4. Движение спутника вращающейся планеты. В механике Ньютона поле тяготения со сферическим распределением массы не зависит от его вращения вокруг оси, проходящей через центр распределения. В ОТО такое вращение нарушает центральную симметрию поля. Поле гравитации однородного шара, вращающегося вокруг диаметра (см. главу V), симметрично относительно оси вращения и зависит не только от массы, но также от угловой скорости и радиуса шара. Поэтому, с точки зрения ОТО, в движении спутника должны наблюдаться особенности, зависящие от вращения планеты. Впервые эти эффекты изучались еще Ленсе и Тиррингом в 1918 г. [3].

Рассмотрим вековые эффекты ОТО в элементах орбиты спутника, движущегося вокруг вращающейся планеты. Исследование производится по методу вариации элементов [4].

Уравнения движения спутника можно написать в виде

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2}+\left(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}-\Gamma^4_{\alpha\beta}\frac{dx^\sigma}{dt}\right)\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}=0;\quad \sigma=1,\ 2,\ 3,$$

где x^σ — пространственные координаты, Γ^k_{ij} — символы Кристофеля, отвечающие данному полю гравитации.

Введем декартову планетоцентрическую систему координат $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, ориентированную таким образом, чтобы плоскость xy совпадала с плоскостью экватора планеты, а ось z была направлена по оси вращения. Компоненты метрического тензора представим в форме $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где δ_{ij} соответствуют галилеевым координатам СТО, а h_{ij} характеризуют уклонение метрики пространства-времени от геометрии Эвклида. С необходимой точностью эти величины получены в предыдущей главе при интегрировании уравнений поля для однородного вращающегося шара; они определяются формулами (5,16,5).

Составляя уравнения движения в развернутой форме, потенциал φ будем считать величиной первого порядка малости, а составляющие скорости — порядка $\frac{1}{2}$. Легко видеть, что в уравнениях движения член первого порядка содержится только в Γ^σ_{44} и входит в $\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}$. Поскольку главный переменный член в g_{44}, согласно (5,16,5), равен -2φ, в уравнениях движения содержатся члены $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}$, соответствующие ньютонову приближению. Поэтому закон движения можно представить в виде

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}=X^\sigma;\quad \sigma=1,\ 2,\ 3, \tag{6,4,1}$$

где через X^σ обозначена совокупность остальных членов, которые представляют поправки ОТО к закону движения Ньютона.

Уравнения (6,4,1) определяют движение частицы под действием центральной ньютоновой силы и возмущающего ускорения с декартовыми проекциями X, Y, Z. С точностью до членов второго порядка включительно эти проекции можно вычислить по формулам

$$X^\sigma = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(h_{44}+2\varphi) - \frac{1}{2}h_{\sigma\sigma}\frac{\partial h_{44}}{\partial x^\sigma} - \left(\frac{\partial h_{\alpha 4}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{\sigma 4}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{dx^\alpha}{dt} +$$

$$+\frac{\partial h_{\sigma\sigma}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{\alpha\alpha}}{\partial x^\sigma}\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt}. \quad (6,4,2)$$

Пусть R, S, W — проекции возмущающего ускорения на радиус-вектор, на перпендикуляр к нему и на нормаль к плоскости орбиты соответственно. Обозначив через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ углы, образованные направлениями R, S, W с осями декартовых координат, имеем

$$\begin{aligned} R &= X\cos\alpha_1 + Y\cos\alpha_2 + Z\cos\alpha_3; \\ S &= X\cos\beta_1 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\beta_3; \\ W &= X\cos\gamma_1 + Y\cos\gamma_2 + Z\cos\gamma_3. \end{aligned} \quad (6,4,3)$$

Если ось x проходит через восходящий узел орбиты спутника, то эти углы находятся с помощью соотношений

$$\cos\alpha_1 = \cos(\omega+\varphi); \quad \cos\alpha_2 = \sin(\omega+\varphi)\cos i; \quad \cos\alpha_3 = \sin(\omega+\varphi)\sin i;$$

$$\cos\beta_1 = -\sin(\omega+\varphi); \quad \cos\beta_2 = \cos(\omega+\varphi)\cos i; \quad \cos\beta_3 = \cos(\omega+\varphi)\sin i;$$

$$\cos\gamma_1 = 0; \quad \cos\gamma_2 = -\sin i; \quad \cos\gamma_3 = \cos i,$$

где ω — угол между линией узлов и осью апсид орбиты, i — наклонность орбиты спутника к экватору планеты, φ — истинная аномалия, т. е. полярный угол спутника, отсчитанный от линии апсид.

