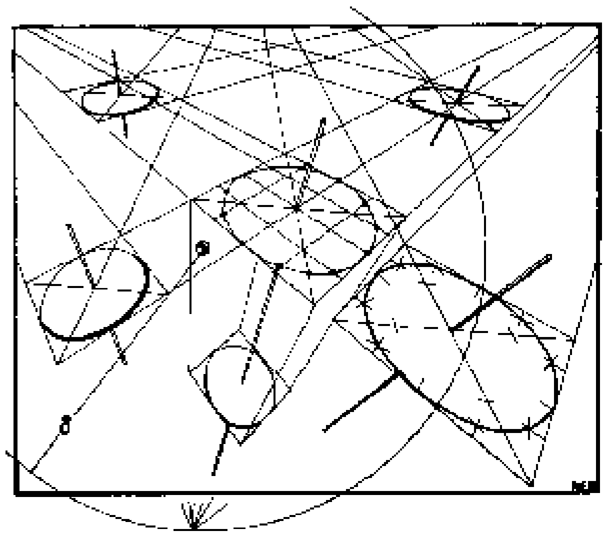
ÝËÅÌÅÍÒÛ
ÏÐÎÅÊÒÈÂÍÎÉ ÃÅÎÌÅÒÐÈÈ
ÄËß ÔÈÇÈÊÎÂ



ББК 22.151

Литература.

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. ч. II. М.: Просвещение, 1987,
2. Атанасян Л.С. Сборник задач по геометрии. ч.II. М.: Просвещение, 1975.

Лекция 1.

Понятие проективной геометрии

1. Классификация геометрических свойств. В геометрии рассматриваются свойства фигур на плоскости и в пространстве. Эти свойства столь многочисленны и столь разнообразны, что необходим какой-то принцип классификации для того, чтобы внести порядок в обширное собрание накопленных знаний. Можно было бы, например, положить в основу классификации метод, применяемый при выводе получаемых утверждений. С этой точки зрения обыкновенно различаются “*синтетические*” и “*аналитические*” процедуры. Синтетические доказательства связаны с классическим аксиоматическим методом, идущим от Евклида: рассуждение строится на чисто геометрической основе, независимо от средств алгебры и концепции числового континуума. Все теоремы выводятся формально логическим путём, исходя из некоторого числа начальных положений, называемых аксиомами или постулатами. Другой метод подразумевает введение числовой координатной системы и пользуется техническим аппаратом алгебры. Этот метод произвёл глубокие изменения в самой математической науке, слив в одно органическое целое геометрию, анализ и алгебру.

2. Инвариантность при преобразовании. В элементарной геометрии мы имели дело с величинами: отрезками, углами, площадями. Две фигуры там считаются эквивалентными, если они конгруэнтны, т.е. могут быть переведены одна в другую посредством движения - преобразования, меняющего только положение фигуры, но не числовые значения величин, с ней связанных. Возникает вопрос: является ли значение величин - и вместе с тем конгруэнтность или подобие фигур - чем-то существенно неизменным в геометрии? Или же имеются иные, более глубоко лежащие свойства геометрических фигур, которые сохраняются также и при преобразованиях более общего типа, чем движения?

В качестве преобразования более общего типа можно рассмотреть, например, преобразование *деформации* (растяжение, сжатие) переводящее окружность в эллипс.

Сделанные замечания наводят на мысль о возможности классифицировать теоремы, относящиеся к той или иной геометрической фигуре, в зависимости от того, сохраняют ли они силу или теряют её при равномерном сжатии (растяжении). Можно поставить и более общий вопрос: исходя из некоторого данного класса преобразований фигуры (такого рода классы, например, порождаются совокупностью всех движений, или сжатий, или инверсий и т.д.); можно поинтересоваться тем, какие свойства фигуры остаются неизменными, когда фигура подвергается различным преобразованиям данного класса. *Система теорем, утверждающих такие свойства, составляет **геометрию рассматриваемого класса преобразований***. Идея классификации различных отраслей геометрии в соответствии с классами преобразований принадлежит Феликсу Клейну (1849-1925); она была высказана им в 1872 г., в его знаменитом выступлении, получившим широкую известность под именем “Эрлангенской программы”. С тех пор эта идея оказала решающее влияние на направление многих геометрических исследований.

