торного поля. Иными словами, для всякого поля $\mathbf{A}$, удовлетворяющего условию $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, можно подобрать поле $\mathbf{B}$ так, что $\mathbf{A}=\operatorname{rot}\mathbf{B}$. Это векторное поле $\mathbf{B}$ определяется не однозначно, а с точностью до произвольного слагаемого вида $\operatorname{grad} U$.

Если $\mathbf{A}=\operatorname{rot}\mathbf{B}$, то поле $\mathbf{B}$ называется *вектор-потенциалом* поля $\mathbf{A}$.

Хотя потенциальные и соленоидальные поля не исчерпывают всех векторных полей, любое векторное поле сводится к комбинации полей этих двух типов. Точнее говоря, можно доказать, что всякое векторное поле $\mathbf{A}$ представимо в виде

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C},$$

где $\mathbf{B}$ потенциально, а $\mathbf{C}$ соленоидально.

§ 5. Оператор Гамильтона

1. Символический вектор ∇. В § 1 мы ввели понятие градиента скалярного поля. Переход от скалярного поля U к $\operatorname{grad} U$ можно рассматривать как некоторую операцию, во многом аналогичную по своим свойствам операции дифференцирования, с той, однако, разницей, что дифференцирование переводит скаляр в скаляр, в то время как здесь мы имеем переход от скаляра к вектору. Операцию перехода от U к $\operatorname{grad} U$ часто обозначают, следуя Гамильтону *), символом ∇ (читается «набла» **)) и называют *оператором «набла»*, или *оператором Гамильтона*. Таким образом, по определению

$$\nabla U=\operatorname{grad} U.$$

Оператор ∇ удобно трактовать как символический вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

а применение его к скалярной функции — как умножение скаляра на этот вектор ***).

---

*) У. Р. Гамильтон (1805—1865) — английский математик и механик.

**) Само название «набла» было также введено Гамильтоном. Наблой назывался старинный музыкальный инструмент, имевший треугольную форму.

***) Выше, например, при записи ротора как символического детерминанта мы уже видели, что операцию дифференцирования удобно представлять себе как «умножение» символа дифференцирования на ту функцию, производная которой вычисляется.

С помощью вектора ∇ удобно записывать и остальные операции векторного анализа, а именно, если $\mathbf{A}=(P,\ Q,\ R)$, то

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}P+\frac{\partial}{\partial y}Q+\frac{\partial}{\partial z}R=(\nabla,\ \mathbf{A}),$$

т. е. дивергенция векторного поля $\mathbf{A}$ есть скалярное произведение символического вектора ∇ и вектора $\mathbf{A}$. Аналогично

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\left(\frac{\partial}{\partial y}R-\frac{\partial}{\partial z}Q\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}P-\frac{\partial}{\partial x}R\right)\mathbf{j}+\\+\left(\frac{\partial}{\partial x}Q-\frac{\partial}{\partial y}P\right)\mathbf{k}=[\nabla,\ \mathbf{A}],$$

т. е. ротор векторного поля $\mathbf{A}$ есть векторное произведение вектора ∇ на вектор $\mathbf{A}$.

2. Действия с вектором ∇. Целесообразность введения символического вектора ∇ состоит в том, что с его помощью удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа. Кроме того, сами эти формулы приобретают в такой записи большую наглядность и выразительность. Вот простейшие примеры.

Выше мы с помощью непосредственных вычислений получили следующие два равенства:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=0$$

и

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}=0.$$

Переписав их с помощью вектора ∇, получим

$$[\nabla,\ \nabla U]=0$$

и

$$(\nabla,\ \nabla,\ \mathbf{A})=0.$$

Левая часть первого из этих равенств представляет собой «векторное произведение» (символическое) двух «векторов», отличающихся друг от друга лишь скалярным множителем, а во втором равенстве слева стоит «смешанное произведение» трех векторов, два из которых одинаковы. Следовательно, равенство нулю этих выражений находится в полном соответствии с основными законами векторной алгебры.

С помощью непосредственной проверки можно убедиться в том, что на вектор ∇ можно перенести многие из основных действий, известных для обычных векторов. Именно это обстоятельство и дает возможность получать с помощью вектора ∇ ряд формул векторного анализа, применяя аппарат векторной алгебры.

Следует, однако, иметь в виду, что аналогия между символическим вектором ∇ и «настоящими» векторами — не полная. Именно, формулы, содержащие символический вектор ∇, аналогичны обычным формулам векторной алгебры в том случае, если они не содержат произведений переменных величин (скалярных или векторных), т. е. до тех пор, пока нам не приходится применять входящие в ∇ операции дифференцирования к произведению переменных величин. Если же некоторое выражение содержит произведение двух или нескольких переменных сомножителей, то, применяя к этому выражению вектор ∇, нельзя руководствоваться обычными правилами векторной алгебры. Для установления соответствующих правил действия рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть $U = U(x, y, z)$ — скалярное поле и $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ — векторное поле. Вычислим $\operatorname{div}(U\mathbf{A})$, т. е. $(\nabla, U\mathbf{A})$. Применение вектора ∇ сводится к применению входящих в него операций дифференцирования. Но, как известно, правило дифференцирования произведения состоит в том, что мы дифференцируем сначала первый сомножитель, а остальные рассматриваем как постоянные, затем дифференцируем второй сомножитель, считая остальные постоянными, и т. д. и берем сумму полученных таким образом выражений.