Для вычисления величин (6,4,2) воспользуемся решением (5,16,5), которое напишем в виде

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = -\frac{2m}{r}; \quad h_{14} = \frac{4}{5}m\omega_0 R_0^2\frac{y}{r};$$

$$h_{24} = -\frac{4}{5}m\omega_0 R_0^2\frac{x}{r};$$

$$h_{44} + 2\varphi = \frac{2m^2}{r^2} - \frac{2m\omega_0^2 R_0^2}{5r}\left(2 + \frac{R_0^2}{7r^2} - \frac{3R_0^2 z^2}{7r^4}\right).$$

Через ω_0, R_0 обозначены угловая скорость и радиус планеты; $m = \frac{\gamma M}{c^2}$, где γ — гравитационная постоянная, c — скорость света, M — масса планеты.

Координаты спутника с достаточной точностью определяются по формулам

$$x = r\cos(\omega + \varphi); \quad y = r\sin(\omega + \varphi)\cos i; \quad z = r\sin(\omega + \varphi)\sin i;$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Найдя декартовы проекции возмущающего ускорения по формулам (6,4,2), вычислим затем величины (6,4,3). После ряда необходимых преобразований, которые мы здесь не приводим, получим

$$R = \frac{m^2}{r^2}\left(\frac{2}{r} + \frac{1 - e^2 + 4e^2\sin^2\varphi}{p}\right) + \frac{4}{5}p^{\frac{1}{2}}m^{\frac{3}{2}}\omega_0 R_0^2\cos i\frac{1}{r^4} -$$
$$- \frac{2m\omega_0^2R_0^2}{5r^2} + \frac{3m\omega_0^2R_0^4}{35r^4}[3\sin^2(\omega + \varphi)\sin^2 i - 1];$$

$$S = \frac{4m^2}{r^3}e\sin\varphi - \frac{4}{5}p^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{3}{2}}\omega_0 R_0^2 e\cos i\sin\varphi\frac{1}{r^3} -$$
$$- \frac{6}{35}m\omega_0^2R_0^4\sin^2 i\sin(\omega + \varphi)\cos(\omega + \varphi)\frac{1}{r^4}; \qquad (6,4,4)$$

$$W = \frac{4}{5}p^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{3}{2}}\omega_0 R_0^2\sin i[-e\sin\omega + (2 + 3e\cos\varphi)\sin(\omega + \varphi)]\frac{1}{r^3} -$$
$$- \frac{6m\omega_0^2R_0^4}{35}\sin i\cos i\sin(\omega + \varphi)\frac{1}{r^4}.$$

Для исследования релятивистских возмущений в движении спутника применяется метод вариаций элементов классической небесной механики. Воспользуемся им в форме системы уравнений (1,6,3), которые определяют оскулирующие элементы орбиты в функциях истинной аномалии. При этом, в соответствии с принятым обозначением, следует положить $\mu = m$. Общее исследование уравнений для оскулирующих элементов не представляет интереса, так как периодические изменения элементов исчезающе малы. Заслуживают внимания только вековые эффекты, вызывающие монотонные изменения элементов. Поскольку поле тяготения равномерно вращающейся планеты стационарно, для оценки вековых эффектов достаточно интегрировать уравнения (1,6,3) в пределах одного обращения спутника.

Внесем (6,4,4) в первое из уравнений системы (1,6,3). Выполнив необходимые упрощения, получим уравнение, определяющее движение линии узлов:

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{4m^{\frac{1}{2}}\omega_0 R_0^2}{5p^{\frac{3}{2}}}[-e\sin\omega + (2 + 3e\cos\varphi)\sin(\omega + \varphi)] \times$$

$$\times \sin(\omega + \varphi) - \frac{6\omega_0^2 R_0^4}{35p^2}\cos i\,(1 + e\cos\varphi)\sin^2(\omega + \varphi).$$

Интегрируя его в указанных пределах, найдем следующее выражение для угла поворота линии узлов в течение одного обращения спутника:

$$\Delta\Omega = \frac{8\pi m^{\frac{1}{2}}\omega_0 R_0^2}{5p^{\frac{3}{2}}} - \frac{6\pi\omega_0^2 R_0^4}{35p^2}\cos i.$$

