ВОЛШЕБНЫЙ МИР АНРИ ПУАНКАРЕ

> Я описал воображаемый мир, обитатели которого неминуемо должны были бы прийти к созданию геометрии Лобачевского.
>
> *А. Пуанкаре*

Когда сегодня рассказывают историю геометрии Лобачевского, может сложиться впечатление, что докажи создатели неевклидовой геометрии ее непротиворечивость — и она была бы благосклонно принята. Однако прежде всего критиков смущало не отсутствие этого доказательства. Люди привыкли, что геометрия имеет дело с нашим реальным пространством, и что это пространство описывается евклидовой геометрией. Характерно, что Гаусс выделял геометрию среди остальных разделов математики, считая ее, подобно механике, экспериментальной наукой. Но при этом Гаусс, так же как Лобачевский и Бойяи, понимал, что, во-первых, возможны логически стройные геометрические построения, за которыми не стоит физическая реальность, — «воображаемые» геометрии, и, во-вторых, не столь бесспорно, что в астрономических масштабах в нашем мире царит геометрия Евклида. Однако то, что понимали лишь немногие математики, было абсолютно недоступно непрофессионалам. Утверждения геометрии Лобачевского они мерили на евклидов аршин своей геометрической интуиции — и получали неисчерпаемый источник для остроумия. Н. Г. Чернышевский писал сыновьям из ссылки, что над Лобачевским смеялась вся Казань: «Что такое „кривизна луча“ или „кривое пространство“? Что такое геометрия без аксиомы параллельных линий?» Он сравнивает это с «возведением сапог в квадраты» и «извлечением корней из голенищ», и говорит, что это столь же нелепо, как «писать по-русски без глаголов» (здесь достается Фету: «шепот, робкое дыханье, трели соловья», над которым, оказывается, тоже «хохотали до боли в боках»).

Новый этап в развитии неевклидовой геометрии наступил, когда появились первые ее модели. Сейчас мы воспринимаем эти модели как средство для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, но они были замечательны не только этим. Даже при благожелательном взгляде геометрия Лобачевского казалась чересчур изощренной, не связанной с остальной математикой, а модель Кэли–Клейна показала, что она естественным образом возникает на столбовой дороге проективной геометрии, очень популярной в то время! С другой стороны, рассмотрение модели, основные понятия которой конструируются из образов привычной нам евклидовой геометрии, давало возможность заменить формальное аксиоматическое изложение неевклидовой геометрии более наглядным.

Еще одну модель придумал Анри Пуанкаре, занимаясь чисто аналитическими вопросами теории функций комплексного переменного. Он неожиданно обнаружил, что появляющиеся у него преобразования можно интерпретировать как *перемещения* в плоскости Лобачевского. Это открытие произвело на него настолько сильное впечатление, что много лет спустя он вспоминал, как оно пришло ему в голову: «без всяких, казалось бы, предшествовавших раздумий», когда он поднимался на подножку омнибуса во время экскурсии в Кутанс. Через десять лет Пуанкаре сделал замечательное дополнение к своей модели — подвел под нее «физическое» основание. Рассказу о модели Пуанкаре и посвящена эта глава.

Экскурс в физику. Наши геометрические представления имеют физические предпосылки. Например, как прямые мы воспринимаем световые лучи. Идущий к нам световой луч продолжает казаться прямым, даже если он преломился по дороге (например, войдя из воздуха в воду). Чтобы рассеять эту иллюзию, нужно поставить эксперимент или посмотреть на происходящее со стороны.

Пусть у нас есть оптически неоднородная среда на верхней полуплоскости ($y > 0$), в которой величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = y$ (независимо от направления луча). Из принципа Ферма следует, что путь распространения света между двумя точками есть такой путь, для прохождения которого свету требуется наименьшее возможное время. В нашей среде (где $c(x, y) = y$) свет между двумя точками будет распространяться по таким кривым L (рис. 37), для которых

$$\frac{\sin \alpha(y)}{y} = k, \tag{33}$$

где $\alpha(y)$ — угол, который касательная, проведенная к L в точке с ординатой y, образует с вертикалью; k — фиксированное для всех точек кривой L число. Ясно, что условию (33) удовлетворяют все окружности с центрами на оси Ox (то есть перпендикулярные этой оси); для каждой такой окружности $k = \frac{1}{r}$, где r — ее радиус. При $k = 0$ мы получаем вертикальные прямые. Можно показать, что других кривых, удовлетворяющих условию (33), нет; этому есть и физическое объяснение (например, такое: свет распространяется из заданной точки в заданном направлении по единственному пути).

