

### § 3. Параметрическое уравнение поверхности

**1. Понятие поверхности.** В этом и следующих параграфах мы применим аппарат анализа к изучению поверхностей.

Понятие поверхности, интуитивно достаточно ясное, можно определять с различной степенью общности. В анализе чаще всего приходится рассматривать поверхности, задаваемые уравнениями вида

$$z = f(x, y),$$

где  $f(x, y)$  — непрерывная функция, определенная в некоторой области  $G$ . Несколько более широкий класс поверхностей мы получим, рассматривая уравнения вида

$$F(x, y, z) = 0.$$

Чтобы такое уравнение действительно определяло поверхность (в смысле, соответствующем нашим наглядным представлениям), необходимо на функцию  $F(x, y, z)$  наложить некоторые дополнительные условия.

Определение поверхности как совокупности точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям вида  $z = f(x, y)$  или  $F(x, y, z) = 0$ , не очень удобно, так как оно привязывает понятие поверхности к выбору той или иной системы координат. Сформулируем понятие поверхности, не прибегая к координатной системе. Введем прежде всего важное понятие односвязной области.

Пусть  $G$  — некоторая область на плоскости. Назовем область  $G$  *односвязной*, если она удовлетворяет следующему условию: каков бы ни был замкнутый контур  $L$ , лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром (конечная) часть плоскости целиком лежит в  $G$ .

Иными словами, односвязность области означает отсутствие в ней «дырок». Любой замкнутый контур, лежащий внутри такой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

Если область не односвязна, то она называется *многосвязной*.

Примерами односвязных областей служат круг, треугольник, квадрат и т. д. Кольцо, т. е. часть плоскости, ограниченная двумя концентрическими окружностями, представляет собой простейший пример многосвязной области: действительно, область, ограниченная контуром  $L$  (рис. 3.11), вовсе не составляет части кольца, заключенного между окружностями  $C_1$  и  $C_2$ .

Назовем теперь простой поверхностью множество точек в трехмерном пространстве, представляющее собой взаимно

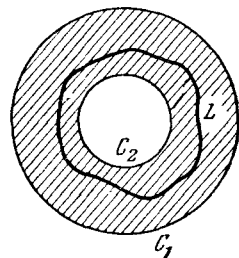


Рис. 3.11.

однозначный и в обе стороны непрерывный образ какой-либо замкнутой ограниченной односвязной области. Далее, просто поверхностью мы будем называть соединение любого конечного числа простых поверхностей. При этом мы, вообще говоря, допускаем и наличие у поверхности самопересечений, т. е. рассматриваем и такие геометрические образы, как, скажем, изображенный на рис. 3.12.

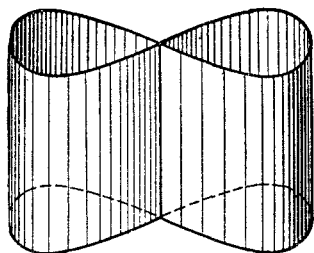


Рис. 3.12.

Если  $f(x, y)$  — непрерывная функция, определенная в замкнутой односвязной ограниченной области  $G$ , то уравнение

$$z = f(x, y)$$

определяет простую поверхность. Действительно, отображение

$$(x, y) \leftrightarrow (x, y, f(x, y))$$

устанавливает взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие (проверьте это!) между точками области  $G$  и точками, координаты которых удовлетворяют уравнению  $z = f(x, y)$ .

Практически наши дальнейшие рассуждения будут ограничиваться поверхностями, представленными как соединение конечного числа простых поверхностей, определяемых уравнениями вида  $z = f(x, y)$ . При этом от соответствующих функций  $f$  нам придется обычно, кроме непрерывности, требовать еще и некоторой гладкости (существования и непрерывности первых или вторых производных). Эти условия будут оговорены там, где они нам понадобятся.

**2. Параметризация поверхности.** Хотя задание поверхности с помощью уравнения вида  $z = f(x, y)$  или  $F(x, y, z) = 0$  в анализе встречается очень часто, во многих случаях удобнее задавать поверхность с помощью параметрических уравнений. Для того чтобы написать уравнение поверхности в параметрической форме, введем прежде всего понятие *координат на поверхности*.

