которое рассмотрели Lax & Phillips [1]. Здесь $\Delta_s$—оператор Лапласа—Бельтрами на $n$-мерной единичной сфере, $n$ нечетно. Локальное выполнение принципа Гюйгенса здесь очевидно, так как соответствующее риманово пространство $V_{n+1}$ представляет собой прямое произведение вещественной прямой с $n$-мерным пространством постоянной кривизны и поэтому локально конформно плоскому пространству. Однако уравнение (11.38) невозможно глобально преобразовать в волновое уравнение в плоском пространстве преобразованиями вида (10.14). Более общий случай гиперболических систем уравнений рассмотрел Семенов-Тян-Шанский [1] в связи с изучением инвариантных операторов в римановых симметрических пространствах. Глобальное изучение гладких лоренцевых пространств, локально обладающих нетривиальной конформной группой, показывает (Cahen & Kerbrat [1]), что таким свойством обладают только классические пространства. Поэтому для глобального изучения принципа Гюйгенса важно исследовать особенности римановых многообразий гиперболического типа с локально нетривиальной группой конформных движений. Следует также отметить, что проблема глобального анализа принципа Гюйгенса тесно соприкасается с обширной программой изучения лакун в областях зависимости гиперболических систем дифференциальных уравнений (см. Петровский [1], Atiyah, Bott, Gårding [1], Gårding [1]).

В следующих параграфах излагается теоретико-групповой подход к проблеме Адамара. Изучение конформно-инвариантных уравнений в римановых пространствах естественно ведет к рассмотрению волнового уравнения (10.15) в пространствах с нетривиальной конформной группой и позволяет установить взаимосвязь принципа Гюйгенса с конформной инвариантностью в пространствах $V_4$. Волновое уравнение в метрике (8.30) может быть детально исследовано. Полученное интегральное представление решения задачи Коши (Ибрагимов, Мамонтов [1, 2]) обобщает классические формулы Пуассона и Тедоне на произвольные пространства $V_{n+1}$ с нетривиальной конформной группой и выявляет справедливость принципа Гюйгенса.

## § 12. Волновое уравнение в $V_4$

**12.1. Вычисление геодезического расстояния в метрике плоской волны.** Пусть геодезическая линия, проходящая через фиксированную точку $x_0 \in V_n$ и переменную точку $x \in V_n$, параметризована с помощью длины дуги $s$, отсчитываемой от точки $x_0$. Тогда координаты $x^i = x^i(s)$ точки $x$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \qquad (12.1)$$

и начальным условиям

$$x^i\big|_{s=0}=x_0^i,\qquad \frac{dx^i}{ds}\bigg|_{s=0}=\alpha^i\qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{12.2}$$

Постоянный вектор $\alpha=(\alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^n)$ должен удовлетворять условию

$$g_{ij}(x_0)\,\alpha^i\alpha^j=1. \tag{12.3}$$

Равенство (12.3) получается подстановкой выражений

$$dx^i=\frac{dx^i}{ds}ds$$

в формулу (6.4) с учетом условий (12.2). Пусть

$$x^i=x^i(s;\ x_0,\ \alpha) \tag{12.4}$$

— решение задачи Коши (12.1), (12.2). Из равенств (12.4) при достаточно малом $|\alpha|$ можно найти величины $\alpha^i$. Подстановка полученных функций

$$\alpha^i=\psi^i(s;\ x_0,\ x) \tag{12.5}$$

в условие (12.3) и решение равенства

$$g_{ij}(x_0)\,\psi^i(s;\ x_0,\ x)\,\psi^j(s;\ x_0,\ x)=1 \tag{12.6}$$

относительно $s$ дает квадрат геодезического расстояния

$$\Gamma(x_0,\ x)=s^2(x_0,\ x)$$

между точками $x_0$ и $x$ в пространстве $V_n$.