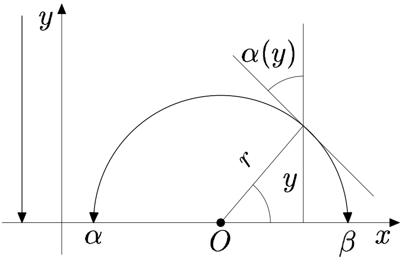


Рис. 37.

Окружности, перпендикулярные к оси Ox, и вертикальные прямые (вернее, их части, расположенные в верхней полуплоскости) и будут играть главную роль в нашем рассказе.

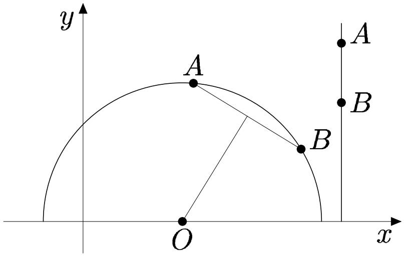


Рис. 38.

«Пуанкария» и ее геометрия. Мир Пуанкаре (назовем его в честь создателя *Пуанкарией*) представляет собой верхнюю полуплоскость $\{(x, y),\ y > 0\}$ без границы $\{y = 0\}$ (это важно!)[1]. Существа, населяющие Пуанкарию (*пуанкаряне*), воспринимают

[1]Можно было бы рассмотреть и «трехмерный» мир, но на плоскости проще рисовать картинки, и ради этого мы будем иметь дело с плоскими существами.

как «прямые» верхние полуокружности с центрами на оси Ox (без концов!) и вертикальные лучи (рис. 38). Будем называть эти прямые P-прямыми (читается «пэ-прямые»). P-прямые кажутся пуанкарянам бесконечными (свет распространяется по ним неограниченно долго), а концы P-прямых, — как и вся ось Ox, — невидимыми. Итак, пуанкаряне считают, что их Пуанкария неограниченна во все стороны. Назовем невидимые точки P-прямой ее *бесконечно удаленными точками*; для луча одной из его бесконечно удаленных точек будем считать точку ∞ (бесконечность). P-прямые однозначно определяются парой своих бесконечно удаленных точек (почему?); так мы их и будем различать и обозначать через $L(\alpha, \beta)$, где α, β — вещественные числа (одно из них может быть ∞) — координаты бесконечно удаленных точек на оси Ox.

Попробуем вместе с пуанкарянами построить геометрию их пространства. Как и нам, — при жизни в евклидовом пространстве, — некоторые утверждения кажутся пуанкарянам очевидными, они принимают их без доказательства (аксиомы) и выводят из них более сложные утверждения (теоремы). Для нас, смотрящих на Пуанкарию со стороны, все эти утверждения будут выглядеть иначе, чем для пуанкарян (например, P-прямые для нас полуокружности или лучи!), поэтому мы будем «переводить» формулировки пуанкарян на свой «прозаический» евклидов язык и доказывать по-своему.

Например, пуанкаряне знают, что через две различные точки проходит P-прямая и притом единственная. Для нас же это означает, что через две различные точки полуплоскости проходит единственная полуокружность, перпендикулярная к оси Ox, или вертикальный луч (докажите!); см. рисунок 38. Заметим, что физическое объяснение этого утверждения, состоящее в том, что свет между двумя точками распространяется по единственному пути — одно и то же и для пуанкарян, и для нас (впрочем, для геометрии это объяснение доказательной силы не имеет). Нетрудно убедиться, что в Пуанкарии справедливы все аксиомы евклидовой геометрии, касающиеся взаимного расположения точек и прямых и порядка точек на прямой. (Чтобы привыкнуть к Пуанкарии, разберитесь с P-отрезками, P-полуплоскостями, на которые P-прямая делит Пуанкарию так, что P-отрезки, соединяющие точки в

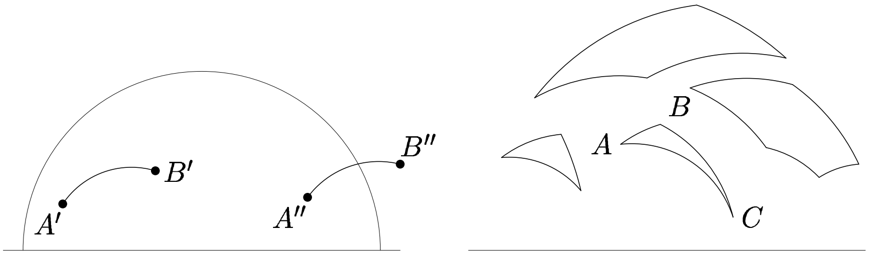


Рис. 39.

