исчезающую ковариантную расходимость. Благодаря этому свойству, она является одним из решений уравнения (5,6,1).

Поскольку с помощью метрического тензора и его производных можно построить различные инварианты, понятие гамильтоновой производной определяет различные решения ковариантного уравнения (5,6,1). К ним принадлежит, в частности, решение Эйнштейна, так как тензор $-R^{ij}+\frac{1}{2}g^{ij}R$ является гамильтоновой производной инварианта тензора Риччи.

Возвращаемся к вопросу об уравнениях поля.

Пусть H_{ij} — ковариантные компоненты гамильтоновой производной, отличной от тензора Эйнштейна. Применяя уже употреблявшееся разложение $g_{ij}=\delta_{ij}+h_{ij}$, допустим, что в первом приближении тензор H_{ij} пренебрежим, так как если он содержит члены, линейные относительно величин h_{ij}, то его можно снабдить достаточно малым постоянным множителем. Система уравнений

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R+H_{ij}=-8\pi T_{ij}$$

с точки зрения условий A—D равноценна уравнениям поля в форме (5,5,14). Таким образом, отказываясь от дополнительного условия Эйнштейна о порядке высшей производной от g_{ij} в тензоре X_{ij}, мы приходим к заключению о том, что, начиная со второго приближения, уравнения поля ОТО содержат неизбежный произвол. Условия A—D не позволяют выбрать уравнения поля однозначно или установить какое-либо преимущество уравнений Эйнштейна по сравнению с другой возможной их формой. Иными словами, приходится признать, что физические предпосылки ОТО не составляют достаточной основы для однозначного развития количественной теории гравитации.

7. Другая форма уравнений поля. В некоторых случаях удобно пользоваться другой формой уравнений поля Эйнштейна, отличной от (5,5,4).

Введем скалярную функцию координат

$$L=\sqrt{g}\,g^{\sigma\tau}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}-\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}), \tag{5,7,1}$$

которую по аналогии с ньютоновой механикой обыкновенно называют функцией Лагранжа.

Примем также

$$q^{ij}=g^{ij}\sqrt{-g};\quad q^{ij}_{k}=\frac{\partial q^{ij}}{\partial x^{k}}. \tag{5,7,2}$$

Воспользовавшись определением символов Кристофеля, нетрудно убедиться в том, что функция Лагранжа может быть выражена через величины q^{ij} и q^{ij}_{k}. Имея это в виду, составим производные

функции L по переменным q^{ij}, q^{ij}_k. С этой целью образуем полный дифференциал функции Лагранжа и представим его так:

$$dL = \Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\tau} d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}) -$$
$$- \Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau} d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}) -$$
$$- (\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau})\, d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}). \qquad (5,7,3)$$

Преобразуем первый член правой части этого равенства. Если символ $\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}$ написать в развернутой форме

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial g_{\tau\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x^{\gamma}}\right),$$

то этот член можно привести к виду

$$\frac{1}{2}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} d\left(g^{\sigma\tau} g^{\alpha\gamma}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\tau\gamma}}{\partial x^{\beta}}\right),$$

или

$$-\frac{1}{2}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} d\left(g^{\sigma\tau} g_{\tau\gamma}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}\right),$$

так как при дифференцировании известного соотношения $g^{\alpha\gamma}g_{\tau\gamma} = \delta^{\alpha}_{\tau}$ получается тождество

$$g^{\alpha\gamma}\frac{\partial g_{\tau\gamma}}{\partial x^{\beta}} = -g_{\tau\gamma}\frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}.$$

Аналогично можно преобразовать остальные члены двух первых строк правой части (5,7,3).

Таким образом, получим

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}) = -\frac{1}{2}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} d\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}}\right);$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau} d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}) = -\frac{1}{2}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} d\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}}\right);$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau} d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}) = \Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau} d\left(g^{\sigma\tau}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}}\right);$$

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} d(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}) = -\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} d\left\{\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\gamma})\right\}.$$

Внося эти соотношения в выражение дифференциала функции Лагранжа, после необходимых упрощений найдем

$$dL = -\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau} d \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\tau}) +$$

$$+ \Gamma^{\beta}_{\sigma\beta} d \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\tau}) - (\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau})\, d\,(\sqrt{-g}\, g^{\sigma\tau}).$$

Применяя обозначения (5,7,2), можно окончательно записать

$$dL = (-\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau} + \delta^{\alpha}_{\tau}\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta})\, dq^{\sigma\tau}_{\alpha} - (\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau})\, dq^{\sigma\tau}.$$

Это равенство и определяет искомые производные, которые служат коэффициентами при соответствующих дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{\alpha i} + \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta};$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}_{\alpha}} = -\Gamma^{\alpha}_{ij} + \delta^{\alpha}_{ij}\Gamma^{\beta}_{j\beta}. \qquad (5,7,4)$$

С помощью полученных соотношений можно показать, что лагранжиан является однородной функцией величин q^{ij} и их производных q^{ij}_{α}.