В настоящем курсе лекций мы займёмся теми свойствами, которые сохраняются, или “инвариантны”, при некотором специальном классе преобразований, более широком, чем весьма ограниченный класс движений, но более узком, чем самый общий класс произвольных деформаций, который мы будем рассматривать в курсе общей топологии. Мы говорим о классе “*проективных преобразований*”.

3. **Проективные преобразования**. Изучение относящихся сюда геометрических свойств было выдвинуто перед математиками в давнее время проблемами ***перспективы***, которые изучались художниками. Изображение, создаваемое художником, следует рассматривать как проекцию оригинала на плоскость картины, причём центр проекции помещается в глазе художника. При проектировании в зависимости от относительных положений различных изображаемых объектов - длины отрезков и углы неизбежно подвергаются искажениям. И тем не менее на картине обычно не представляет труда распознать геометрическую структуру оригинала. Как объяснить это обстоятельство? Нельзя объяснить иначе, как указав на наличие геометрических свойств, “инвариантных относительно проектирования” - свойств, сохраняющихся на картине и делающих возможным узнавание нарисованного оригинала. Отыскание и анализ этих свойств составляют предмет проективной геометрии.

Систематические исследования в области проективной геометрии развернулись впервые лишь в конце XVIII столетия, в работах Жана-Виктора Понселе (1788-1867), написавшего свой “Трактат о проективных свойствах фигур” в 1813 г., будучи в плену в России.

В XIX в. Под влиянием работ Штейнера (1793-1863), Штаудта (1798-1867), Шаля (1793-1880) и других проективная геометрия стала одним из излюбленных предметов математических исследований. Своей популярностью она обязана отчасти присущей ей особенной эстетической привлекательности, отчасти же способности проливать свет на геометрическую науку в целом, а также глубокой внутренней связи с неевклидовой геометрией и с алгеброй.

4. Группа проективных преобразований. Определим класс или “*группу*” *проективных преобразований*. Пусть в пространстве заданы две плоскости (рис.1) p и p', параллельные или непараллельные между собой. Мы выполняем ***центральную проекцию*** p на p' с данным центром O, не лежащим ни на p, ни на p', сопоставляя каждой точке P плоскости p такую точку P' плоскости p', что P и P' лежат на одной и той же прямой, проходящей через O. Аналогично мы выполняем (рис.2) подобным же образом ***параллельную проекцию***, предполагая, что проектирующие прямые параллельны между собой. Точно так же определяется проекция прямой или кривой линии l в плоскости p на некоторую линию l' в

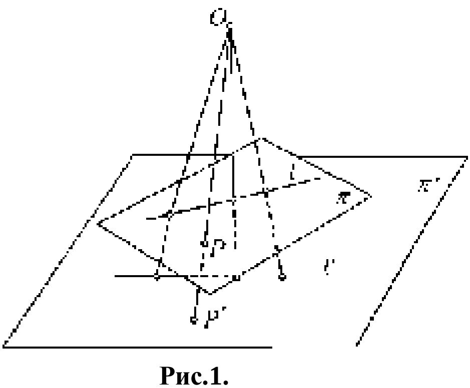


Рис.1.

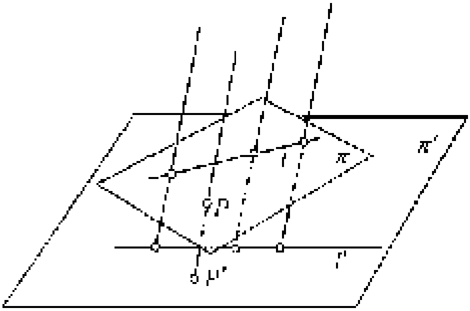


Рис.2.