Рассмотрим теперь пространство $V_4$ с метрическим тензором (8.32) и вычислим функцию $\Gamma(x_0,\ x)$ описанным выше способом. При этом будет удобно пользоваться обозначениями

$$\begin{gathered} x=(x,\ y,\ z,\ t),\quad x_0=(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau),\quad \alpha=(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta),\\ f=f(x-t),\quad f_0=f(\xi-\tau),\ \ldots,\ \mathscr{D}=\varphi^2-f,\ \mathscr{D}_0=\varphi_0^2-f_0. \end{gathered} \tag{12.7}$$

По формулам (6.9) находятся следующие (и отличающиеся от них перестановкой нижних индексов) отличные от нуля символы Кристоффеля:

$$\begin{gathered} \Gamma^1_{22}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{D}}\right)',\quad \Gamma^1_{23}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\mathscr{D}}\right)',\quad \Gamma^1_{33}=\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi^2}{\mathscr{D}}\right)',\\ \Gamma^2_{12}=-\Gamma^2_{02}=\frac{1}{2}\left(\mathscr{D}\left(\frac{1}{\mathscr{D}}\right)'+\frac{\varphi\varphi'}{\mathscr{D}}\right),\ \Gamma^2_{13}=-\Gamma^2_{03}=-\varphi\Gamma^2_{12}-\frac{\varphi'}{2},\\ \Gamma^3_{12}=-\Gamma^3_{02}=\frac{\varphi'}{2\mathscr{D}},\quad \Gamma^3_{13}=-\Gamma^3_{03}=-\frac{\varphi\varphi'}{2\mathscr{D}},\quad \Gamma^0_{ij}=\Gamma^1_{ij}\quad (i,\ j=2,\ 3), \end{gathered} \tag{12.8}$$

где штрих обозначает дифференцирование, например, $\varphi'(\sigma)=\dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}$.

В силу формул (12.8) уравнения (12.1) записываются в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{D}}\right)'\left(\frac{dy}{ds}-\varphi\frac{dz}{ds}\right)^2+\frac{\varphi'}{\mathscr{D}}\left(\frac{dy}{ds}-\varphi\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{ds}=0,\\
\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\mathscr{D}}\left(\frac{dy}{ds}-\varphi\frac{dz}{ds}\right)\right]=0,\\
\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{1}{\mathscr{D}}\left(\frac{dy}{ds}-\varphi\frac{dz}{ds}\right)\frac{d\varphi}{ds}=0,\\
\frac{d^2(x-t)}{ds^2}=0,
\end{gathered}
\tag{12.9}
$$

где $\frac{d\varphi}{ds}=\varphi'\frac{d(x-t)}{ds}$. Второе и четвертое уравнения этой системы с учетом начальных условий (12.2) дают

$$x-t=\xi-\tau+(\alpha-\delta)s, \tag{12.10}$$

$$\varphi\frac{dz}{ds}-\frac{dy}{ds}=\frac{\gamma\varphi_0-\beta}{\mathscr{D}_0}\mathscr{D}. \tag{12.11}$$

Поэтому

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\gamma\varphi_0-\beta}{\mathscr{D}_0}\frac{d\varphi}{ds},$$

так что

$$\frac{dz}{ds}=\frac{1}{\mathscr{D}_0}[(\gamma\varphi_0-\beta)\varphi+\beta\varphi_0-\gamma f_0], \tag{12.12}$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{1}{\mathscr{D}_0}[(\gamma\varphi_0-\beta)f+(\beta\varphi_0-\gamma f_0)\varphi]. \tag{12.13}$$

Уравнения (12.13) и (12.12) в силу равенства (12.10) имеют решения

$$y=\eta+a(F-F_0)+b(\Phi-\Phi_0), \tag{12.14}$$

$$z=\zeta+a(\Phi-\Phi_0)+b(\alpha-\delta)s, \tag{12.15}$$

где

$$a=\frac{\gamma\varphi_0-\beta}{(\alpha-\delta)\mathscr{D}_0},\quad b=\frac{\beta\varphi_0-\gamma f_0}{(\alpha-\delta)\mathscr{D}_0}, \tag{12.16}$$

а $F$ и $\Phi$ — первообразные для функций $f$ и $\varphi$ соответственно, причем $F=F(x-t)$, $F_0=F(\xi-\tau)$ в соответствии с обозначениями (12.7). С учетом (12.11) и (12.12) первое уравнение системы (12.9) принимает вид

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\gamma\varphi_0-\beta}{\mathscr{D}_0^2}\left[\frac{1}{2}(\gamma\varphi_0-\beta)f'+(\beta\varphi_0-\gamma f_0)\varphi'\right]=0.$$

Отсюда

$$x=\xi+\left(\alpha+\beta a-\frac{\alpha-\delta}{2}a^2f_0\right)s-\frac{1}{2}a^2(F-F_0)-ab(\Phi-\Phi_0). \tag{12.17}$$

Решение задачи (12.9), (12.2) приводится к виду (12.4) подстановкой выражения (12.10) для $x-t$ в формулы (12.14), (12.15), (12.17) и полученного из формулы (12.17) значения $x$ — в равенство (12.10).