Условимся каждый раз отмечать в формулах знаком «$\downarrow$» тот сомножитель, к которому оператор ∇ должен применяться. Тогда, как легко проверить, выражение для $\operatorname{div}(U\mathbf{A})$ можно записать так:

$$(\nabla, U\mathbf{A}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{U}\mathbf{A}) + (\nabla, U\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}).$$

Множители, на которые ∇ не действует, можно «высвободить» из-под оператора ∇. Таким образом, получаем

$$(\nabla, U\mathbf{A}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{U}\mathbf{A}) + (\nabla, U\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}) = (\nabla U, \mathbf{A}) + U(\nabla, \mathbf{A}),$$

т. е. в обычных обозначениях

$$\operatorname{div}(U\mathbf{A}) = (\mathbf{A}, \operatorname{grad} U) + U \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

2. Рассмотрим выражение

$$\operatorname{grad}(UV),$$

которое в символической записи имеет вид

$$\nabla UV.$$

Руководствуясь сказанным выше, имеем

$$\nabla UV = \nabla \overset{\downarrow}{U} V + \nabla U \overset{\downarrow}{V} = V \nabla U + U \nabla V,$$

т. е. в обычных обозначениях

$$\operatorname{grad}(UV) = V \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} V.$$

Из рассмотренных примеров ясны правила, которые надо применять, пользуясь оператором ∇: в выражениях, содержащих одну переменную, с ним можно поступать, как с обычным вектором, а к выражениям, содержащим произведения нескольких переменных, оператор ∇ применяется в соответствии с правилом дифференцирования произведения. Наконец, применение ∇ к сумме любых слагаемых всегда сводится к применению ∇ к каждому из слагаемых в отдельности.

Дадим в заключение этого параграфа сводку формул, связывающих операции взятия градиента, ротора и дивергенции с основными операциями векторной алгебры:

1. $\operatorname{div}(U\mathbf{A}) = (\mathbf{A}, \operatorname{grad} U) + U \operatorname{div} \mathbf{A}$;
2. $\operatorname{grad}(UV) = V \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} V$;
3. $\operatorname{rot}(U\mathbf{A}) = U \operatorname{rot} \mathbf{A} + [\operatorname{grad} U, \mathbf{A}]$;
4. $\operatorname{div}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B})$;
5. $\operatorname{rot}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (\mathbf{B}, \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}$;
6. $\operatorname{grad}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{B}, \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{B} + [\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}] + [\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B}]$;

в частности, положив в последней формуле $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, получим

$$\operatorname{grad} \frac{A^2}{2} = (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{A} + [\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}].$$

Первые две из этих формул были получены выше. Остальные могут быть получены аналогичным образом с применением оператора ∇ (и соблюдением указанных выше правил действия с ∇) и обычных формул векторной алгебры. В частности, для вычисления выражения $\operatorname{rot}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, которое в символической форме пишется как

$$[\nabla, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]],$$

следует применить известную формулу *) двойного векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Выражение вида $(\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{B}$, встречающееся в последних двух формулах, означает векторную величину

$$\left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, \right.$$
$$\left. A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}\right),$$

*) Эту формулу удобно запомнить так: произведение $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ равно среднему вектору $\mathbf{b}$, умноженному на скалярное произведение крайних (т. е. на $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$), минус внутренний крайний вектор (т. е. $\mathbf{c}$), умноженный на скалярное произведение двух остальных (т. е. на $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$). Это правило, как легко проверить, остается в силе и для двойного векторного произведения, имеющего вид $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]$.

которую можно рассматривать как результат применения «скалярной» операции

$$(\mathbf{A}, \nabla) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

к каждой из компонент вектора **B** *).

§ 6. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа

1. Дифференциальные операции второго порядка. В предыдущих параграфах мы ввели понятия градиента, дивергенции и ротора. В приложениях векторного анализа приходится встречаться не только с выполнением этих основных операций, но и с различными их комбинациями. Особенно часто встречаются так называемые операции второго порядка, т. е. попарные комбинации трех указанных выше основных операций.

Комбинируя символы grad, rot, div попарно, мы можем составить из них девять пар. Однако не все эти пары имеют смысл; например, операция

$$\operatorname{rot}\operatorname{div}$$

(т. е. взятие ротора от дивергенции) не имеет смысла ни для скалярного поля, ни для векторного. Все имеющиеся здесь возможности изображаются следующей таблицей:

	Скалярное поле U	Векторное поле **A**	
	grad	div	rot
grad		grad div **A**	
div	div grad U		div rot **A**
rot	rot grad $U \equiv 0$		rot rot **A** $\equiv 0$

в которой заштрихованы клетки, отвечающие не имеющим смысла сочетаниям основных операций. Мы видим, что применительно

*) Для большей симметрии формул мы здесь обозначили компоненты векторов **A** и **B** теми же буквами, что сами векторы, добавив соответствующие индексы. Такой системой обозначений мы будем пользоваться и дальше.