валы значений переменной u, отвечающие условиям $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2m}$; $f(u) \geqslant 0$.

Полином $f(u)$ может иметь один вещественный корень u_1 или три $u_1 < u_2 < u_3$. Введем обозначения

$$p = \frac{1}{2}[9(h^2 - 1) + 1]; \quad \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 12m^2}}{a};$$

$$\alpha_{1,2} = \mp \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + p}. \qquad (6,1,11)$$

Подробное исследование полинома (6,1,10) позволяет определить искомые интервалы переменной u при различных предположениях относительно постоянных h, a. Эти интервалы приводятся в табл. 1.

В дальнейшем принята следующая классификация орбит.

1. Орбиты класса А определяются монотонным изменением переменной u от нуля или от некоторого положительного значения до величины $\frac{1}{2m}$. Этому классу принадлежат случаи: 1) когда функция $f(u)$ имеет один вещественный корень; 2) когда функция $f(u)$ имеет двойной $u_{1,2}$ и простой u_3 вещественные корни, а начальное значение переменной u задано в интервале $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$; 3) когда все корни полинома $f(u)$ вещественны и различны, а начальное значение лежит в интервале $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$. Рассмотренный случай $a = 0$ также можно отнести к этому классу.

2. Классу В принадлежат орбиты, для которых кратный корень полинома $f(u)$ превосходит простой. В этом случае, в зависимости от условий $u_0 \lesseqgtr u_{2,3}$, переменная u монотонно возрастает от нуля (если $u_1 \leqslant 0$), или от u_1 (если $u_1 > 0$) до $u_{2,3}$, или от $u_{2,3}$ до $\frac{1}{2m}$. В данный класс входит также орбита $u = u_{2,3}$.

3. Орбиты класса С определяются существованием трех различных вещественных корней полинома $f(u)$, из которых меньший отрицателен или равен нулю, и заданием начального условия в интервале $(0, u_2)$. Орбиты этого класса характеризуются возрастанием переменной u от нуля до наибольшего значения u_2 и последующим убыванием от u_2 до нуля.

4. К классу Д относятся орбиты, для которых функция $f(u)$ имеет различные положительные корни, а начальное значение переменной u лежит в интервале (u_1, u_2). Орбиты этого класса характеризуются колебательным изменением переменной u между u_1, u_2 и являются периодическими. При $u_1 = u_2$, а также при $u_1 = u_2 = u_3$ орбита вырождается в окружность.

2. Исследование орбит. Переходим к исследованию орбит в соответствии с принятой классификацией.

Таблица 1

Значения постоянных	Вещественные корни полинома	Интервалы переменной
$0 \leqslant h^2 \leqslant \frac{8}{9}$ $\begin{cases} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leqslant \alpha < 1 \end{cases}$	$u_1 > 0$	$\left(u_1, \frac{1}{2m}\right)$
$\frac{8}{9} < h^2 < 1$ $\begin{cases} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leqslant \alpha < \alpha_1 \end{cases}$	$u_1 > 0$	$\left(u_1, \frac{1}{2m}\right)$
$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = \frac{1 - 2\alpha_1}{6m}$, $u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$	$(u_1, u_{2,3})$, $\left(u_{2,3}, \frac{1}{2m}\right)$
$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$	$u_1 > 0$, u_2, u_3	(u_1, u_2), $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$
$\alpha = \alpha_2$	$u_{1,2} = \frac{1 - \alpha_2}{6m}$, $u_3 = \frac{1 + 2\alpha_2}{6m}$	$u_{1,2}$, $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$
$\alpha_2 < \alpha < 1$	$u_1 > 0$	$\left(u_1, \frac{1}{2m}\right)$
$h^2 = 1$ $\begin{cases} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leqslant \alpha < \alpha_1 \end{cases}$	u_1	$\left(0, \frac{1}{2m}\right)$
$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = 0$, $u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$	$\left(0, \frac{1}{2m}\right)$
$\alpha_1 < \alpha < 1$	$u_1 = 0$, $u_{2,3} = \frac{3 \mp \sqrt{3(4\alpha^2 - 1)}}{12m}$	$(0, u_2)$, $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$
$h^2 > 1$ $\begin{cases} a^2 < 12m^2 \\ 0 \leqslant \alpha < \alpha_1 \end{cases}$	u_1	$\left(0, \frac{1}{2m}\right)$
$\alpha = \alpha_1$	$u_1 = \frac{1 - 2\alpha_1}{6m}$, $u_{2,3} = \frac{1 + \alpha_1}{6m}$	$\left(0, \frac{1}{2m}\right)$
$\alpha_1 < \alpha < 1$	$u_1 < 0$, u_2, u_3	$(0, u_2)$, $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$