плоскости p', причём и в этом случае проекция может быть центральной или параллельной.

Всякое отображение одной фигуры на другую, получающееся посредством проектирования (центрального или параллельного) или же посредством конечной последовательности таких проектирований, называется *проективным преобразованием*. *Проективная геометрия* плоскости или прямой составляется из системы геометрических теорем, сохраняющихся при произвольных проективных преобразованиях соответствующих фигур. Проективной геометрии противопоставляется *метрическая геометрия,* которая понимается как система теорем, устанавливающих связи между величинами в рассматриваемых фигурах, инвариантные только относительно класса движений.

Некоторые проективные свойства можно формулировать непосредственно. Точка, разумеется, проектируется в точку. Далее, *прямая линия проектируется в прямую*; в самом деле, если прямая l в плоскости p проектируется на плоскость p', то линия пересечения l' плоскости p с плоскостью, проходящей через O и l, - обязательно прямая, за исключением того случая, когда прямая OP оказывается параллельной плоскости p .

Определение 1. *Точка и прямая* ***инцидентны****, если прямая проходит через точку или точка лежит на прямой.*

Этот “нейтральный” термин подчеркивает *взаимность* рассматриваемого отношения.

Если точка A и прямая l инцидентны, то точка A' и прямая l', возникающие из них при проективном преобразовании, также инцидентны. Другими словами, *инцидентность точки и прямой есть свойство, инвариантное относительно группы проективных преоб-*

разований. Из этого обстоятельства вытекает ряд простых, но весьма важных следствий. Если три точки (или более) ***коллинеарны***, т.е. инцидентны с одной и той же прямой, то их отображения также коллинеарны. Аналогично, если в плоскости p три прямые (или более) ***конкурентны***, т.е. инцидентны с одной и той же точкой, то их отображения - также конкурентные прямые.

Ясно, что *в этой отрасли геометрии не содержится положительных утверждений, относящихся к длинам отдельных отрезков, или к величинам отдельных углов; не идёт речь о равенстве фигур, о свойстве точки лежать между двумя другими*. Итак, *метрические свойства фигуры не являются проективными свойствами фигуры. Равнобедренные или равносторонние треугольники могут, например, спроектироваться на треугольники с тремя различными сторонами. Отсюда следует, что хотя понятие "треугольник" принадлежит проективной геометрии, понятие "равносторонний треугольник" ей не принадлежит, а принадлежит метрической геометрии.*

5. Несобственные ("идеальные") бесконечно удалённые элементы. При проектировании могут встретиться случаи (рис.3), когда проектирующий луч OA параллелен плоскости p' и на плоскости p имеются точки, которые не имеют образов на плоскости p' и наоборот, на плоскости p' имеются точки, которые не имеют прообразов на плоскости p. Такая ситуация побуждает нас искать выход на пути такого обобщения основных понятий, которое устраняло бы возможные исключения.

Обратимся к геометрической интерпретации. Если прямая, пересекающая другую прямую медленно вращается, приближаясь к положению параллельности, то точка пересечения двух таких прямых неограниченно удаляется. Это даёт повод к наивному утверждению: две прямые пересекаются "в бесконечно удалённой точке", что даёт нам возможность расширить понятие точки, подобно тому, как мы расширили понятие числа с целью устранения ограничений при вычитании и делении.