Умножим первое соотношение на q^{ij} и выполним полное свертывание. Принимая во внимание определение функции Лагранжа (5,7,1), найдем

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}} q^{ij} = -q^{ij}(\Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{\alpha i} - \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}) = -L.$$

Величину q^{ij}_{α} представим следующим образом:

$$q^{ij}_{\alpha} = \sqrt{-g}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{\alpha}} + g^{ij}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}}\right).$$

Производную $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{\alpha}}$ найдем с помощью применявшегося выше соотношения

$$g_{\sigma\tau}\frac{\partial g^{i\sigma}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{i\sigma}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Умножим это равенство на $g^{\tau j}$; после свертывания получим

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{i\sigma}g^{j\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Если внести сюда

$$\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\alpha}} = \Gamma_{\sigma\alpha,\tau} + \Gamma_{\tau\alpha,\sigma},$$

согласно формуле (4,3,3), то указанная производная примет вид

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^\alpha} = -g^{i\sigma}\Gamma^j_{\sigma\alpha} - g^{j\tau}\Gamma^i_{\tau\alpha}.$$

Учитывая также соотношение

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha},$$

которое нетрудно получить из определения символа Кристофеля, можно написать

$$q^{ij}_\alpha = \sqrt{-g}\,(-g^{i\beta}\Gamma^j_{\alpha\beta} - g^{j\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta} + g^{ij}\Gamma^\beta_{\sigma\beta}).$$

Умножим это равенство на второе из равенств (5,7,4) и выполним свертывание по всем трем индексам. После очевидных упрощений найдем

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}_\alpha}\, q^{ij}_\alpha = 2\sqrt{-g}\, g^{\sigma\tau}(\Gamma^\beta_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\tau\beta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\tau}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}).$$

Итак,

$$\frac{\partial L}{\partial q^{ij}}\, q^{ij} = -L, \quad \frac{\partial L}{\partial q^{ij}_\alpha}\, q^{ij}_\alpha = 2L. \tag{5,7,5}$$

Степень однородности функции Лагранжа относительно величин q^{ij} равна —1, тогда как относительно производных q^{ij}_α эта функция имеет показатель однородности +2.

Воспользуемся теперь соотношениями (5,7,4), чтобы с помощью функции Лагранжа составить выражение для компонент тензора Риччи.

Образовав свернутую производную $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q^{ij}_\alpha}$ и вычтя из нее первое соотношение (5,7,4), найдем, согласно общему определению тензора Риччи (4,9,1),

$$R_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q^{ij}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}}. \tag{5,7,6}$$

Инвариант этого тензора равен

$$R = g^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}}\right).$$

Поэтому, представив равенство (5,7,6) в форме

$$R_{ij} = \delta^\sigma_i\delta^\tau_j\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}}\right),$$

можно написать следующее выражение для компонент тензора Эйнштейна:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \left(\delta_i^\sigma \delta_j^\tau - \frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}}\right).$$

Уравнения поля (5,5,4) принимают вид

$$\left(\delta_i^\sigma \delta_j^\tau - \frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}}\right) = -8\pi T_{ij}. \qquad (5,7,7)$$

Введя инвариант тензора энергии-импульса, можно привести уравнения поля к несколько более компактной форме. С этой целью следует воспользоваться равенством (5,5,12), в котором скаляр тензора Риччи выражен через указанный инвариант. Внеся в это равенство соотношение (5,7,6), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = -8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T\right). \qquad (5,7,8)$$

Вне масс, где тензор энергии-импульса исчезает, система уравнений поля будет следующей:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = 0, \qquad (5,7,9)$$

аналогичной уравнениям Лагранжа ньютоновой механики.

В заключение мы вновь подчеркнем, что уравнения поля Эйнштейна в виде (5,5,4) или в рассмотренной выше форме (5,7,8) могут быть выведены однозначно только в том случае, если к основным условиям, сформулированным в п. 5, присоединить дополнительное требование, согласно которому эти уравнения являются линейными относительно вторых производных компонент метрического тензора и не содержат производных более высоких порядков.

Многие авторы выводят уравнения поля ОТО из вариационного принципа, аналогичного принципу наименьшего действия механики Ньютона. В математическом отношении такой вывод обладает определенными достоинствами. Однако с физической точки зрения едва ли можно признать предпочтительным, поскольку в выборе варьируемого интеграла допускают известный произвол, а принцип наименьшего действия для гравитационного поля и материи принимают в форме постулата. По мнению автора, более естественно рассматривать вариационный принцип ОТО в качестве следствия уравнений поля, подобно тому, как принцип наименьшего действия в дорелятивистской классической механике был найден в качестве следствия законов Ньютона.

8. Внешнее решение Шварцшильда. Для большинства приложений ОТО основное значение имеет решение уравнений поля, отве-