Полученная формула связывает расходимость тензора энергии-импульса в галилеевых координатах с ковариантной дивергенцией этого тензора в общих координатах. Поскольку преобразование координат произвольно, из закона (5,4,5) с необходимостью следует

$$T^{\alpha}_{i/\alpha} = 0; \quad i = 1, \ldots 4. \qquad (5,4,8)$$

Штрих, которым отмечались общие координаты, опущен.

Исчезновение ковариантной расходимости тензора энергии-импульса выражает закон его сохранения в общем случае. В форме (5,4,8) этот закон применяется в ОТО также при римановой метрике пространственно-временного континуума.

**5. Уравнения поля ОТО.** Согласно принципу эквивалентности, геометрия пространственно-временного континуума в каждом конкретном случае должна быть выбрана таким образом, чтобы четырехмерная геодезическая линия правильно описывала движение свободной материальной точки в поле гравитации. Для реализации этой идеи необходимо найти теоретическую зависимость между метрическим полем $g_{ij}$, определяющим геометрию пространства-времени, и распределением масс, которыми обусловлено данное поле гравитации. Такая зависимость устанавливается в ОТО в виде уравнений гравитационного поля, составляющих основу математического аппарата этой теории.

Постараемся прежде всего сформулировать основные условия, которым должны удовлетворять уравнения поля.

В соответствии с принципом относительности, потребуем, чтобы форма уравнений поля не зависела от выбора системы координат. Этому условию общей ковариантности (назовем его условием *A*) можно удовлетворить, применяя тензорный анализ, поскольку тензорное уравнение, установленное в одной системе координат, сохраняется при переходе к любой другой системе.

Геометрия риманова пространства вполне определяется основной квадратической формой (см. главу IV). Рассматривая пространство-время как четырехмерный континуум Римана, можно описать его геометрические свойства полем метрического тензора. Распределение масс в данной системе отсчета характеризуется в ОТО тензором энергии-импульса. Поэтому уравнения поля можно искать в виде соотношений между метрическим тензором и тензором энергии-импульса (условие *B*).

Третьим условием (условием *C*) является закон сохранения тензора энергии-импульса (5,4,8), который ограничивает форму уравнений поля.

Все эти требования выражают идею о слиянии метрики с гравитацией, а также о зависимости между метрикой пространства-времени и распределением масс. Однако эти условия чрезмерно широки, поскольку они не учитывают конкретных особенностей

механического движения в гравитационных полях. Дальнейшим ограничением является требование, чтобы ОТО в предельном случае переходила в теорию Ньютона. Это условие (назовем его условием $D$) предполагает, что при соответствующем выборе системы отсчета уравнения гравитационного поля ОТО и закон четырехмерной геодезической линии в первом приближении совпадают с дифференциальным уравнением Пуассона для гравитационного потенциала

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\gamma\rho \tag{5,5,1}$$

и с законом движения в форме

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}. \tag{5,5,2}$$

Условие $D$ имеет первостепенное значение для согласования уравнений поля с результатами наблюдений. Пользуясь уравнениями геодезической линии, представим это условие в более конкретной форме.

Вне поля гравитации (а также в кинематическом поле) можно построить галилеевы координаты, которым отвечает метрический тензор

$$\delta_{ij} = \begin{cases} -1, & i = j = 1, 2, 3; \\ +1, & i = j = 4; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

В случае слабого поля геометрия пространства-времени отличается от эвклидовой незначительно, вследствие чего можно принять $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где $h_{ij}$ — малые уклонения компонент метрического тензора от указанных галилеевых значений.

Будем удерживать только линейные члены относительно величин $h_{ij}$ и их производных, опуская члены более высоких порядков. При $\delta_{44} = 1$ скорость света вне поля принимается равной единице, а скорости механического движения измеряются малыми долями единицы. Поэтому в рассматриваемом приближении можно также пренебречь произведениями скоростей на величины $h_{ij}$ и на их производные.