Орбиты класса А. Согласно определению, переменная u является монотонной функцией полярного угла φ. Считая, что положительное направление φ отвечает возрастанию u, можно положить $\frac{du}{d\varphi} \geqslant 0$. В таком случае, согласно (6,1,7),

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \tag{6,2,1}$$

Рассмотрим первый из трех случаев, указанных в определении орбит класса А, когда полином $f(u)$ имеет один вещественный корень. При всех вещественных значениях переменной u трехчлен $\frac{f(u)}{u-u_1}$ остается положительным. Поэтому на основании очевидного равенства

$$f'(u) = \frac{f(u)}{u-u_1} + (u-u_1)\frac{d}{du}\frac{f(u)}{u-u_1}$$

находим

$$f'(u_1) = 3u_1^2 - \frac{u_1}{m} + a^{-2} > 0.$$

Введем новую переменную с помощью соотношения

$$u = u_1 + \sqrt{f'(u_1)} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}. \tag{6,2,2}$$

Предварительно представим полином (6,1,10) в виде

$$f(u) = (u-u_1)\left\{u^2 + \left(u_1 - \frac{1}{2m}\right)u + \frac{1}{a^2} + u_1^2 - \frac{u_1}{2m}\right\}.$$

Если подставить (6,2,2), то после необходимой перегруппировки членов получится

$$f(u) = \sqrt{f'(u_1)}\left\{\left(3u_1 - \frac{1}{2m}\right)\sqrt{f'(u_1)} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} + \sqrt{f'(u_1)} \cdot \operatorname{tg}^4 \frac{\Phi}{2} + \right.$$
$$\left. + 3u_1^2 - \frac{u_1}{m} + a^{-2}\right\}.$$

Принимая во внимание, что трехчлен $3u_1^2 - \frac{u_1}{m} + a^{-2}$ совпадает с величиной $f'(u_1)$, это равенство можно написать так:

$$f(u) = [f'(u_1)]^{\frac{3}{2}} \left\{\sin^4 \frac{\Phi}{2} + \cos^4 \frac{\Phi}{2} + \frac{3u_1 - \frac{1}{2m}}{\sqrt{f'(u_1)}} \sin^2 \frac{\Phi}{2} \times \right.$$
$$\left. \times \cos^2 \frac{\Phi}{2}\right\} \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} \cos^{-4} \frac{\Phi}{2}.$$

Теперь нетрудно получить

$$f(u) = [f'(u_1)]^{\frac{3}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \Phi) \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} \cos^{-4} \frac{\Phi}{2},$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3u_1 - \frac{1}{2m}}{2\sqrt{f'(u_1)}}\right). \qquad (6,2,3)$$

В результате указанного преобразования уравнение орбиты приводится к следующему:

$$\varphi - \varphi_0 = [4m^2 f'(u_1)]^{-\frac{1}{4}} \left\{\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}\right\}, \qquad (6,2,4)$$

где для краткости принято обозначение

$$\Delta\Phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}.$$

Точка орбиты, ближайшая к центру поля гравитации, лежит на гравитационной поверхности $u = \frac{1}{2m}$. Если $h \geqslant 1$, вследствие чего $u_1 \leqslant 0$, то орбита имеет бесконечно удаленную точку.

Пусть орбита класса А относится ко второму случаю, когда меньший из вещественных корней полинома $f(u)$ — двойной, а начальное значение u_0 принадлежит интервалу $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$. Уравнение (6,1,7) легко интегрируется в элементарных функциях

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u - u_1}{u_3 - u_1}}\Bigg|_{u_0}^{u}. \qquad (6,2,5)$$

Орбита соединяет сферу $u = u_3$ с гравитационной поверхностью $u = \frac{1}{2m}$.

Предположим, наконец, что все корни полинома $f(u)$ вещественны и различны, а начальное значение u_0 принадлежит интервалу $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$. Для простоты положим $u_0 = u_3$.