Пусть на некоторой поверхности  $\Sigma$  задано однопараметрическое семейство линий \*). Назовем это семейство *правильным*, если через каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия из данного семейства. Если на поверхности даны два правильных семейства, такие, что каждая из линий первого семейства пересекается (без касания!) с каждой линией второго семейства не более чем в одной точке, то говорят, что на поверхности задана *координатная сеть*. Пусть линии первого из семейств, образующих координатную сеть, определяются значениями некоторого параметра  $u$ ,

\*) Таким образом, каждая линия этого семейства характеризуется определенным значением некоторого параметра.

а линии второго семейства — значениями некоторого параметра  $v$ . Так как по условию через каждую точку поверхности проходит единственная кривая из первого семейства и единственная кривая второго семейства, то положение точки на поверхности однозначно определяется соответствующими этим линиям значениями  $u_0$  и  $v_0$  параметров  $u$  и  $v$ . Параметры  $u$  и  $v$ , значениями которых определяются линии, составляющие координатную сеть, называются *координатами на данной поверхности*.

**Замечание.** В § 6 гл. 1 мы вводили криволинейные координаты в плоской области. Здесь мы, собственно говоря, повторили то же самое построение, но только применительно к кривой поверхности. Введение координат на поверхности можно, очевидно, рассматривать как задание взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения поверхности на некоторую часть плоскости, в которой введены декартовы координаты  $u$  и  $v$ . При этом линии, образующие координатную сеть, — это образы лежащих в плоскости  $uv$  прямых, параллельных координатным осям.

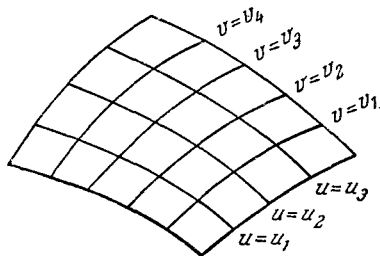


Рис. 3.13.

**Примеры.** 1. *Тор* называется поверхность, образованная вращением окружности вокруг не пересекающей ее прямой, лежащей в плоскости этой окружности. Положение точки на окружности можно задавать углом  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), отсчитываемым от некоторой начальной точки. Положение самой окружности можно задавать углом поворота  $\psi$ , который отсчитывается от начального положения. Таким образом, положение точки на торе определяется двумя углами  $\varphi$  и  $\psi$ , каждый из которых меняется от 0 до  $2\pi$ . Линии  $\varphi = 0$  и  $\psi = 0$  соответствующей координатной сети изображены на рис. 3.14.

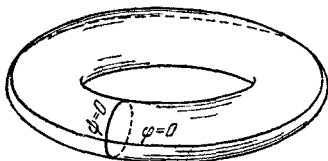


Рис. 3.14.

2. Пусть поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ ; иначе говоря, она проектируется взаимно однозначно на некоторую часть плоскости  $xu$ . Линии, которые при этом проектируются в прямые  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , образуют на поверхности  $z = f(x, y)$  координатную сеть (рис. 3.15).

Ясно, конечно, что на одной и той же поверхности можно задавать различные координатные сети.

**3. Параметрическое уравнение поверхности.** Если на поверхности  $\Sigma$  введены каким-либо образом координаты  $u, v$ , то говорят, что эта поверхность *параметризована* параметрами  $u$  и  $v$ . Каждая

точка такой поверхности может быть задана значениями параметров  $u$  и  $v$ . Но эта же точка может быть задана и своими декартовыми координатами. Следовательно, декартовы координаты точек параметризованной поверхности представляют собой функции координат на поверхности:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), & y &= y(u, v), \\z &= z(u, v).\end{aligned}\quad (3.30)$$

Эти три скалярных уравнения можно заменить одним векторным:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (3.30')$$

где  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Уравнения вида (3.30) или (3.30') мы будем называть параметрическими уравнениями поверхности.

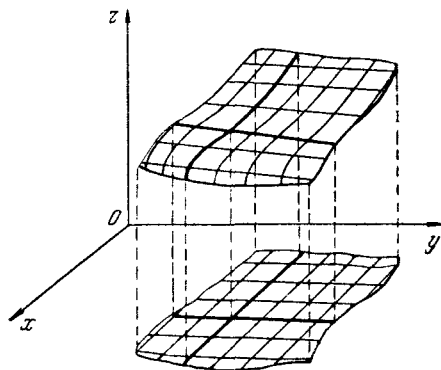


Рис. 3.15.