Итак, *мы уславливаемся в том, что к* ***обыкновенным (собственным)*** *точкам всякой прямой добавляем ещё одну,* ***идеальную (несобственную)****, точку и будем считать эту точку, принадле-*

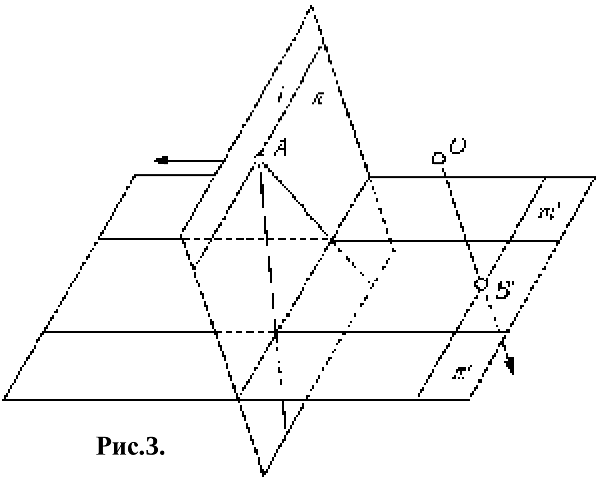


Рис.3.

жащей одновременно всем прямым, параллельным данной - и никаким другим.

Следствием такого условия является то, что всякая пара прямых на плоскости теперь уже пересекается в единственной точке: *если прямые не параллельны, то в собственной точке; если параллельны, то в им обеим принадлежащей несобственной точке.* По причинам интуитивного порядка эта *несобственная (идеальная) точка на прямой называется бесконечно удалённой точкой на этой прямой, а прямая, дополненная несобственной, называется* ***расширенной прямой***.

Замечание. Интуитивное представление о точке, удаляющейся в бесконечность по прямой линии, могло бы навести на мысль, что следует добавить *две* несобственные точки на каждой прямой - по одной для каждого направления. Добавление лишь одной несобственной точки оставляет справедливым закон: *через каждые две точки проходит одна и только одна прямая.* Если бы прямая содержала две несобственные точки вместе со всеми ей параллельными, то вышло бы, что через две несобственные точки проходит бесконечное множество прямых.

Условимся также в том, что *к обыкновенным (собственным) прямым на плоскости следует добавить ещё одну несобственную (идеальную) бесконечно удалённую прямую, содержащую все бес-*

конечно удалённые точки плоскости - и никаких других. Плоскость, дополненную несобственной прямой, назовём ***расширенной плоскостью****, а пространство, дополненное несобственной плоскостью, -* ***расширенным пространством****.*

Теперь можно окончательно сформулировать следующие утверждения:

1. *Любые две прямые, лежащие в плоскости, пересекаются, т.е. имеют общую (собственную или несобственную) точку.*

2. *Любая прямая, не лежащая в плоскости, пересекает плоскость, т.е. имеет с ней общую(собственную или несобственную) точку.*

3. *Любые две плоскости пересекаются по прямой, т.е. имеют общую (собственную или несобственную) прямую.*

Ясно, что этот ряд утверждений можно продолжить до измерений произвольной размерности, введя понятие собственной и несобственной гиперповерхности.

Рассмотрим ещё раз рис.3 с точки зрения бесконечно удалённых элементов. Пусть плоскость p проектируется на плоскость p' из центра O. Эта проекция устанавливает соответствие между точками и прямыми плоскости p и точками и прямыми плоскости p'. Каждой точке A на плоскости p соответствует единственная точка A' на p' со следующими исключениями: если выходящий из O проектирующий луч параллелен плоскости p', то он пересекает p в точке A, которой не соответствует никакая обыкновенная точка плоскости p'. Такие исключительные точки плоскости расположены на прямой l, которой не соответствует никакая обыкновенная прямая плоскости p'. Оговаривать эти исключения становится излишним, если мы условимся точке A сопоставлять бесконечно удалённую точку на плоскости p', взятую в направлении прямой OA, а прямой l - сопоставлять бесконечно удалённую прямую в плоскости p'. Аналогично, некоторую бесконечно удалённую точку в плоскости p мы сопоставляем каждой точке B' на такой прямой m' в плоскости p', через которую проходят все лучи, выходящие из точки O и параллельные плоскости p. Самой прямой m' соответствует бесконечно удалённая прямая плоскости p. Таким образом, посредством введения в плоскости бесконечно удалённых элементом мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми плоскостей.