Для рассматриваемого пространства $V_4$ условие (12.3) в обозначениях (12.7), (12.16) имеет вид

$$-(\alpha-\delta)(\alpha+\delta+\beta a+\gamma b)=1. \tag{12.18}$$

Теперь (12.18) нужно привести к виду (12.6). Из формул (12.16) находятся

$$\beta=(\alpha-\delta)(af_0+b\varphi_0), \quad \gamma=(\alpha-\delta)(a\varphi_0+b), \tag{12.19}$$

а (12.14) и (12.15) дают

$$\begin{gathered} a=\frac{1}{A}[(y-\eta)(\alpha-\delta)s-(z-\zeta)(\Phi-\Phi_0)], \\ b=\frac{1}{A}[(z-\zeta)(F-F_0)-(y-\eta)(\Phi-\Phi_0)], \end{gathered} \tag{12.20}$$

где

$$A=(F-F_0)(\alpha-\delta)s-(\Phi-\Phi_0)^2. \tag{12.21}$$

Выделив главный член в формуле (12.21):

$$A=-\mathscr{D}_0(\alpha-\delta)^2s^2+\ldots, \tag{12.22}$$

легко видеть, что функция $A\neq 0$ при достаточно малых $s\neq 0$, так как из равенства (12.18) и из невырожденности матрицы $[g^{ij}]$ следует, что $\alpha-\delta\neq 0$, $\mathscr{D}_0\neq 0$. Из формул (12.17) и (12.19) находятся

$$2\alpha=2\frac{x-\xi}{s}-(\alpha-\delta)(a^2f_0+2ab\varphi_0)+\frac{1}{s}[a^2(F-F_0)+2ab(\Phi-\Phi_0)],$$

$$\beta a+\gamma b=(\alpha-\delta)(a^2f_0+2ab\varphi_0+b^2).$$

Поэтому

$$\alpha+\delta+\beta a+\gamma b=$$

$$=\frac{1}{s}[2(x-\xi)-(\alpha-\delta)s+a^2(F-F_0)+2ab(\Phi-\Phi_0)+b^2(\alpha-\delta)s],$$

так как $\alpha+\delta=2\alpha-(\alpha-\delta)$. Полученное выражение для $\alpha+\delta+\beta a+\gamma b$ после подстановки значения $(\alpha-\delta)s$, найденного из (12.10), и значений $a$ и $b$ из формулы (12.20) принимает вид

$$\alpha+\delta+\beta a+\gamma b=\frac{1}{s}\Big\{x-\xi+t-\tau+\frac{1}{A}[(y-\eta)^2(x-\xi-t+\tau)-$$

$$-2(y-\eta)(z-\zeta)(\Phi-\Phi_0)+(z-\zeta)^2(F-F_0)]\Big\}.$$

Подстановка в (12.18) полученного значения $\alpha+\delta+\beta a+\gamma b$ вместе с $\alpha-\delta$ из (12.10) приводит равенство (12.18) к виду (12.6). Умножением на $s^2$ получается искомая формула для геодезического расстояния (Ибрагимов [10]):

$$\Gamma(x_0, x) = (t-\tau)^2-(x-\xi)^2-\frac{x-\xi-t+\tau}{(x-\xi-t+\tau)(F-F_0)-(\Phi-\Phi_0)^2}\times$$
$$\times[(x-\xi-t-\tau)(y-\eta)^2-2(\Phi-\Phi_0)(y-\eta)(z-\zeta)+(F-F_0)(z-\zeta)^2]. \tag{12.23}$$