одной P-полуплоскости, не пересекают граничную P-прямую, а P-отрезки, соединяющие точки в разных P-полуплоскостях — ее пересекают; нарисуйте P-треугольники, P-многоугольники; подумайте о P-выпуклости, если вы знаете об «обычной» выпуклости. Вам поможет рис. 39.)

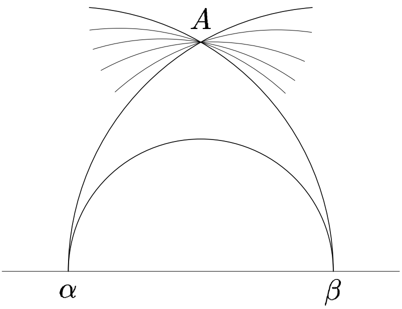


Рис. 40.

Отличие геометрии Пуанкарии от евклидовой проявляется при рассмотрении взаимного расположения пары P-прямых. Мы уже знаем, что две различные P-прямые могут пересекаться не более чем в одной точке. Если же они не пересекаются, то они имеют общую бесконечно удаленную точку (невидимую!) или не имеют общих точек даже на невидимой границе. В первом случае мы будем называть такие P-прямые параллелями, а во втором — сверхпараллелями. Если имеется P-прямая $L(\alpha, \beta)$, то через точку вне ее проходят только две параллельные $L(\alpha, \beta)$ P-прямые (отвечающие бесконечно удаленным точкам α и β соответственно; рис. 40) и бесчисленное множество сверхпараллельных, лежащих между параллелями. Таким образом, в Пуанкарии несправедлива аксиома параллельных (нас, наблюдателей, впрочем, это не очень удивляет — ведь пуанкаряне не знают, что их «прямые» — «не настоящие»!); это позволяет нам надеяться на то, что геометрия Пуанкарии и окажется геометрией Лобачевского.

Главное, что теперь нам нужно сделать, — определить в Пуанкарии *расстояния* и *перемещения*.

Расстояния и перемещения. С точки зрения оптики естественнее всего в качестве расстояния между двумя точками A и B взять в Пуанкарии время, за которое свет доходит из точки A в точку B: тогда P-прямые будут кратчайшими линиями между лежащими на них точками. Из физических соображений следует, что определенное таким образом расстояние $\rho(A,B)$ обладает обычными свойствами евклидова расстояния:

1) $\rho(A,B)=\rho(B,A)$;
2) если A, B, C лежат на одной P-прямой и $B\in[AC]$, то $\rho(A,B)+\rho(B,C)=\rho(A,C)$ (свет распространяется из A в C по P-прямой и пройдет через точку B);
3) для любых точек A, B, C: $\rho(A,B)+\rho(B,C)\geqslant\rho(A,C)$ — *неравенство треугольника*, причем равенство имеет место лишь тогда, когда $B\in[AC]$ (если бы это неравенство не выполнялось, то свету на путь по P-ломаной ABC понадобилось бы меньше времени, чем на путь по P-прямой AC — наибыстрейшему пути, чего не может быть).

Для пуанкарян введенное расстояние ρ первично (заметим, что относительно этого расстояния свет распространяется с единичной скоростью), и у них нет причин выражать ρ через что-то еще; нам же естественно выразить ρ через наше евклидово расстояние. Это не просто: приходится иметь дело с неравномерным движением света, и для вычисления времени, затраченного им, нужно считать интегралы. Поэтому приведем лишь окончательный ответ:

$$\rho(A,B)=\ln\frac{r'+r}{r'-r}, \tag{34}$$

где r — евклидово расстояние между точками A и B, r' — евклидово расстояние между точкой A и точкой B', симметричной точке B относительно оси Ox; логарифм берется по основанию e (при другом основании логарифма мы получим ρ с точностью до постоянного множителя). Евклидово расстояние замечательно тем, что имеется много преобразований плоскости, его сохраняющих; такие преобразования и называются *перемещениями*. Посмотрим, как выглядят перемещения в Пуанкарии (P-*перемещения*) — преобразования, сохраняющие ρ, а значит, переводящие P-прямые в P-прямые.