Замечая, что величина $f'(u_1)$ — положительна, подставим (6,2,2), представив предварительно полином в виде произведения $(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$. После необходимых преобразований, аналогичных выполненным в предыдущем случае, получим

$$f(u) = [f'(u_1)]^{\frac{3}{2}} \left\{1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{u_2 + u_3 - 2u_1}{2\sqrt{f'(u_1)}}\right)\sin^2\Phi\right\} \operatorname{tg}^2\frac{\Phi}{2} \cos^{-4}\frac{\Phi}{2}.$$

Как и прежде, уравнение орбиты приводится к (6,2,4), но модуль эллиптических интегралов определяется теперь формулой

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{u^2 + u_3 - 2u_1}{4\sqrt{f'(u_1)}} \qquad (6,2,6)$$

и превосходит единицу, так как при всех $u_1 < u_2 < u_3$

$$\frac{u_2 + u_3 - 2u_1}{\sqrt{f'(u_1)}} > 2.$$

Однако при всех значениях u в интервале $\left(u_3, \frac{1}{2m}\right)$ уравнение (6,2,6) остается вещественным. Действительно, наибольшая величина переменной Φ, отвечающая $u = \frac{1}{2m}$, согласно (6,2,2), определяется равенством

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\Phi_m}{2} = \frac{\frac{1}{2m} - u_1}{\sqrt{f'(u_1)}}$$

или

$$\sin^2 \Phi_m = \frac{4\left(\frac{1}{2m} - u_1\right)\sqrt{f'(u_1)}}{\left(\frac{1}{2m} - u_1 + \sqrt{f'(u_1)}\right)^2}.$$

Эта величина удовлетворяет соотношению $1 - k_1 \sin^2 \Phi_m = 0$, где

$$k_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2m} - u_1\right)^2 + f'(u_1)}{4\left(\frac{1}{2m} - u_1\right)\sqrt{f'(u_1)}}.$$

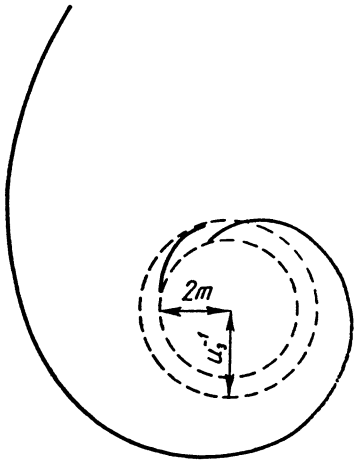

Рис. 17.

Поскольку модуль эллиптического интеграла (6,2,6) меньше величины k_1, имеем $1 - k^2 \sin^2 \Phi_m > 0$.

Применяя уравнение орбиты (6,2,4), в данном случае следует выполнить преобразование $k \sin \Phi = \sin \Psi$, что приводит к эллиптическим интегралам с модулем $\frac{1}{k} < 1$. На рис. 17 изображены орбиты первых двух типов класса А. При построении графиков принято: $h^2 = 1$, $a = 3{,}936\ m$; $h^2 = \frac{17}{18}$; $\alpha = 0{,}6404$.

Орбиты класса В. Переходим к случаю, когда полином $f(u)$ имеет простой u_1 и двойной $u_{2,3}$ вещественные корни.

Прежде всего заметим, что если начальное значение переменной u совпадает с двойным корнем, то орбита этого класса является окружностью. Действительно, поскольку в точке $u_{2,3}$ все производные

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{2mf(u)}; \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = mf'(u); \quad \frac{d^3u}{d\varphi^3} = mf''(u)\frac{du}{d\varphi}; \ \ldots$$

исчезают, переменная u имеет в этой точке стационарное значение

$u = \text{const} = u_{2,3}$. Орбитой служит окружность

$$u = \frac{1+\alpha_1}{6m}. \tag{6,2,7}$$

Согласно определению (6, 1, 11), величина α_1 представляет собой монотонно возрастающую функцию p. Поскольку полином $f(u)$ имеет простой и двойной корни при $h^2 > \frac{8}{9}$ (т. е. при $p > 0$), величина α_1 удовлетворяет условию $0 < \alpha_1 \leqslant 1$. Поэтому для орбит типа (6,2,7) имеем $3m \leqslant r < 6m$. Присоединив случай трех равных корней $u_{1,2,3} = \frac{1}{6m}$, соответствующий $h^2 = \frac{8}{9}$ ($p = \alpha_1 = 0$), можно сказать, что рассматриваемый класс орбит содержит все окружности, отвечающие условию $3m \leqslant r \leqslant 6m$.

