Глава VI. ОСНОВНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Задача Кеплера. В задаче Кеплера изучается движение частицы в центральном поле гравитации. В релятивистской форме эта задача исследовалась впервые Эйнштейном в 1915 г. [1]. Полученная Эйнштейном формула, определяющая перемещение перигелия невозмущенной планетной орбиты, приводится во всех руководствах по ОТО. Стремясь достаточно полно сравнить ОТО с классической теорией тяготения Ньютона, мы рассматриваем здесь релятивистскую задачу Кеплера в общем виде и приводим подробную классификацию орбит [2]. Уравнение орбиты исследовано при помощи эллиптических интегралов в форме Лежандра. Во всех случаях вычисления завершаются формулами, пригодными для количественных оценок, и иллюстрируются графиками.

Составим уравнения движения частицы.

Пусть x^1, x^2, x^3 — пространственные координаты, $x^4 = t$ — временна́я координата. Согласно принципу геодезической линии, уравнения движения таковы:

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^4_{\alpha\beta}\frac{dx^\sigma}{dt}\right)\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0; \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Геометрия пространственно-временного континуума, соответствующая полю гравитации одного центра, определяется внешним решением Шварцшильда (5,8,6), в котором отличаются от нуля лишь диагональные компоненты метрического тензора. Поэтому символы Кристофеля вычисляются по формулам

$$\Gamma^k_{ij} = 0; \quad \Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}; \quad \Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j};$$

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i},$$

в которых i, j, k — различные фиксированные индексы.

Внося эти значения в закон движения и принимая во внимание, что компоненты метрического тензора не зависят от времени, приведем уравнения движения частицы к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{44}}\frac{dx^\sigma}{dt}\right) - \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\sigma}\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)^2 = 0. \qquad (6,1,1)$$

Положим $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ и найдем первые интегралы уравнений движения.

Последнее уравнение системы (6,1,1), соответствующее $\sigma = 3$, непосредственно интегрируется и дает

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{r^2 \sin^2\theta}\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \tag{6,1,2}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

При $\sigma = 2$ находим

$$\frac{d}{dt}\left\{r^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\frac{d\theta}{dt}\right\} - r^2 \sin\theta\cos\theta \times$$
$$\times \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0.$$

Если внести сюда соотношение (6,1,2), то после интегрирования получится

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(C_2^2 - \frac{C_1^2}{\sin^2\theta}\right)\frac{1}{r^4}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2, \tag{6,1,3}$$

где C_2 — новая постоянная интегрирования.

С помощью уравнения (6, 1, 3) нетрудно убедиться в том, что задача Кеплера в ОТО, как и в механике Ньютона, является плоской. Действительно, выбрав систему координат таким образом, чтобы в начальный момент движение происходило в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. чтобы при $t = t_0$ выполнялись условия $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{d\theta}{dt} = 0$, получим из (6,1,3) $C_1^2 = C_2^2$. В этих координатах уравнение (6,1,3) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{C_1^2}{r^4}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\theta$$

и показывает, что вообще $\theta = \text{const} = \frac{\pi}{2}$. Вместо (6, 1, 2) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right). \tag{6,1,4}$$

Первое уравнение системы (6,1,1), соответствующее $\sigma = 1$, более сложно. Его интеграл удобнее получить из квадратической формы Шварцшильда (5,8,6), найдя предварительно связь между дифференциалом временно́й координаты и элементом собственного времени.

Воспользуемся уравнениями четырехмерной геодезической линии в общей форме (4,7,2). Для временно́й координаты

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \Gamma^4_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Согласно приведенным формулам, из входящих в это уравнение символов Кристофеля могли бы отличаться от нуля следующие:

$$\Gamma^4_{4\alpha} = \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha}; \quad \Gamma^4_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^4}; \quad \Gamma^4_{44} = \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}.$$

Однако два последние исчезают вследствие стационарности поля; от нуля отличаются только символы

$$\Gamma^4_{4\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{44}}{\partial x^\alpha}.$$

Поэтому уравнение для временной координаты

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2\Gamma^4_{\alpha 4} \frac{dt}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0$$

принимает вид

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{d \ln g_{44}}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

и после интегрирования дает

$$\frac{dt}{ds} = h\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \tag{6,1,5}$$

где h — постоянная интегрирования.

Согласно квадратической форме Шварцшильда (5, 8, 6), производные пространственных координат по времени связаны соотношением

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \\ + 1 - \frac{2m}{r}.$$

Внося сюда найденные значения производных, получим

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left\{1 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(\frac{1}{h^2} + \frac{C_1^2}{r^2}\right)\right\}. \tag{6,1,6}$$

Это равенство и представляет собой первый интеграл уравнения $\sigma = 1$.