Начнем с преобразований, не оставляющих ни одной точки на месте. Это прежде всего — обычные *параллельные переносы* вдоль оси Ox: $T_a(x, y) = (x+a, y)$. Эти параллельные переносы сохраняют и евклидово расстояние, и скорость света $c(x, y) = y$, а потому и время, которое требуется свету на путь между двумя точками A и B, то есть P-расстояние $\rho(A, B)$, и, конечно, P-прямые переводят в P-прямые. С другой стороны, *гомотетия* $F_b(x, y) = (bx, by)$, $b > 0$, пропорционально изменяя и евклидово расстояние, и величину скорости света $c(x, y)$, также не меняет времени, затраченного светом, то есть P-расстояния $\rho(A, B)$. Итак, то, что нам представляется гомотетией (с центром на оси Ox), пуанкарянам кажется перемещением. С помощью указанных P-перемещений можно любую точку перевести в любую. Например, точка (x_0, y_0) переходит в точку $(0, 1)$ при P-перемещении $\left(\dfrac{x-x_0}{y_0}, \dfrac{y}{y_0}\right)$. Относительно введенных P-перемещений — назовем их P-*сдвигами* — P-прямые распадаются на два класса: отдельно можно перевести друг в друга полуокружности, а отдельно — лучи (почему?).

Поясним сейчас, как, используя P-сдвиги и свойства введенного P-расстояния ρ, можно просто получить формулу (34), выражающую ρ через евклидовы расстояния, в том частном случае, когда обе точки A и B находятся на оси y-ов: $A = (0, y_1)$, $B = (0, y_2)$. Положим $\rho(A, B) = \varphi(y_1, y_2)$, и найдем вид функции φ. Поскольку ρ сохраняется при евклидовых гомотетиях с центром в точке O, то

$$\varphi(by_1, by_2) = \varphi(y_1, y_2). \tag{35}$$

Кроме того, если $C = (0, y_3)$ — третья точка на оси y-ов, то в силу сказанного выше

$$\varphi(y_1, y_2) + \varphi(y_2, y_3) = \varphi(y_1, y_3) \tag{36}$$

Положим $\psi(z) = \varphi(z, 1)$. Согласно (35)

$$\begin{aligned}\varphi(y_1, y_2) &= \psi(y_1/y_2) = \psi(z_1),\\ \varphi(y_2, y_3) &= \psi(y_2/y_3) = \psi(z_2),\\ \varphi(y_1, y_3) &= \psi(y_1/y_3) = \psi(z_3).\end{aligned}$$

Учитывая соотношение (36) и последние три равенства, получим

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) + \psi(z_2),$$

откуда, в предположении, что ψ — достаточно «хорошая» функция с положительными значениями, получаем, что $\psi(z) = k \cdot \ln|z|$, где k — постоянный множитель, который вычисляется непосредственно.

Найденных P-перемещений еще недостаточно: у нас нет преобразований, с помощью которых мы могли бы P-прямые одного типа (полуокружности) перевести в P-прямые другого типа (лучи). Добавим для этого *P-симметрии* относительно P-прямых. Для лучей — это обычная *осевая симметрия*, а для полуокружностей — *инверсия*. (Например, P-симметрия относительно P-прямой $L(-1,1)$ — это инверсия относительно окружности с центром $O = (0,0)$ радиуса 1; она переводит точку A, отличную от центра O, в точку A', лежащую на луче OA, такую, что $|OA| \cdot |OA'| = 1$.) Мы знаем, что при инверсии окружности и прямые переходят в окружности или прямые, причем величины углов сохраняются. На языке Пуанкарии это значит, что, например, при P-симметрии относительно P-прямой $L(-1,1)$ P-прямая $L(\alpha,\beta)$ переходит в P-прямую $L\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$. В частности, P-прямые $L(\alpha, 0)$, являющиеся при $\alpha \neq \infty$ полуокружностями, переходят в P-прямые $L\left(\frac{1}{\alpha}, \infty\right)$, являющиеся лучами. Итак, P-симметрии переводят Пуанкарию в себя, причем P-прямые переходят в P-прямые. Отдельно проверяется (мы эту проверку опускаем), что P-симметрии не меняют P-расстояния ρ. (Впрочем, в Пуанкарии всякое преобразование, переводящее P-прямые в P-прямые, сохраняет ρ (здесь нет гомотетий); в этом — важнейшее отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида.)