Если формулу (12.23) записать в форме, предложенной Фридлендером (Friedlander [1], § 5.7), то она легко обобщается на случай произвольного значения $n \geqslant 3$. Пусть $x=(x^0, x^1, \ldots, x^n)$, $x_0=(x_0^0, x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — точки пространства $V_{n+1}$ с метрикой плоской волны (8.30) и

$$A^{ij}(\lambda)=\int a^{ij}(\lambda)\,d\lambda, \qquad i, j=2, \ldots, n.$$

Тогда квадрат геодезического расстояния между $x$ и $x_0$ равен

$$\Gamma(x_0, x)=(x^0-x_0^0)^2-(x^1-x_0^1)^2-$$
$$-(x^0-x_0^0-x^1+x_0^1)\sum_{i,j=2}^{n}\tilde{A}_{ij}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j), \tag{12.24}$$

где

$$[\tilde{A}_{ij}]=[A^{ij}(x^1-x^0)-A^{ij}(x_0^1-x_0^0)]^{-1}.$$

## 12.2. Конформная инвариантность и принцип Гюйгенса.

Лемма 1. *Каждое конформно-инвариантное уравнение* (11.1) *в лоренцевом пространстве $V_4$ с нетривиальной конформной группой эквивалентно уравнению*

$$L[u]\equiv u_{tt}-u_{xx}-f(x-t)\,u_{yy}-2\varphi(x-t)\,u_{yz}-u_{zz}=0. \tag{12.25}$$

Доказательство. В силу теорем 8.5 и 10.5 достаточно рассмотреть волновое уравнение (10.15) в пространстве $V_4$ с метрическим тензором (8.32). Скалярная кривизна этого пространства равна нулю. Действительно, в силу соотношений

$$\Gamma_{0j}^{i}=-\Gamma_{1j}^{i}, \qquad \frac{\partial\Gamma_{ij}^{k}}{\partial x^0}=-\frac{\partial\Gamma_{ij}^{k}}{\partial x^1},$$

очевидных из (12.8), формулы (6.12) дают

$$R_{00}=R_{11}=-R_{04}, \qquad R_{ij}=0 \qquad (i, j=2, 3).$$

Поэтому

$$R=R_{00}-R_{11}-fR_{22}-2\varphi R_{23}-R_{33}=0,$$

так что уравнение (15.10) в данном случае имеет вид

$$\Delta_2 u\equiv g^{ij}u_{ij}-g^{ij}\Gamma_{ij}^{k}u_k=0. \tag{12.26}$$

Из формул (12.8) легко находятся величины $\Gamma^k = g^{ij}\Gamma^k_{ij}$:

$$\Gamma^0 = \Gamma^1 = -(\ln\sqrt{-\mathscr{D}})', \qquad \Gamma^2 = \Gamma^3 = 0.$$

Если теперь сделать преобразование эквивалентности

$$\bar{L}[u] = e^{-\gamma} L[ue^{\gamma}]$$

с функцией $\gamma = \frac{1}{2}\ln\sqrt{-\mathscr{D}}$, то уравнение (12.26) с коэффициентами $a^i = 0$ перейдет в эквивалентное уравнение с коэффициентами $\bar{a}^i = \Gamma^i$ $(i = 0, \ldots, 3)$, т. е. в уравнение

$$\Delta_2 u + \Gamma^i u_i \equiv g^{ij} u_{ij} = 0,$$

которое в силу (8.32) совпадает с (12.25).

Лемма 2. *Уравнение* (12.25) *удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Доказательство. Так как оператор $L$ в (12.25) является самосопряженным, а $c^* = 0$, то в формуле (11.6) имеем

$$L^*[\Gamma] - c^*\Gamma - 8 = L[\Gamma] - 8.$$

Функция $\Gamma$, определенная формулой (12.23), имеет вид

$$\Gamma = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 + \gamma(x-t,\ y,\ z).$$

Поэтому

$$\Gamma_{tt} - \Gamma_{xx} = 4$$

и

$$L[\Gamma] - 8 = \frac{2(x-\xi-t+\tau)}{(x-\xi-t+\tau)(F-F_0) - (\Phi-\Phi_0)} \times$$
$$\times [(x-\xi-t+\tau) f - 2(\Phi-\Phi_0)\varphi + (F-F_0)] - 4.$$

Используя функцию $A$, определенную формулой (12.21), полученное выражение для $L[\Gamma]-8$ можно записать вдоль геодезической линии в виде

$$L[\Gamma] - 8 = 2s\frac{d\ln A}{ds} - 4.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} (L[\Gamma]-8)\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{2}\int_0^s \left(\frac{d\ln A}{d\sigma} - \frac{2}{\sigma}\right) d\sigma = \ln\frac{\sigma}{\sqrt{A}}\Bigg|_0^s,$$

