ДОПОЛНЕНИЕ 4 К ГЛ. 11

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Остановимся на некоторых применениях преобразования Фурье.

Многие физические приборы можно рассматривать как операторы или преобразователи, на вход которых подаются функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., а на выходе получаются соответственно функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... Так, различные усилители можно рассматривать как операторы, преобразующие напряжение $f(t)$ переменного тока, подаваемого на вход, в напряжение $x(t)$ переменного тока, получающегося на выходе.

Преобразователь называется *линейным*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) если $f(t)$ преобразуется в $x(t)$, то $cf(t)$, где c — произвольная постоянная, преобразуется в $cx(t)$,

2) если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуются соответственно в $x_1(t)$ и $x_2(t)$, то $f_1(t)+f_2(t)$ преобразуется в $x_1(t)+x_2(t)$.

Если требования 1) и 2) выполнены, то говорят, что для преобразователя выполняется *принцип суперпозиции*.

Мы будем предполагать также, что установившиеся гармонические колебания с частотой ω преобразуются в установившиеся гармонические колебания с той же частотой ω, т. е. что выполнено еще одно требование:

3) функция $e^{i\omega t}$ преобразуется в функцию $A(\omega)e^{i\omega t}$.

Зависимость коэффициента пропорциональности $A(\omega)$ от частоты означает, что гармонические колебания с различными частотами один и тот же преобразователь преобразует по-разному. Функция $A=A(\omega)$ называется *спектральной характеристикой* преобразователя. Эта функция принимает, вообще говоря, комплексные значения

$$A(\omega)=R(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad \text{где} \quad R(\omega)=|A(\omega)|, \quad \varphi(\omega)=\arg A(\omega).$$

Следовательно, гармоническое колебание $e^{i\omega t}$ преобразуется в гармоническое колебание $A(\omega)e^{i\omega t}=R(\omega)e^{i(\omega t+\varphi(\omega))}$.

Модуль $R(\omega)=|A(\omega)|$ спектральной характеристики называется *частотной характеристикой* преобразователя; он показывает, во сколько раз изменяется амплитуда гармонического колебания с данной частотой ω. Аргумент $\varphi(\omega)=\arg A(\omega)$ спектральной характеристики называется *фазовой характеристикой* преобразователя; он показывает, насколько изменяется фаза гармонического колебания с данной частотой ω.

Зная спектральную характеристику $A=A(\omega)$ линейного преобразователя и применяя преобразование Фурье, можно решить следующие две задачи.

Прямая задача. По заданной функции $f(t)$ на входе найти преобразованную функцию $x(t)$ на выходе.

Обратная задача. По преобразованной функции $x(t)$, получающейся на выходе, найти функцию $f(t)$, поданную на вход.

Покажем сначала, как решается прямая задача. Пусть на вход подана функция $f(t)$. Найдем ее образ Фурье

$$\bar{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \tag{1}$$

и представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{2}$$

Интеграл в правой части равенства (2) можно рассматривать как сумму бесконечно большого числа бесконечно малых гармонических колебаний вида

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{3}$$

Гармоническое колебание $e^{i\omega t}$ преобразуется в гармоническое колебание $A(\omega)e^{i\omega t}$, следовательно, гармоническое колебание $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{f}(\omega)\,d\omega\right)e^{i\omega t}$ преобразуется, в силу свойства 1) преобразователя, в гармоническое колебание

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{f}(\omega)\,d\omega\right)A(\omega)\,e^{i\omega t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(\omega)\,\bar{f}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{4}$$

Сумма колебаний (3) преобразуется, в силу свойства 2) преобразователя, в сумму колебаний (4), а следовательно, функция $f(x)$, определяемая соотношением (2), преобразуется в функцию $x(t)$, определяемую соотношением

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\,\bar{f}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{5}$$

Соотношением (5) решается прямая задача.

Из соотношения (5) следует, что образом Фурье функции $x(t)$ является

$$\bar{x}(\omega)=A(\omega)\,\bar{f}(\omega), \tag{6}$$

т. е. для получения образа Фурье $\bar{x}(\omega)$ преобразованной функции $x(t)$ нужно образ Фурье $\bar{f}(\omega)$ функции $f(t)$, поданной на вход, умножить на спектральную характеристику $A(\omega)$ преобразователя.

Чтобы решить обратную задачу, из соотношения (6) находим

$$\bar{f}(\omega)=\frac{\bar{x}(\omega)}{A(\omega)} \tag{7}$$

и, применяя к этому равенству обратное преобразование Фурье, получаем, что

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{x}(\omega)}{A(\omega)}e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{8}$$

Соотношение (8) представляет собой решение обратной задачи; оно позволяет по функции $x(t)$, получающейся на выходе, найти функцию $f(t)$, поданную на вход, при этом предварительно нужно, применив преобразование Фурье, найти образ Фурье $\bar{x}(\omega)$ функции $x(t)$, получающейся на выходе.

Эти задачи часто приходится решать в радиофизике, радиотехнике, при исследовании систем автоматического регулирования и т. п.

Преобразование Фурье широко применяется также для решения различных краевых задач математической физики. Образ Фурье искомой функции часто удовлетворяет значительно более простому уравнению, чем сама искомая функция. Поэтому для решения краевых задач математической физики преобразование Фурье применяется по следующей схеме: сначала подвергают преобразованию Фурье уравнение, которому удовлетворяет искомая функция, и таким путем получают уравнение для ее образа Фурье, затем, найдя из этого уравнения образ Фурье используемой функции, находят с помощью обратного преобразования Фурье саму искомую функцию (см. вып. 4).