P-перемещений, которые можно получить, комбинируя P-симметрии с P-сдвигами, уже хватает для того, чтобы любую P-прямую перевести в любую P-прямую; более того, при этом любую заданную точку первой P-прямой можно совместить с заданной точкой второй, и любой P-луч с другим P-лучом (докажите!). Значит, этими P-перемещениями можно совместить любые P-отрезки равной P-длины, и мы получаем, что такие отрезки P-равны. Можно показать, что все P-перемещения сводятся к описанным.

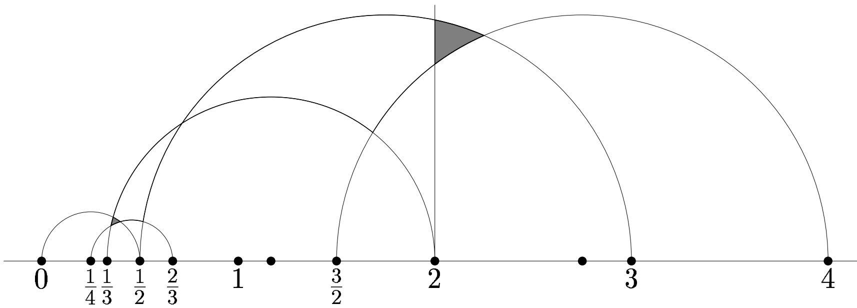
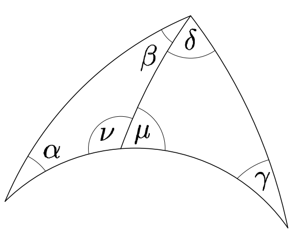


Рис. 41.

При P-перемещениях угол переходит в угол, равный ему в евклидовом смысле (поскольку это так для параллельных переносов, гомотетий, осевых симметрий и инверсий). Поэтому понятие равенства углов в Пуанкарии не отличается от евклидова. С учетом этого обстоятельства пуанкаряне, точно так же как и мы, докажут два признака равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними и по стороне и двум прилежащим к ней углам. Сложнее обстоит дело с доказательством третьего признака равенства треугольников — по трем сторонам: ведь наше доказательство этого признака использует тот факт, что окружности пересекаются не более чем в двух точках. К счастью, оказывается, что P-окружности совпадают с евклидовыми (целиком лежащими в верхней полуплоскости), только P-центр у них не совпадает с обычным (это — довольно непростой факт), а потому и с признаком равенства по трем сторонам в Пуанкарии все в порядке. Однако в Пуанкарии есть еще один признак равенства треугольников: *равны треугольники с попарно равными углами*! (Переведите это утверждение на язык евклидовой геометрии и попытайтесь доказать его; см.



$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = [\pi - (\alpha + \beta + \nu)] + \pi - (\mu + \delta + \gamma)$$

Рис. 42.

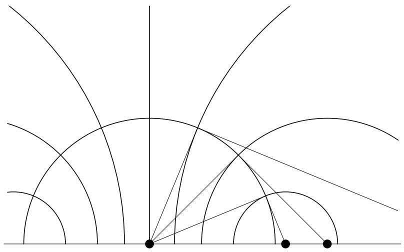


Рис. 43.

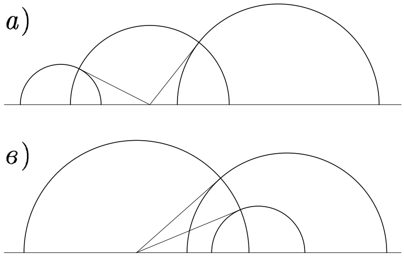


Рис. 44.