При $u_0 \neq u_{2,3}$ орбита отличается от окружности. Уравнение ее легко интегрируется:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m(u_{2,3}-u_1)}} \ln \frac{\sqrt{u_{2,3}-u_1}+\sqrt{u-u_1}}{\sqrt{u_{2,3}-u_1}-\sqrt{u-u_1}}\Bigg|_{u_0}^{u}, \tag{6,2,8}$$

если $u_0 < u_{2,3}$, или

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m(u_{2,3}-u_1)}} \ln \frac{\sqrt{u-u_1}+\sqrt{u_{2,3}-u_1}}{\sqrt{u-u_1}-\sqrt{u_{2,3}-u_1}}\Bigg|_{u_0}^{u}, \tag{6,2,9}$$

если $u_0 > u_{2,3}$.

Орбита (6,2,8) при $u_1 \leqslant 0$ имеет бесконечно удаленную точку. В случае $u_1 > 0$ наиболее удаленной точкой орбиты является $u = u_1$. При $u \to u_{2,3}$ уравнение (6,2,8) дает $\varphi - \varphi_0 \to \infty$, показывая, что орбита имеет спиралевидную форму и асимптотически приближается к окружности (6,2,7).

Уравнение (6,2,9) определяет вторую спиралевидную орбиту, расположенную внутри окружности (6,2,7). Эта орбита также асимптотически приближается к указанной окружности и, подобно орбитам класса А, имеет точку на гравитационной поверхности.

На рис. 18 изображены орбиты всех трех типов при $h^2 = 1$.

В случае тройного корня $u_{1,2,3} = \frac{1}{6m}$ при условии $u_0 \neq u_{1,2,3}$ уравнение (6, 1, 7) принимает после интегрирования вид

$$\sqrt{\frac{m}{2}}(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{\sqrt{u - \frac{1}{6m}}}\Bigg|_{u_0}^{u} = 0 \tag{6,2,10}$$

и определяет спиралевидную орбиту, которая имеет точку на гравитационной поверхности и асимптотически приближается к окружности $r = 6m$. Эта орбита изображена на рис. 19.

Орбиты класса С. Для орбит этого класса полином $f(u)$ имеет три вещественных корня, из которых меньший отрицателен или

равен нулю, а два другие положительны. Значения переменной u принадлежат интервалу $(0, u_2)$.

Орбита имеет бесконечно удаленную точку с координатами φ_0, $u_0 = 0$. Пусть положительное направление полярного угла соответствует возрастанию переменной u. При увеличении φ от φ_0 до некоторого φ_m производная $\frac{du}{d\varphi}$ остается положительной и переменная u возрастает от нуля до максимума $u_m = u_2$. При дальнейшем

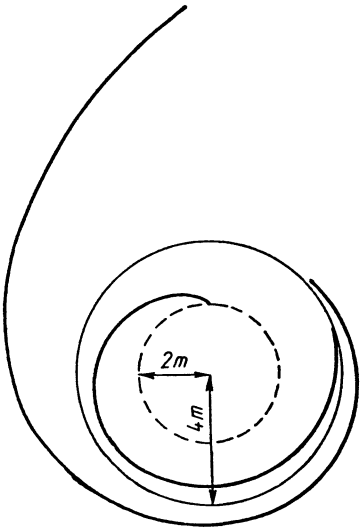

Рис. 18.

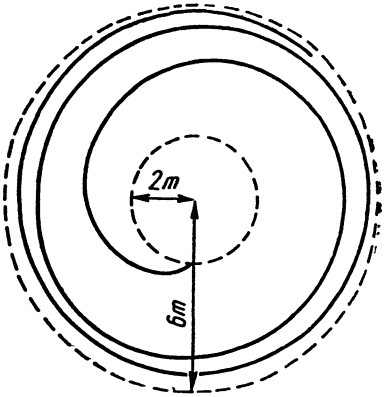

Рис. 19.