Рассмотрим один характерный пример. Пусть требуется найти распределение температуры в неограниченном стержне в произвольный момент времени $t>0$, если ее распределение в начальный момент времени $t=0$ известно. Температура u в стержне (ось x считается направленной по стержню) является функцией точки x стержня и времени t: $u=u(x, t)$, $-\infty<x<+\infty$, $0<t<+\infty$. Известно, что температура в стержне удовлетворяет уравнению теплопроводности (см. вып. 4)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty<x<+\infty, \quad t>0. \tag{9}$$

Так как начальное распределение температуры известно, то

$$u(x, 0)=f(x), \quad -\infty<x<+\infty, \tag{10}$$

где $f(x)$ — известная функция. Таким образом, чтобы найти распределение температуры в неограниченном стержне в любой момент времени t, нужно найти решение уравнения (9), принимающее заданные начальные значения (10).

Решим эту задачу, применяя преобразование Фурье по переменной x. Через $\bar{u}(\lambda, t)$ обозначим образ Фурье функции $u(x, t)$:

$$\bar{u}(\lambda, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)\, e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{11}$$

Умножим обе части уравнения (9) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$, предполагая, что функция u и ее производные достаточно быстро стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$.

Применив интегрирование по частям, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x, t)\,e^{-i\lambda x}\,dx=$$

$$=\frac{d\bar{u}(\lambda, t)}{dt}=a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-i\lambda x}\,dx=a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\lambda x}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}+$$

$$+a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\lambda u e^{-i\lambda x}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}-a^2\lambda^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-i\lambda x}\,dx=-a^2\lambda^2\bar{u}(\lambda, t),$$

так как внеинтегральные члены обращаются в нуль, в силу ограниченности $e^{-i\lambda x}$ *) и стремления к нулю u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x\to\pm\infty$. Следовательно, для образа Фурье искомой функции получается уравнение

$$\frac{d\bar{u}}{dt}+a^2\lambda^2\bar{u}=0, \tag{12}$$

значительно более простое, чем уравнение (9). Из равенства (11) при $t=0$ находим начальное условие для $\bar{u}(\lambda, t)$

$$\bar{u}(\lambda, 0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x, 0)\,e^{-i\lambda x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx=\bar{f}(\lambda). \tag{13}$$

Решим уравнение (12) при начальном условии (13); из (12) получаем

$$\frac{d\bar{u}}{\bar{u}}=-a^2\lambda^2\,dt.$$

---

*) $|e^{-i\lambda x}|=|\cos\lambda x+i\sin\lambda x|=\sqrt{\cos^2\lambda x+\sin^2\lambda x}=1.$

Следовательно,

$$\ln \bar{u} = -a^2\lambda^2 t + \ln C$$

и

$$\bar{u}(\lambda, t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Определим константу C с помощью начального условия (13):

$$\bar{u}(\lambda, 0) = C = \bar{f}(\lambda).$$

Подставляя это значение C в предыдущее равенство, получим для образа Фурье искомой функции выражение

$$\bar{u}(\lambda, t) = \bar{f}(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{14}$$

Чтобы найти $u(x, t)$, применим к равенству (14) обратное преобразование Фурье, подставив вместо $\bar{f}(\lambda)$ его явное выражение $\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi$. Это дает

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\lambda, t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\xi \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(x-\xi)\, d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi,$$

так как (см. п. 5 § 2 гл. 10)

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos\beta\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Таким образом, решение уравнения (9) при начальном условии (10) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi.$$

Аналогичным образом применяются синус- и косинус-преобразования Фурье для решения краевых задач на полупрямой $0 \leqslant x < +\infty$ (см. вып. 4).

Применение кратных преобразований Фурье позволяет решать краевые задачи для неограниченных областей на плоскости и в пространстве, таких, как вся плоскость, полуплоскость, квадрант, все пространство, полупространство и т. п.

ДОПОЛНЕНИЕ 5 К ГЛ. 11

РАЗЛОЖЕНИЕ δ-ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Вычисляя коэффициенты Фурье для δ-функции $\delta(x_0, x)$ по обычным формулам, получаем

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \delta(x_0, \xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi = \frac{1}{l}\cos\frac{k\pi x_0}{l},$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \delta(x_0, \xi)\,d\xi = \frac{1}{l},$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \delta(x_0, \xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi = \frac{1}{l}\sin\frac{k\pi x_0}{l} \quad (\text{при } x_0 \in (-l, l)).$$

Следовательно, ряд Фурье для δ-функции $\delta(x_0, x)$ имеет вид

$$\delta(x_0, x) \sim \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{k\pi x_0}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi x_0}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$
$$= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{k\pi}{l}(x - x_0) \qquad (1)$$

или в комплексной форме

$$\delta(x_0, x) \sim \frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{\pi}{l}(x-x_0)}. \qquad (2)$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм этого ряда

$$\tilde{\delta}_n(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi x_0}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi x_0}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad (3)$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

или в комплексной форме

$$\delta_n(x_0, x) = \frac{1}{2l}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\frac{\pi}{l}(x-x_0)}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$