**Замечание 1.** В параметрическом уравнении кривой координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  являются функциями одного параметра. В уравнении поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , представляющей собой геометрический образ двух измерений, естественно должны участвовать два независимых параметра.

**Замечание 2.** Уравнение  $z = f(x, y)$  можно рассматривать как частный случай параметрического уравнения, если принять  $x$  и  $y$  за параметры и положить

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

**У п р а ж н е н и е.** Написать параметрическое уравнение тора в координатах  $\varphi$  и  $\psi$  (см. пример 1 п. 2).

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхности, заданные именно параметрическими уравнениями, причем функцию  $\mathbf{r}(u, v)$  будем предполагать непрерывной и имеющей непрерывные частные производные по  $u$  и  $v$ . Начиная с § 8, нам придется потребовать также существования и непрерывности ее частных производных второго порядка.

**4. Кривые на поверхности.** Рассмотрим на поверхности, заданной уравнением (3.30'), какую-нибудь кривую. Если на этой кривой введен некоторый параметр  $t$ , то каждому значению  $t$  будет отвечать некоторая точка поверхности, т. е. некоторые значения  $u$  и  $v$ . Таким образом, вдоль кривой координаты  $u$  и  $v$  являются функциями параметра  $t$ :

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Эти уравнения называются уравнениями кривой на поверхности. Подставив их в уравнение поверхности, получаем параметрическое уравнение кривой на поверхности:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)). \quad (3.31)$$

И обратно, подставив в уравнение поверхности (3.30') вместо независимых переменных  $u$  и  $v$  какие-либо функции одного переменного  $t$ , мы получим уравнение некоторой кривой, лежащей на этой поверхности.

Рассмотрим касательную к кривой (3.31). Ее направление определяется вектором

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt},$$

который представляет собой линейную комбинацию векторов  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ ,

называемых *координатными векторами* и представляющих собой векторы, касательные к координатным линиям, проходящим через рассматриваемую точку. Для краткости обозначим их  $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

**5. Касательная плоскость.** Рассмотрим всевозможные кривые на поверхности, проходящие через данную точку  $M$ , и касательные векторы к ним в этой точке (рис. 3.16). Каждый из этих векторов представляет собой линейную комбинацию векторов  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$ , т. е. лежит в определяемой этими векторами плоскости. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к данной поверхности в точке  $M$ . Напишем уравнение касательной плоскости. Поскольку векторы  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$  лежат в касательной плоскости, вектор  $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$  нормален к ней и уравнение этой плоскости имеет вид \*)

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}, \mathbf{N}) = 0 \quad (3.32)$$

(здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки касания,  $\mathbf{p}$  — радиус-вектор текущей точки касательной плоскости).

Пусть поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , т. е. в векторной форме

$$\mathbf{r} = ix + jy + kf(x, y).$$

Напишем уравнение касательной плоскости для такой поверхности.

\*) Точки, в которых  $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = 0$ , мы исключаем из рассмотрения.

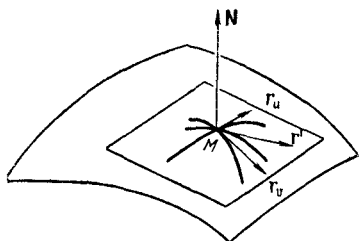


Рис. 3.16.

Имеем

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \mathbf{k}f'_x, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \mathbf{k}f'_y$$

и, следовательно,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y] = -\mathbf{i}f'_x - \mathbf{j}f'_y + \mathbf{k}. \quad (3.33)$$

Подставив в уравнение касательной плоскости (3.32) вместо  $\rho$  —  $\mathbf{r}$  вектор  $\mathbf{i}(x - x_0) + \mathbf{j}(y - y_0) + \mathbf{k}(z - z_0)$ , а вместо нормального вектора  $\mathbf{N}$  его выражение (3.33), получим уравнение плоскости, касающейся поверхности  $z = f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0), \quad (3.34)$$

где значения четных производных  $f'_x$  и  $f'_y$  берутся в точке касания  $(x_0, y_0)$ .