6. Теорема Дезарга. Одним из самых ранних открытий в области проективной геометрии является замечательная теорема французского математика, инженера и архитектора Ж. Дезарга (1593-1662).

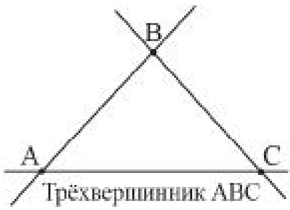


Рис.4.

Определение 2. ***Трёхвершинником*** *называется фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх прямых, соединяющих попарно эти точки* (рис.4). Указанные точки называют вершинами, а прямые - сторонами трёхвершинника.

Теорема 1. *Если на плоскости два трёхвершинника* ABC *и* $A'B'C'$ *расположены таким образом, что прямые, соединяющие соответственные вершины, конкурентны, то три точки, в которых пересекаются, будучи продолжены, три соответственные стороны, - коллинеарны.*

Эта теорема иллюстрируется рис. 5. Заметим, что справедливы как плоская, так и пространственная (рис.6) теоремы Дезарга, причём пространственный вариант теоремы имеет элементарное доказательство, в то время как плоский вариант теоремы требует использования фактов принадлежащих метрической геометрии.

Докажем пространственный вариант теоремы Дезарга. По предположению (рис.6), прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке O. В таком случае прямые AB и $A'B'$ лежат в одной плоскости и, значит, пересекаются в некоторой точке R; пусть, таким же образом, AC и $A'C'$ пересекаются в некоторой точке Q, а BC и $B'C'$ - в точке P. Так как точки P, Q и R

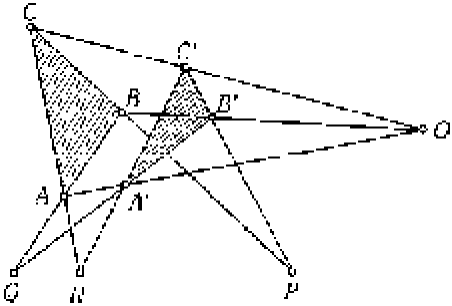


Рис.5.

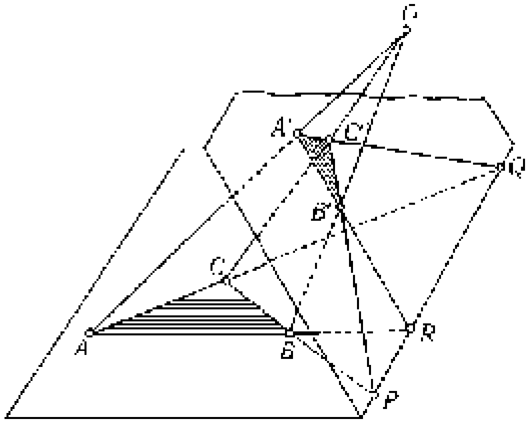


Рис.6.

находятся на продолжениях сторон треугольников ABC и $A'B'C'$, то все они лежат в плоскости каждого из этих треугольников и потому - на прямой пересечения этих плоскостей. Значит, P, Q и R коллинеарны, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Обратная теорема Дезарга. *Если три точки, в которых пересекаются соответственные стороны, коллинеарны, то прямые, соединяющие соответственные вершины, конкурентны.*

7. Двойное отношение. Мы знаем, что длина отрезка является ключом к метрической геометрии. Найдём такой же ключ и к проективной геометрии. Рассматривая рис.7 мы видим, *что проектирование трёх точек меняет не только расстояние между*

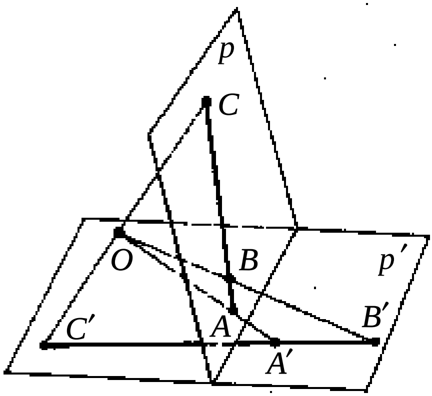


Рис.7.