Обратимся к уравнениям геодезической линии в форме (4,7,6). Положив $n = 4$, в нашем приближении получим

$$\frac{d^2x^\sigma}{dx^{4^2}} + \Gamma^\sigma_{44} = 0; \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Найдем символ Кристофеля, пользуясь разложением $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$. Простое вычисление дает

$$\Gamma^\sigma_{44} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{44}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{4\sigma}}{\partial x^4}.$$

В случае статического поля компоненты метрического тензора являются функциями только пространственных координат и не зависят от времени, вследствие чего второй член в выражении для $\Gamma^{\sigma}_{44}$ тождественно равен нулю. Если поле переменно, то зависимость его от времени обусловлена перемещениями масс, так как случай, когда изменяются массы, в нашем приближении не имеет существенного значения. Поэтому время может входить в величины $h_{ij}$ только через координаты и скорости масс. Отсюда следует, что в данном приближении второй член в $\Gamma^{\sigma}_{44}$ должен быть опущен и для переменного поля. Итак, $\Gamma^{\sigma}_{44} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\sigma}}$.

Уравнения геодезической линии, определяющие закон движения в поле гравитации, имеют в первом приближении вид

$$\frac{d^2x^{\sigma}}{dx^{4^2}} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(-\frac{1}{2}g_{44}\right).$$

Они совпадают с законом движения Ньютона (5,5,2), если величина $-\frac{1}{2}g_{44}$ с точностью до аддитивной постоянной равна гравитационному потенциалу. Таким образом, условие $D$ требует, чтобы в случае достаточно слабого поля гравитационные уравнения ОТО при соответствующем выборе координат в первом приближении приводили к уравнению Пуассона для последней компоненты метрического тензора.

Уравнения поля, отвечающие названным условиям, можно искать в форме

$$X_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \tag{5,5,3}$$

где $X_{ij}$ — симметричный тензор второго порядка, составленный из метрического тензора и удовлетворяющий соотношению $X^{\alpha}_{ij/\alpha} = 0$; $\varkappa$ — постоянная. Тензор $X_{ij}$ должен обеспечить выполнение условия $D$.

Вывод уравнений поля, отвечающих всем требованиям, представляет собой неопределенную задачу. Эйнштейн подошел к ее решению эвристически, образуя левую часть (5,5,3) из $g_{ij}$ различными способами. В дальнейшем форма уравнений поля была ограничена дополнительным условием, согласно которому тензор $X_{ij}$ является линейной функцией относительно вторых производных компонент $g_{ij}$ и не зависит от производных более высоких порядков. Это условие, принятое по аналогии с уравнением Пуассона, является чисто математическим ограничением, не получившим физического обоснования. Между тем оно оказывается очень существенным и позволяет определить вид тензора $X_{ij}$ с точностью до двух произвольных постоянных.

Как показал в 1917 г. Фермейл [14], все тензоры второго порядка, зависящие от $g_{ij}$, от их первых и вторых производных и являющиеся при этом линейными функциями вторых производных, с точностью до произвольного постоянного множителя имеют следующий вид:

$$X_{ij} = R_{ij} + C_1 g_{ij} R + C_2 g_{ij},$$

где $R_{ij}$ — тензор Риччи, $R$ — инвариант этого тензора, $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

Постоянная $C_1$ находится с помощью условия $C$.

Составим смешанные компоненты $X_i^j$ и образуем ковариантную расходимость

$$X^{\alpha}_{i/\alpha} = R^{\alpha}_{i/\alpha} + C_1 \delta_i^{\alpha} R_{/\alpha} = R^{\alpha}_{i/\alpha} + C_1 R_{/i}.$$

Воспользовавшись соотношением (4,9,4), находим, что условие $C$ выполняется при $C_1 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, с точностью до члена вида $C_2 g_{ij}$ можно написать

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\varkappa T_{ij}. \qquad (5,5,4)$$

Уравнения поля в форме (5,5,4) предложены Эйнштейном в конце 1915 г. Они удовлетворяют условиям $A$ — $C$ и указанному выше дополнительному ограничению Эйнштейна. Остается только показать, что они отвечают также условию $D$, обеспечивая в первом приближении переход к уравнению Пуассона.

Пользуясь разложением $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, составим развернутое выражение для тензора Риччи, сохраняя только линейные члены относительно величин $h_{ij}$ и их производных. Прежде всего, заметим, что в случае сигнатуры, применяемой в ОТО (—, —, —, +), определитель, составленный из компонент ковариантного метрического тензора, будет отрицательным. На основании определения тензора Риччи (4,9,1) легко показать, что общее выражение для компонент этого тензора (4,9,3) сохраняется и в этом случае, если только вместо $g$ написать $-g$. В данном приближении определитель равен

$$g = -1 - h; \quad h = -h_{11} - h_{22} - h_{33} + h_{44}. \qquad (5,5,5)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Вычисление символов Кристофеля дает