Если поверхность задана неявным уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , которое определяет  $z$  как дифференцируемую функцию от  $x$  и  $y$ , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Подставив эти выражения вместо  $f'_x$  и  $f'_y$  в уравнение (3.33), получаем уравнение плоскости, касательной к поверхности  $F(x, y, z) = 0$ ,

$$(x - x_0)F'_x + (y - y_0)F'_y + (z - z_0)F'_z = 0.$$

Здесь значения  $F'_x$ ,  $F'_y$  и  $F'_z$  также берутся в точке касания  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**6. Нормаль к поверхности.** Вычислим направляющие косинусы вектора

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v],$$

нормального к поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ . Так как

$$\mathbf{r}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

то вектор  $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$  имеет компоненты

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (3.35)$$

а его направляющие косинусы соответственно равны

$$\cos(\mathbf{N}, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(\mathbf{N}, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos(\mathbf{N}, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В частности, если поверхность задана явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

или в векторной форме уравнением

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k},$$

то

$$A = \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x, \quad B = \begin{vmatrix} f'_x & 1 \\ f'_y & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

т. е. в этом случае

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{N}, x) &= \frac{-f'_x}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}, & \cos(\mathbf{N}, y) &= \frac{-f'_y}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}, \\ \cos(\mathbf{N}, z) &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

**7. Системы координат в касательных плоскостях.** Рассмотрим поверхность  $\Sigma$ , в каждой точке  $M$  которой можно построить касательную плоскость. Полезно представлять себе поверхность, покрытую «чешуей» касательных плоскостей. Поверхность — это *кривое многообразие-носитель*, ее касательные плоскости — это *плоские несомые многообразия*. Этот наглядный образ будет полезен при изучении дальнейшего материала этой главы.

Выберем в каждой касательной плоскости пару неколлинеарных векторов (репер)  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , которые определяют в ней систему координат. Этот репер, разумеется, можно выбирать в каждой точке произвольным образом. Однако задание параметризации  $u, v$ , естественно, порождает в каждой из касательных плоскостей некоторый

специальный репер, именно репер  $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ . Действительно, фиксируем значение параметра  $v = v_0$  и будем менять параметр  $u$ ; тогда радиус-вектор  $\mathbf{r}(u, v_0)$  опишет на поверхности координатную кривую  $v = v_0 = \text{const}$  (рис. 3.17). Касательный вектор к этой кривой, т. е.  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$ , будет лежать в касательной плоскости к поверхности (см. п. 4). Аналогично вектор  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  также лежит в касательной плоскости к поверхности. Мы предполагаем, что через

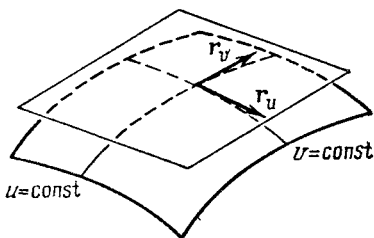


Рис. 3.17.

каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия каждого из семейств  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ . Поэтому в каждой касательной плоскости возникает один и только один репер  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ ; если эти векторы отличны от нуля, то они не коллинеарны, поскольку по условию кривые  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  ни в одной точке не касаются друг друга. Опасно лишь обращение какого-либо из этих векторов в нуль. Мы будем в дальнейшем считать, что параметризация на рассматриваемом куске поверхности такова, что  $\mathbf{r}_u \neq 0$  и  $\mathbf{r}_v \neq 0$ .

Итак, задание параметризации  $u, v$  на поверхности порождает в каждой касательной плоскости невырожденный репер  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_u, \mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_v$ , т. е. некоторую аффинную систему координат.

Выбор другой параметризации  $\tilde{u}, \tilde{v}$  порождает в несомых касательных плоскостях другой набор систем координат  $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{r}_{\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{r}_{\tilde{v}}$ , а в каждой из касательных плоскостей переход от одной параметризации к другой порождает аффинное преобразование системы координат.

Действительно, пусть

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

— выражение старых параметров  $u, v$  через новые  $\tilde{u}, \tilde{v}$ . По правилу дифференцирования сложной вектор-функции имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{u}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \mathbf{r}_{\tilde{v}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Таким образом, новый репер  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$  выражается через старый  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \mathbf{e}_2, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.37')$$

Аналогично выражается старый репер  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  через новый  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ .

#### § 4. Измерение на кривой поверхности длин, углов и площадей. Первая квадратичная форма поверхности

Для решения многих физических, технических и геометрических задач нужно уметь вычислять длины дуг, лежащих на поверхности, углы между такими дугами, площади тех или иных частей поверхности. Этот круг вопросов мы и рассмотрим сейчас. Основная идея