линий и углы между ними.

Длина отрезка линии, заданной в пространстве уравнениями $x^i = x^i(\tau)$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}. \tag{4,4,2}$$

Угол θ между двумя линейными элементами $d\mathbf{s} = \mathbf{e}_\alpha dx^\alpha$ и $\delta\mathbf{s} = \mathbf{e}_\beta \delta x^\beta$ можно найти, образовав скалярное произведение $d\mathbf{s}, \delta\mathbf{s} = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta)\, dx^\alpha \delta x^\beta$. Положив $d\mathbf{s}, \delta\mathbf{s} = ds\delta s \cos\theta$ и воспользовавшись определением компонент метрического тензора, получим

$$\cos\theta = \frac{g_{\alpha\beta}dx^\alpha \delta x^\beta}{ds\delta s}. \tag{4,4,3}$$

В пространстве Эвклида можно построить систему прямолинейных декартовых координат. В этой системе координатные векторы во всех точках пространства имеют одинаковые значения, вслед-

ствие чего компоненты метрического тензора $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ будут постоянными числами. Можно утверждать, что континуум, отвечающий квадратической форме (4,4,1), будет эвклидовым пространством в том и только в том случае, если существует преобразование координат, приводящее компоненты метрического тензора к постоянным.

Легко видеть, что это условие выполняется лишь при специальном задании величин g_{ij}. Как мы знаем, число различных компонент метрического тензора может быть равно $\frac{1}{2}\, n\,(n+1)$; при $n \geqslant 2$ оно превосходит число измерений. Например, при $n = 4$ число различных g_{ij} достигает десяти. Поэтому совершенно очевидно, что при помощи преобразований координат в общем случае невозможно привести все произвольно заданные функции g_{ij} к постоянным. Таким образом, континуум, соответствующий квадратической форме (4,4,1), вообще не является пространством Эвклида. Однако этот континуум и в общем случае рассматривают как пространство n измерений, хотя его метрические свойства могут существенно отличаться от геометрии Эвклида. Такое пространство принято называть р и м а н о в ы м.

С формальной точки зрения пространство Римана можно определить как поле метрического тензора в n-мерном континууме, в котором расстояние между бесконечно близкими точками находится с помощью квадратической формы (4,4,1), а угол между двумя линейными элементами — по (4,4,3). Геометрия Римана охватывает широкий класс пространств и включает эвклидову геометрию в качестве простейшего частного случая.

5. Соприкасающееся пространство Эвклида. Введенные выше определения тензора и тензорных действий, а также операции параллельного переноса непосредственно относятся к пространству Эвклида. Вопрос о пригодности этих определений для римановой геометрии нуждается в специальном исследовании. Наиболее простой и естественный путь такого исследования состоит в сравнении риманова пространства с пространством Эвклида.

Пусть n-мерное пространство Римана характеризуется метрическим тензором g_{ij}. Рассмотрим точку M (x^k) и ее бесконечно малую окрестность. В точке M' $(x^k + dx^k)$, принадлежащей этой окрестности, метрический тензор имеет компоненты g_{ij} $(x^k + dx^k)$. Производя разложение, можно записать

$$g_{ij}(x^k + dx^k) = g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta + \cdots \qquad (4,5,1)$$