Отношение второго члена к первому по абсолютной величине не превышает $\frac{3}{28}\omega_0 R_0^{\frac{3}{2}}(\gamma M)^{-\frac{1}{2}} \simeq 200\,\omega_0\rho^{-\frac{1}{2}}$, где ρ — средняя плотность центрального тела. Для тел Солнечной системы второй член пренебрежим. В случае Земли ($\omega_0 = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$, $\rho = 5{,}52$ *г/см*^{3}) величина указанного отношения менее $6{,}2 \cdot 10^{-3}$; даже для быстро вращающегося Юпитера ($\omega_0 = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ *сек*$^{-1}$, $\rho = 1{,}33$ *г/см*^{3}) она не превосходит $3{,}1 \cdot 10^{-2}$.

Аналогично находятся вековые изменения других элементов орбиты. Второе, четвертое и пятое уравнения системы (1,6,3) после соответствующих преобразований и интегрирования по истинной аномалии дают $\Delta i = \Delta a = \Delta e = 0$. С помощью третьего уравнения этой системы получаем

$$\Delta\omega = \frac{6\pi m}{p} - \frac{24\pi m^{\frac{1}{2}}\omega_0 R_0}{5p^{\frac{3}{2}}}\cos i.$$

Первый член представляет собой выражение обычного релятивистского поворота линии апсид в задаче Кеплера. Второй член определяет дополнительный поворот этой линии, обусловленный вращением центрального тела и зависящий от наклонности орбиты спутника к экватору центрального тела.

Вариация в моменте прохождения спутника через вершину орбиты вычисляется из соотношения $\Delta\tau = -\frac{\Delta\sigma}{n}$, так как большая полуось орбиты не испытывает векового изменения.

Таким образом, вековые релятивистские эффекты в элементах орбиты, отнесенные к одному обращению спутника, находятся по следующим формулам:

$$\Delta a = \Delta e = \Delta i = 0;$$

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\gamma M}{c^2 a(1-e^2)} - \frac{24\pi(\gamma M)^{\frac{1}{2}}\omega_0 R_0^2 \cos i}{5c^2 a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad (6,4,5)$$

$$\Delta\Omega = \frac{8\pi(\gamma M)^{\frac{1}{2}}\omega_0 R_0^2}{5c^2 a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad \Delta\tau = \frac{6\pi(a\gamma M)^{\frac{1}{2}}}{c^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}(5-2\sqrt{1-e^2}).$$

Все величины в (6,4,5) выражены в единицах системы *CGS*, $\Delta\omega$ и $\Delta\Omega$ — в радианах.

Иллюстрируем полученные формулы числовыми примерами. Положив $a = R_0 = 6{,}4\cdot 10^{10}$ *см*, $e = 0$, $\omega_0 = 7{,}3\cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$, найдем предельные значения релятивистских вариаций элементов орбиты спутника Земли. За столетие они составят

$$\Delta\omega = 1660'' - 74''\cos i; \quad \Delta\Omega = 25''; \quad \Delta\tau = 33 \text{ сек.}$$

Обычный релятивистский эффект в движении линии апсид достаточно велик (для искусственного спутника Земли, движущегося со значительным периодом обращения, он может составить около 1000″ в столетие), тогда как эффекты вращения, обнаружение которых представило бы особенно большой интерес для ОТО, оказываются малыми из-за относительно медленного вращения Земли. Эти эффекты значительно больше в поле тяготения Юпитера. Для V спутника этой планеты ($a = 1{,}81\cdot 10^{10}$ *см*, $e = 0{,}003$, $i = 3°{,}1$) второй член в выражении $\Delta\omega$ составляет около 1200″ в столетие, что почти в 30 раз превосходит обычное релятивистское перемещение перигелия Меркурия за то же время. К сожалению, имеющиеся в настоящее время данные наблюдений недостаточны для проверки этого эффекта ОТО.

5. Задача двух тел в общей теории относительности. Рассмотренная в начале этой главы задача о движении частицы в поле гравитации одного центра представляет собой релятивистское обобщение ограниченной задачи двух тел механики Ньютона, в которой предполагается, что относительная масса одного из тел пренебрежимо мала. Полученное решение с достаточной точностью можно отнести к гелиоцентрическому обращению планет, к движению естественного или искусственного спутника относительно планеты и к другим системам, состоящим из двух тел с сильно различающимися массами. Для системы двух тел со сравнимыми массами, например для двой-