рис. 41 и задачу 4.) Значит, площадь треугольника в Пуанкарии (как и сам треугольник) определяется величинами его углов α, β и γ. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше π. Величина $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ называется дефектом треугольника. Можно заметить, что дефект треугольника ведет себя так же, как площадь; точнее: если данный треугольник разрезать прямой, проходящей через его вершину, то площадь его будет равна сумме площадей получившихся треугольников; то же будет справедливо и для дефекта всякого треугольника: он равен сумме дефектов образовавшихся треугольничков (рис. 42). Отсюда можно вывести, что величина площади треугольника в геометрии Лобачевского пропорциональна дефекту $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Несколько задач. 1. а) Убедитесь, что все P-прямые, перпендикулярные к фиксированной P-прямой, сверхпараллельны (рис. 43).

б) Покажите, что для пары сверхпараллелей существует единственный общий P-перпендикуляр (рисунки 44, *а* и *б*).

2. Проверьте, что P-биссектрисы P-треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной P-окружности. Подумайте, что можно сказать об описанной P-окружности — всегда ли она существует (см. рисунок 45: на этом рисунке P-треугольники A_iBC_i — равнобедренные, с осью симметрии $L(0,\infty)$; $i = 1, 2, 3$; на рисунке отмечены перпендикуляры к P-серединам сторон этих треугольников)?

3. Убедитесь, что у тупоугольного (но не остроугольного) P-треугольника высоты могут быть сверхпараллельны (на рис. 46). Что можно сказать о медианах?

4. Покажите, что у равнобедренного P-треугольника углы при основании равны, а биссектриса угла при вершине является медианой и высотой. Докажите для этого случая четвертый признак P-равенства треугольников.

5. Пусть $L(\alpha,\beta)$, $L(\alpha,\beta_1)$, $L(\alpha,\beta_2)$ — три параллельные P-прямые

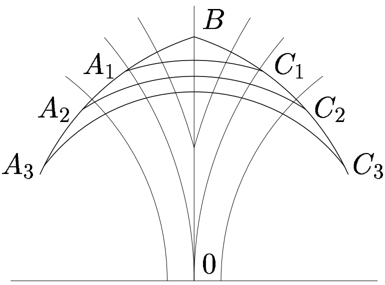


Рис. 45.

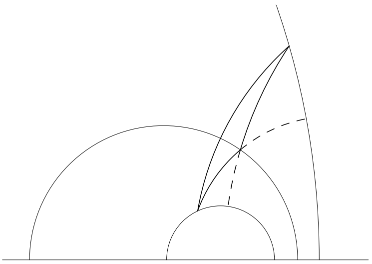


Рис. 46.

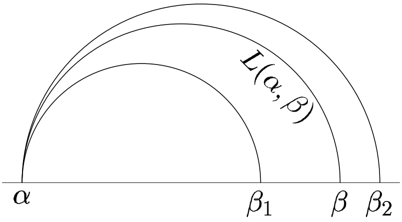


Рис. 47.

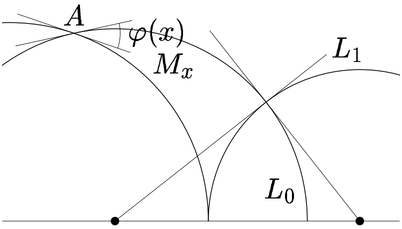


Рис. 48.

(рис. 47). Докажите, что существует P-перемещение, переводящее $L(\alpha, \beta)$ в себя, а $L(\alpha, \beta_1)$ — в $L(\alpha, \beta_2)$.

Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нельзя определить расстояние между параллелями.

6. Если P-прямая L_1, пересекает P-прямую L_0 или сверхпараллельна ей, то она проектируется на L_0 в виде конечного P-интервала; если же L_1, параллельна L_0, то проекцией является P-луч.

7. Пусть P-прямая L_0, перпендикулярна к L_1, и пусть A — точка на L_0, отстоящая от L_1 на расстояние x (рис. 48). Проведем через точку A P-прямую M_x, параллельную L_1, и обозначим через $\varphi(x)$ величину угла, который P-прямая M_x образует с L_0. Найдите $\varphi(x)$ и покажите, что $\varphi(x) \to \dfrac{\pi}{2}$ при $x \to 0$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Функция $\varphi(x)$ называется *функцией Лобачевского*; эта функция связывает величины углов и длины, и поскольку для углов существует абсолютная единица измерения — полный угол, то в геометрии Лобачевского есть такая абсолютная единица измерения и для длин (она с помощью функции φ переносится с углов). В геометрии Евклида $\varphi(x) \equiv \dfrac{\pi}{2}$, а потому аналогичной абсолютной единицы измерения длины нет.