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\alpha} \left( \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{j\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^{\alpha}} \right).$$

Внесем эти значения в общую формулу (4,9,3). Сохраняя члены первого порядка относительно поправок $h_{ij}$ и их производных, после необходимых перегруппировок получим следующее выражение для компонент тензора Риччи:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \Box h_{ij} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^j} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha j}}{\partial x^\alpha} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{\alpha i}}{\partial x^\alpha} \right) \right]. \qquad (5,5,6)$$

Символом $\Box$ обозначен дифференциальный оператор

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{4^2}}.$$

Для упрощения (5,5,6) произведем малое преобразование координат. С этой целью введем систему четырех функций $l^\alpha(x^1, \ldots x^4)$, каждая из которых имеет порядок величин $h_{ij}$ и удовлетворяет необходимым для дальнейшего аналитическим условиям, но в остальном остается пока неопределенной.

Новые координаты зададим соотношениями $x^{\alpha'} = x^\alpha + l^\alpha$, в которых индексы $\alpha'$ и $\alpha$ предполагаются одинаковыми. Компоненты метрического тензора в новой системе координат находим по известным формулам

$$g_{i'j'} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}.$$

Дифференцируя формулу преобразования координат, имеем

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^i}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} = \delta_i^\alpha - \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^i}.$$

Поэтому новые компоненты метрического тензора связаны со старым равенством

$$g_{i'j'} = g_{ij} - \delta_{\alpha j} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^i} - \delta_{\alpha i} \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^j}.$$

Поправки к галилеевым значениям метрического тензора в обеих системах координат удовлетворяют соотношениям

$$h_{ij} = h_{i'j'} + \delta_{ii} \frac{\partial l^i}{\partial x^j} + \delta_{ji} \frac{\partial l^j}{\partial x^i}. \qquad (5,5,7)$$

Индексы $i$, $j$ здесь фиксированы; повторение их во втором и третьем членах правой части равенства не означает суммирования.

Дифференцируем (5,5,7) по $x^j$; положив затем $j = \alpha$, умножим это равенство на $\delta^{\alpha\alpha}$ и выполним свертывание по индексу $\alpha$. Учитывая, что при произвольном фиксированном $k$ произведение $\delta_{kk}\delta^{kk} = 1$, получим

$$\delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = \delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{i'\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} + \delta^{\alpha\alpha}\delta_{ii}\frac{\partial^2 l^i}{\partial x^{\alpha^2}} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\alpha}. \qquad (5,5,8)$$

Умножим (5,5,7) на $\delta^{ij}$ и выполним полное свертывание по обоим индексам. Найденное соотношение $h = h' + 2\frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\alpha}$ после дифференцирования дает

$$\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Комбинируя это равенство с (5,5,8), получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} - \delta^{\alpha'\alpha'}\frac{\partial h_{i'\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} - \delta_{ii}\Box\, l^i. \qquad (5,5,9)$$

Напомним, что индекс $i = i'$ здесь фиксирован; суммируют по $\alpha$.

Функции $l^i$ оставались до сих пор неопределенными. Подчиним их соотношениям

$$\delta_{ii}\Box\, l^i = \delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i}; \qquad i = 1, \ldots 4, \qquad (5,5,10)$$

т. е. уравнениям типа Даламбера, решения которых могут быть получены хорошо известным способом.

При указанном выборе функций $l^i$ в новой системе координат выполняется равенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial h'}{\partial x^{i'}} - \delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{i'\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} = 0,$$

к которому приводится (5,5,9) при условии (5,5,10).

Итак, в случае слабого поля можно построить систему координат, в которой тензор Риччи с точностью до членов первого порядка относительно величин $h_{ij}$ и их производных имеет, согласно (5,5,6), компоненты $R_{ij} = \frac{1}{2}\Box h_{ij}$. Инвариант этого тензора находится путем полного свертывания; он равен $R = \frac{1}{2}\Box h$, где $h$ опреде-

ляется формулой (5,5,5). Уравнения поля (5,5,4) имеют в данном приближении вид

$$\frac{1}{2}\Box\left(h_{ij}-\frac{1}{2}\delta_{ij}h\right)=-\varkappa T_{ij}. \qquad (5,5,11)$$

Во многих случаях удобнее пользоваться несколько иной формой уравнений поля.