ними, но и их отношение AB/BC. *Это означает, что никакая величина, определяемая только тремя точками на прямой, не может быть инвариантной при проектировании.*

Но - в этом заключается решающее открытие в проективной геометрии - *если на прямой дано* ***четыре*** *точки* A, B, C, D, *которые при проектировании переходят в точки* A', B', C', D' *другой прямой, то некоторая величина, называемая* ***двойным отношением*** *этих четырёх точек, при проектировании не изменяет числового значения.* В этом заключено математическое свойство системы четырёх точек на прямой, которое носит инвариантный характер и которое можно обнаружить во всякой проекции рассматриваемой прямой. *Двойное отношение не есть ни расстояние, ни отношение расстояний, а* ***отношение двух таких отношений****: если мы составим отношения*

$$\frac{CA}{CB} \text{ и } \frac{DA}{DB},$$

то их отношение

$$x = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

по определению, есть ***двойное отношение четырёх точек*** A, B, C, D, *взятых в указанном порядке* (рис.8).

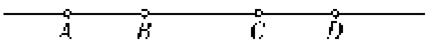


Рис.8.

Двойное отношение четырёх точек легко доказывается (рис.9), если иметь в виду, что площадь треугольника равна половине произведения высоты на основание с одной стороны и половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Двойное отношение не изменяется и при параллельном проектировании (рис.10), что следует из элементарных свойств подобных треугольников.

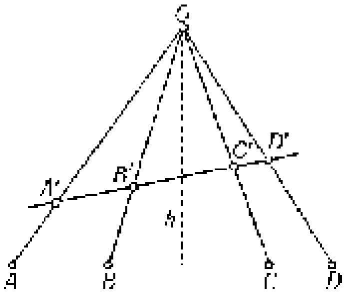


Рис.9.

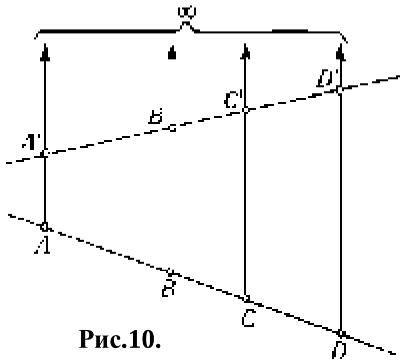


Рис.10.

До сих пор, говоря о двойном отношении четырёх точек A, B, C, D, расположенных на прямой l, мы предполагали, что это отношение составлено из положительных отрезков. Целесообразно видоизменить это определение следующим образом. Примем одно из двух направлений (рис.11) прямой l за положительное и условимся, что все отрезки, отсчитываемые в этом направлении, будут считаться положительными, а отрезки, отсчитываемые в противоположном направлении, - отрицательными. Теперь определим двойное отношение точек A, B, C, D (взятых в указанном порядке) согласно формуле

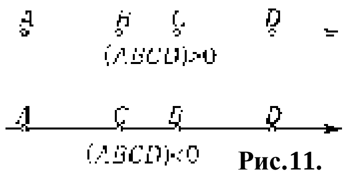


Рис.11.

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

причём знаки чисел CA, CB, DA, DB берутся в соответствии с указанным выше условием. При изменении направления на прямой l, поменяются знаки у всех четырёх отрезков и двойное отношение останется прежним. Легко понять, что $(ABCD)$ имеет отрицательный или положительный знак, смотря по тому, разделена ли (рис.11) пара точек A, B парой точек C, D или не разделена. Если $(ABCD) = -1$, так что

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB},$$

то точки C и D делят отрезок AB внутренне и внешне в одном и том же отношении. В этом случае принято говорить, что C и D делят отрезок AB ***гармонически***, и каждая из точек C и D считается ***гармонически сопряженной*** с другой точкой относительно пары точек A, B.