увеличении полярного угла производная $\frac{du}{d\varphi}$, обратившись в нуль в точке φ_m, становится отрицательной; переменная u убывает от u_m до нуля.

Уравнение орбиты этого класса можно написать в виде

$$\varphi \leqslant \varphi_m; \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}};$$

$$\varphi' \geqslant \varphi_m; \quad \varphi' - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} - \int_0^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \right).$$

Заменим переменную при помощи соотношения

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi.$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right); \qquad (6,2,11)$$

$$\varphi' - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right),$$

где Φ_0 соответствует $u = 0$, а модуль эллиптических интегралов определяется формулой

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}. \qquad (6,2,12)$$

Если ввести полярный угол φ_m экстремальной точки, для которого каждое из равенств (6, 2, 11) дает

$$\varphi_m - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \qquad (6,2,13)$$

то оба уравнения (6,2,11) можно объединить в одно:

$$\varphi - \varphi_m = \pm \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \qquad (6,2,14)$$

которое показывает, что орбита имеет ось симметрии, проходящую через ее экстремальную точку и центр поля.

Рассмотрим две точки орбиты, симметричные относительно указанной оси. Согласно (6,2,11),

$$\varphi' - \varphi = \frac{4}{\sqrt{2m(u_2 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \qquad (6,2,15)$$

При $u = 0$, когда выбранные точки бесконечно удалены, получим угол между асимптотическими направлениями орбиты $\varphi_0' - \varphi_0 = 2(\varphi_m - \varphi_0)$. Равенство (6,2,13) показывает, что этот угол может оказаться сколь угодно большим. Действительно, при $u_2 \to u_3$ модуль (6,2,12) стремится к единице, вследствие чего полный эллиптический интеграл в (6,2,13) неограниченно возрастает, тогда как неполный остается конечным.

Если при данных u_1, u_2, u_3 выполняется неравенство

$$2n\pi < \varphi_0' - \varphi_0 < 2(n+1)\pi,$$

то орбита имеет n двойных точек. Соответствующие им значения переменной Φ можно найти по формулам

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \frac{1}{2}\pi i \sqrt{2m(u_3 - u_1)}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6,2,16}$$

которые непосредственно вытекают из (6,2,15) при $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Полярные углы удовлетворяют соотношениям $\varphi - \varphi_0 = (\varphi_m - \varphi_0) - \pi i$, показывающим, что все двойные точки расположены на оси симметрии орбиты.

На рис. 20 изображена орбита класса C с тремя двойными точками. Вычисление ее выполнено при $h^2 = 1$, $a = 4{,}000032$ m.

Орбиты класса D. Переходим к исследованию орбит класса D, для которого полином $f(u)$ имеет три вещественных корня и начальное значение u_0 лежит в интервале (u_1, u_2).

Обозначим полярные углы точек u_1, u_2 через $\varphi_1^{(i)}$, $\varphi_2^{(i)}$ и положим $\varphi_2^{(i)} > \varphi_1^{(i)}$. При увеличении полярного угла от $\varphi_1^{(i)}$ до $\varphi_2^{(i)}$ производная $\frac{du}{d\varphi}$ остается положительной, а переменная u возрастает от u_1 до u_2. В точке φ_2^{i} производная изменяет знак, и при дальнейшем увеличении полярного угла от $\varphi_2^{(i)}$ до $\varphi_1^{(i+1)}$ переменная u убывает от u_2 до u_1. Орбита данного класса расположена между окружностями $u = u_1$, $u = u_2$ и соприкасается с ними в экстремальных точках. Пусть φ, u и φ', u — две точки орбиты, соответствующие одинаковым значениям переменной u, но отделенные двумя последовательными экстремальными точками u_1, u_2. Полярный угол первой из них, заключенный между $\varphi_1^{(i)}$ и $\varphi_2^{(i)}$, определяется формулой

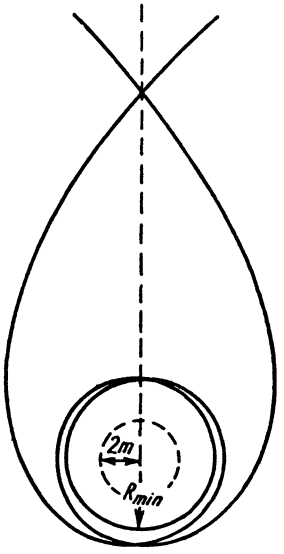

Рис. 20.

$$\varphi - \varphi_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{u_1}^{u} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

Для полярного угла второй точки, лежащего между $\varphi_1^{(i+1)}$ и $\varphi_2^{(i+1)}$, имеем

$$\varphi' - \varphi_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(2\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} + \int_{u_1}^{u} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \right).$$

Разность полярных углов

$$\varphi' - \varphi = \frac{2}{\sqrt{2m}} \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{f(u)}$$

не зависит от координат этих точек; переменная u является периодической функцией полярного угла.