Если (5,5,4) умножить на $\delta^{ij}$ и выполнить свертывание по обоим индексам, то получится $R=\varkappa T$, где $T$ — инвариант тензора энергии-импульса. Следовательно, вместо (5,5,4) можно написать

$$R_{ij}=-\varkappa\left(T_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}T\right). \qquad (5,5,12)$$

В рассмотренном выше линейном приближении этому соответствует система уравнений

$$\frac{1}{2}\Box h_{ij}=-\varkappa\left(T_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}T\right). \qquad (5,5,13)$$

Применим (5,5,13) к последней компоненте метрического тензора, для которой $i=j=4$.

Принимая во внимание, что механические скорости небесных тел весьма малы по сравнению со скоростью света, оператор $\Box$ можно отождествить с оператором Лапласа, взятым с обратным знаком. По той же причине можно принять, что из всех компонент тензора энергии-импульса в первом приближении от нуля отличается только $T^{44}=\rho$. В соответствии с этим имеем $T_{44}=T=\rho$. Последнее из уравнений поля (5,5,13) принимает вид $\nabla^2 h_{44}=\varkappa\rho$, совпадая с уравнением Пуассона для гравитационного потенциала, чем и обеспечивается выполнение условия $D$.

Количественное совпадение с уравнением Пуассона (5,5,1) достигается выбором коэффициента $\varkappa$. Если все вычисления выполнить в системе $CGS$, то получится

$$\varkappa=\frac{8\pi\gamma}{c^4}. \qquad (5,5,14)$$

В релятивистской системе единиц, в которой гравитационная постоянная теории Ньютона и скорость света имеют единичные значения, указанный коэффициент равен $8\pi$ *.

* Если $l$, $t$, $m$ — длина, время и масса, выраженные в релятивистских единицах, а $L$, $T$, $M$ — те же величины в системе $CGS$, то соотношения между ними определяются равенствами

$$L=l\,см;\quad T=\frac{1}{c}\,t\,сек;\quad M=\frac{c^2}{\gamma}\,m\,г,$$

где $c,\gamma$ — скорость света и гравитационная постоянная в системе $CGS$.

В ОТО обыкновенно пользуются релятивистскими единицами и поэтому уравнения поля пишут в следующем виде:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -8\pi T_{ij}, \tag{5,5,15}$$

или

$$R_{ij} = -8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T\right). \tag{5,5,16}$$

Не нарушая уравнения $X^{\alpha}_{i/\alpha} = 0$ и дополнительного требования о порядке высшей производной метрического тензора, можно прибавить к тензору Эйнштейна член вида $C_2 g_{ij}$, где $C_2$ — произвольная постоянная. Такое обобщение уравнений поля нетрудно также согласовать и с условием $D$, если постоянная $C_2$ будет так мала, что при переходе к первому приближению член $C_2 g_{ij}$ окажется пренебрежим. Это обобщение уравнений поля было предложено Эйнштейном в 1917 г. в связи с попыткой применить ОТО к космологии [15]. Обобщенную форму уравнений поля принято писать в виде

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = -8\pi T_{ij}. \tag{5,5,17}$$

Коэффициент $\Lambda$ носит название космологической постоянной.

**6. Неоднозначность уравнений поля.** В предыдущем параграфе сформулированы четыре условия, которым должны удовлетворять уравнения поля. Присоединение к ним дополнительного условия, требующего, чтобы тензор $X_{ij}$ в (5,5,3) был линейной функцией вторых производных от компонент метрического тензора и не содержал производных более высоких порядков, позволяет определить этот тензор однозначно. Единственность уравнений поля может при этом нарушаться лишь вследствие неточности определения тензора, энергии-импульса. Если же отказаться от дополнительного требования, которое не получило обоснования с физической точки зрения и выдвинуто лишь по аналогии с уравнением Пуассона, то уравнения поля ОТО оказываются неоднозначными, поскольку их нельзя вывести из условий $A$ — $D$.

Точная форма уравнений поля определяется решением уравнения

$$X^{\alpha}_{i/\alpha} = 0, \tag{5,6,1}$$

где $X_{ij}$ — искомый симметричный тензор второго порядка.

Покажем, что тензор Эйнштейна $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$ не является единственным решением уравнения (5,6,1). Интегрирование этого уравнения в общем виде представляет собой сложную задачу. Однако для наших целей достаточно установить существование решений, отличных от решения Эйнштейна.

Построим тензор второго порядка, называемый гамильтоновой производной от инварианта.