Если $(ABCD) = 1$, то точки C и D (или A и B) совпадают.

Аналогично мы можем определить двойное отношение четырёх компланарных и конкурентных прямых a, b, c, d, как двойное отношение четырёх точек пересечения этих прямых с некоторой прямой, лежащей в той же плоскости. Положение этой пятой прямой несущественно вследствие инвариантности двойного отношения при проектировании. Двойное отношение четырёх прямых можно задать так:

$$(abcd) = \pm \frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)},$$

где нужно взять знак плюс, если пара прямых a, b не разделяется парой c, d, и знак минус, если разделяется. Наконец, можно определить (рис.12) двойное отношение *четырёх коаксиальных плоскостей*.

Если прямая l спроектирована (рис.13) из двух разных центров O' и O'' на две различные прямые l' и l'', то получается соответствие $P \leftrightarrow P'$ между точками прямых l и l' и соответствие $P \leftrightarrow P''$ между точками прямых l и l''. Этим устанавливается соответствие $P' \leftrightarrow P''$ между точками прямых l' и l'', и притом такое, что каждые четыре точки A', B', C', D' на l' имеют то же самое двойное отношение, что и соответствующие точки A'', B'', C'', D'' на l''. *Всякое взаимно однозначное соответствие между точками двух прямых, обладающее этим свойством, называется* ***проективным соответствием****, независимо от того, каким способом это соответствие установлено.*

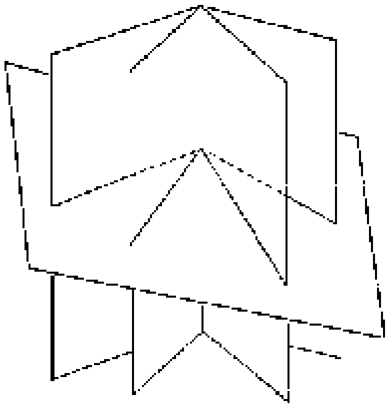


Рис.12.

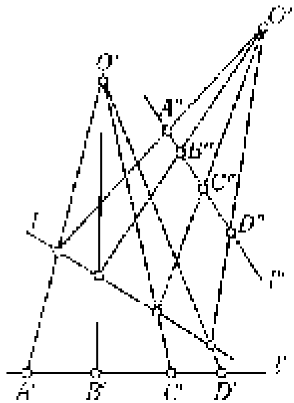


Рис.13.

Пусть D_∞ - бесконечно удалённая точка прямой l. Посмотрим (рис.14), как определяется $(ABCD_\infty)$, если A, B, C - обыкновенные (собственные) точки на l. Пусть P - некоторая точка на l; тогда $(ABCD_\infty)$ рассматривается как предел $(ABCP)$, когда P удаляется на бесконечность по l. Так как

$$(ABCP) = \frac{CA}{CB} : \frac{PA}{PB},$$

то при $P \to \infty$, $PA/PB \to 1$ и

$$\left(ABCD_{\infty}\right)=\frac{CA}{CB}.$$

В частности, *если* $\left(ABCD_{\infty}\right)=1$, *то* C *есть середина отрезка* AB*: средняя точка* C *отрезка* AB *и бесконечно удалённая точка* D_{∞}*, взятая в направлении отрезка, делят отрезок гармонически.*

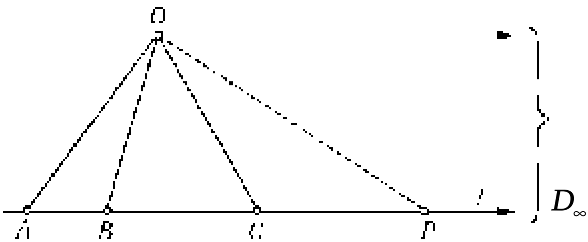


Рис.14.