Твердые тела в Пуанкарии Пока во всех наших геометрических рассмотрениях мы руководствовались только оптическими предпосылками. Здесь нужно подчеркнуть, что геометрия Пуанкаре получилась неевклидовой не из-за того, что в Пуанкарии иные законы оптики, чем наши: мы строим (*моделируем*) Пуанкарию в нашем собственном мире и законов физики не меняем! Оптические же иллюзии пуанкарян объясняются оптической неоднородностью их мира.

Хотя, безусловно, самой яркой реализацией прямой линии является световой луч, мы все же не измеряем длин при помощи времени распространения света — для этих целей у нас есть линейка. Вероятно, стоит обзавестись линейкой и пуанкарянам. Конечно же, пуанкаряне изготовят линейку «P-прямой»; но если пуанкарянин перенесет такую линейку из одного места в другое, то она «прямой» (P-прямой) ему уже не покажется. С точки зрения пуанкарянина при движении твердого тела меняется его форма. Как же пуанкарянин должен реагировать на это? Ясно, что нужно как-то увязать понятие твердого тела с геометрией Пуанкарии, иначе пуанкарянам придется поверить в существование сверхъестественных сил. Анри Пуанкаре придумал остроумный выход из этого, казалось бы, безнадежного положения: *он воспользовался явлением теплового расширения тел.* Пусть в Пуанкарии у всех тел одинаковый коэффициент теплового расширения и нулевая теплопроводность, а размеры тел пропорциональны абсолютной температуре T. (Заметим, что в этих условиях при помощи обычного термометра пуанкаряне не могут измерить температуру, поскольку такое измерение предполагает сравнение расширения тел с разными коэффициентами теплового расширения.) Твердое тело характеризуется тем, что при движении в среде с постоянной температурой расстояние $r(A, B)$ (евклидово) между любыми двумя его точками A и B сохраняется. Но если тело переместится из области с температурой T_1 в область с температурой T_2, то расстояние между его точками умножится на T_2/T_1 (другими словами, останется прежним отношение $r(A, B)/T$). А что будет, если тело сразу окажется в области с разными температурами?

Какая величина будет сохраняться в этих условиях? Пусть, например, достаточно большое твердое тело перемещается в среде, где по одну сторону от некоторой прямой m температура T_1, а по другую — T_2, пусть A — точка тела, находящаяся в области с температурой T_1, а B — точка тела, находящаяся в области с температурой T_2. Возьмем ломаную с концами в точках A и B и вершиной C на прямой m. Обозначим $|AC| = r_1$, $|CB| = r_2$ и рассмотрим величину $r_1/T_1 + r_2/T_2$. Оказывается, что при движении в такой температурной среде сохраняется наименьшее значение величины $r_1/T_1 + r_2/T_2$, взятое по всем ломаным с вершинами на прямой m и с концами в двух данных точках A и B! Далее можно в точности повторить те же рассуждения, что и при применении принципа Ферма, например, к выводу закона преломления Снеллиуса, и мы получим, что искомое наименьшее значение будет отвечать ломаной, для которой $\dfrac{\sin\alpha_1}{T_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{T_2}$, где α_i — угол соответствующего звена ломаной с нормалью к прямой m.

Пусть теперь в Пуанкарии в точке x, y постоянно поддерживается абсолютная температура $T(x, y) = y$. Тогда за счет выбранного температурного режима при движении твердых (в нашем смысле!) тел будут сохраняться уже не евклидовы расстояния, а P-расстояния, и с точки зрения пуанкарян (ведь они не чувствуют разницы температур!) размер тела, движущегося в такой среде, сохраняется, то есть оно — P-твердое. Осталось позаботиться лишь о том, чтобы все предметы имели малые теплоемкости и перемещались настолько медленно, чтобы находиться в тепловом равновесии, и чтобы изменение температуры было для пуанкарян незаметно. В результате пуанкаряне не только не увидят границы мира, но и не смогут никогда добраться до нее: при приближении к границе температура стремится к абсолютному нулю, а потому будут стремиться к нулю и размеры предметов, без изменения пропорций между предметами. Анри Пуанкаре старался исключить для пуанкарян все возможности узнать, что их неевклидов мир всего лишь сконструирован в нашем евклидовом. Но все ли он предусмотрел? Если вы обнаружите какие-либо неучтенные возможности пуанкарян, напишите нам об этом.