Выполнив преобразование

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi,$$

найдем следующее выражение для периода:

$$P = \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}. \qquad (6,2,17)$$

Модуль эллиптического интеграла определяется, как и прежде, соотношением (6,2,12).

Период (6,2,17) может быть сколь угодно большим, так как при $u_2 \to u_3$ модуль стремится к единице. Но он не может оказаться меньше 2π, поскольку при $u_1 \to u_2$ модуль стремится к нулю, и потому $P \to \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2}}$ при условии $0 < \alpha_2 < 1$, так как случай $u_1 = u_2$ возможен при $\frac{8}{9} < h^2 < 1$.

Рассмотрим отрезок орбиты, отвечающий одному периоду и ограниченный экстремальными точками u_1. Положим $u_0 = u_1$ и обозначим полярный угол точки u_2 через φ_m. Выполнив прежнее преобразование, получим

$$\varphi \leqslant \varphi_m; \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \int\limits_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi};$$

$$\varphi \geqslant \varphi_m; \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int\limits_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right).$$

Каждая из этих формул дает $\varphi_m - \varphi_0 = \frac{1}{2} P$. Поэтому оба уравнения можно заменить одним

$$\varphi - \varphi_m = \pm \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int\limits_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \qquad (6,2,18)$$

показывающим, что прямая, проходящая через центр поля гравитации и точку u_2, служит осью симметрии орбиты.

Разность полярных углов двух точек орбиты, симметричных относительно оси, равна

$$\varphi' - \varphi = P - \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}. \qquad (6,2,19)$$

Если эта разность окажется кратной 2π, то обе точки совпадают, образуя точку возврата. Предположим, что при заданных корнях полинома $f(u)$ период удовлетворяет условию

$$2n\pi < P < 2(n+1)\pi,$$

где n — целое положительное число. В таком случае на рассматриваемом отрезке орбиты имеется n точек возврата. Значения переменной Φ, отвечающие этим точкам, находятся из соотношения

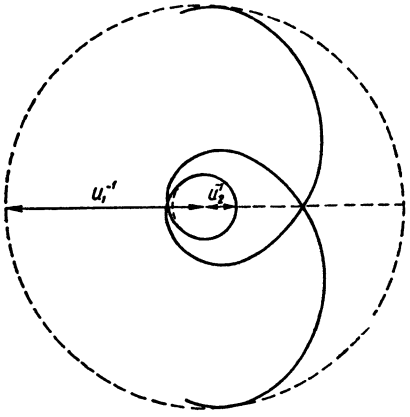

Рис. 21.

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{1}{4}(P - 2\pi i)\sqrt{2m(u_3 - u_1)}; \qquad i = 1, \ldots, n, \quad (6,2,20)$$

которое следует из (6,2,19) при $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Все точки возврата расположены на оси симметрии.

В частном случае, когда период удовлетворяет условию $P = 2n\pi$, орбита имеет $n - 1$ двойных точек и представляет собой замкнутую кривую. Если $P < 4\pi$, то на протяжении периода орбита имеет только одну точку возврата. Однако в последующих периодах орбита вновь пересекает данный отрезок, образуя на нем новые точки возврата, среди которых могут оказаться точки более высоких кратностей.

На рис. 21 построен график орбиты класса D с двумя точками возврата. При вычислении принято: $h^2 = \frac{17}{18}$, $a = 14{,}1518\ m$.

3. Приближенное уравнение орбиты. Составим приближенное уравнение орбит классов C и D в предположении, что все их точки достаточно удалены от центра поля гравитации.

Точное уравнение орбиты в форме (6,2,14) или (6,2,18) является общим для обоих классов. Полином $f(u)$ имеет три вещественных корня, удовлетворяющих соотношению $u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2m}$.