Составим дифференциальное уравнение орбиты С этой целью разделим (6, 1, 6) на возведенное в квадрат соотношение (6,1,4). Введя переменную $u = \frac{1}{r}$ и положив $C_1^2 = \frac{a^2}{h^2}$, найдем после очевидных преобразований

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{h^2 - 1}{a^2} + \frac{2m}{a^2} u - u^2 + 2mu^3. \tag{6,1,7}$$

На достаточно большом расстоянии от центра поля последний член правой части весьма мал. Если его опустить, то равенство (6,1,7) перейдет в уравнение конического сечения, фокальный параметр и эксцентриситет которого определяются формулами

$$p = \frac{a^2}{m}; \quad e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2}(h^2 - 1)}. \qquad (6,1,8)$$

Различие между релятивистской и ньютоновой орбитами обусловлено членом $2mu^3$. На больших расстояниях от центра поля гравитации этот член вызывает лишь незначительное уклонение от обычной кеплеровой орбиты, тогда как вблизи центра он играет очень важную роль, определяя орбиты новых классов.

Прежде чем перейти к общему исследованию уравнения орбит, рассмотрим простой частный случай, который в дальнейшем предполагается исключенным. Пусть $a = 0$. Вместо (6,1,4) и (6,1,6) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0; \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left\{1 - \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right\}. \qquad (6,1,9)$$

Первое из этих уравнений показывает, что орбита представляет собой прямую линию, совпадающую с радиальным направлением. Второе уравнение определяет зависимость между переменными r, t. Если в начальный момент частица покоится в точке r_0, то при падении ее скорость изменяется по закону

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left\{1 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{-1}\right\}.$$

С приближением к центру поля скорость частицы возрастает и при $r = 6m\left(1 + \frac{4m}{r_0}\right)^{-1} \simeq 6m$ достигает максимума, равного $\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) \simeq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. В дальнейшем скорость уменьшается, стремясь к нулю при $r \to 2m$. Заметим еще, что в случае $h < 1$ орбита представляет собой конечный отрезок радиального направления между точками $r = 2m$ и $r = \frac{2m}{1 - h^2}$, тогда как при $h \geqslant 1$ она с одной стороны ограничена гравитационной поверхностью $r = 2m$ и простирается до бесконечности.

Переходим к общей классификации орбит.

Входящий в уравнение (6,1,7) полином

$$f(u) = u^3 - \frac{u^2}{2m} + \frac{u}{a^2} + \frac{h^2 - 1}{2ma^2} \qquad (6,1,10)$$

для вещественных точек орбиты может принимать только положительные или нулевые значения. Поэтому необходимо найти интер-

валы значений переменной u, отвечающие условиям $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2m}$; $f(u) \geqslant 0$.

Полином $f(u)$ может иметь один вещественный корень u_1 или три $u_1 < u_2 < u_3$. Введем обозначения

$$p = \frac{1}{2}[9(h^2 - 1) + 1]; \quad \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 12m^2}}{a};$$

$$\alpha_{1,2} = \mp \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + p}. \qquad (6,1,11)$$

Подробное исследование полинома (6,1,10) позволяет определить искомые интервалы переменной u при различных предположениях относительно постоянных h, a. Эти интервалы приводятся в табл. 1.

В дальнейшем принята следующая классификация орбит.

1. Орбиты класса А определяются монотонным изменением переменной u от нуля или от некоторого положительного значения до величины $\frac{1}{2m}$. Этому классу принадлежат случаи: 1) когда функция $f(u)$ имеет один вещественный корень; 2) когда функция $f(u)$ имеет двойной $u_{1,2}$ и простой u_3 вещественные корни, а начальное значение переменной u задано в интервале $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$; 3) когда все корни полинома $f(u)$ вещественны и различны, а начальное значение лежит в интервале $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$. Рассмотренный случай $a = 0$ также можно отнести к этому классу.

2. Классу В принадлежат орбиты, для которых кратный корень полинома $f(u)$ превосходит простой. В этом случае, в зависимости от условий $u_0 \lesseqgtr u_{2,3}$, переменная u монотонно возрастает от нуля (если $u_1 \leqslant 0$), или от u_1 (если $u_1 > 0$) до $u_{2,3}$, или от $u_{2,3}$ до $\frac{1}{2m}$. В данный класс входит также орбита $u = u_{2,3}$.

3. Орбиты класса С определяются существованием трех различных вещественных корней полинома $f(u)$, из которых меньший отрицателен или равен нулю, и заданием начального условия в интервале $(0, u_2)$. Орбиты этого класса характеризуются возрастанием переменной u от нуля до наибольшего значения u_2 и последующим убыванием от u_2 до нуля.

4. К классу Д относятся орбиты, для которых функция $f(u)$ имеет различные положительные корни, а начальное значение переменной u лежит в интервале (u_1, u_2). Орбиты этого класса характеризуются колебательным изменением переменной u между u_1, u_2 и являются периодическими. При $u_1 = u_2$, а также при $u_1 = u_2 = u_3$ орбита вырождается в окружность.

2. Исследование орбит. Переходим к исследованию орбит в соответствии с принятой классификацией.