где параметр $s$ соответствует переменной точке $x = (x,\ y,\ z,\ t)$. Согласно формуле (12.22)

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sqrt{A(\sigma)}}{\sigma} = (\alpha-\delta)\sqrt{-\mathscr{D}_0}.$$

Поэтому

$$-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} (L[\Gamma]-8)\frac{d\sigma}{\sigma} = \ln\left[(\alpha-\delta)\, s\sqrt{\frac{-\mathscr{D}_0}{A(s)}}\right].$$

Если сюда подставить значения $A(s)$ и $(\alpha-\delta)s$ из (12.21) и (12.10), то формула (11.6) дает

$$V=(x-\xi-t+\tau)\left(\frac{-\mathscr{D}_0}{(x-\xi-t+\tau)(F-F_0)-(\Phi-\Phi_0)^2}\right)^{1/2}. \quad (12.27)$$

Так как функция $V$ зависит только от $x-t$ и $\xi-\tau$, то $L[V]=0$. Следовательно, самосопряженное уравнение (12.25) удовлетворяет критерию Адамара (11.8).

Замечание. Согласно § 8.5 уравнение (12.25) эквивалентно классическому волновому уравнению только в случаях (8.35) — (8.37).

Проблему Адамара в пространствах $V_4$ с нетривиальной конформной группой решает следующая теорема (Ибрагимов [9]).

Теорема. *В лоренцевом пространстве $V_4$ с нетривиальной группой конформных движений уравнение* (11.1) *удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда оно конформно-инвариантно, т. е. эквивалентно уравнению* (12.25).

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 остается доказать, что любое гюйгенсово уравнение вида (11.1) в пространстве с метрическим тензором (8.32) удовлетворяет условиям (10.49) конформной инвариантности. Так как второе из уравнений (10.49) совпадает с первым необходимым условием Гюнтера (11.14), то нужно получить равенства $K_{ij}=0$. Рассмотрим для этого равенства (11.16), левые части которых образуют *тензор Баха* (Bach [1])

$$B_{ij}=g^{kl}(R_{jik,l}+C^m_{ijk}L_{ml}). \quad (12.28)$$

Этот тензор для лоренцевых пространств $V_4$ с нетривиальной конформной группой равен нулю. Действительно, уравнение (12.25) для которого величины $K_{ij}$, а вместе с ними и правые части (11.16), равны нулю, удовлетворяет равенствам (11.16). Поэтому остается только заметить, что тензор (12.28) не зависит от коэффициентов $a^i$ и $c$ уравнения (11.1), а при конформном отображении (8.1) преобразуется конформно: $\tilde{B}_{ij}=e^{-2\sigma}B_{ij}$. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$g^{pq}\left(K_{pi}K_{qj}-\frac{1}{4}g_{ij}g^{ml}K_{pm}K_{ql}\right)=0, \qquad i,\ j=0,\ \ldots,\ 3,$$

которую с учетом (8.32) удобно записать в следующем виде:

$$K_{1i}K_{1j}+fK_{2i}K_{2j}+\varphi(K_{2i}K_{3j}+K_{3i}K_{2j})+ \\ +K_{3i}K_{3j}-K_{0i}K_{0j}+Ng_{ij}=0, \quad (12.29)$$

где

$$N=\frac{1}{2}(fK_{12}^2+K_{13}^2-\mathscr{D}K_{23}^2+2\varphi K_{12}K_{13}-K_{01}^2-fK_{02}^2-2\varphi K_{02}K_{03}-K_{03}^2).$$

Для $(i, j)=(1,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(4,4)$ уравнения (12.29) дают

$$fK_{12}^2+2\varphi K_{12}K_{13}+K_{13}^2-K_{01}^2-N=0, \tag{12.30}$$

$$K_{12}^2+K_{23}^2-K_{02}^2+\frac{1}{\mathscr{D}}N=0, \tag{12.31}$$

$$K_{12}K_{13}-K_{02}K_{03}-\varphi K_{23}^2-\frac{\varphi}{\mathscr{D}}N=0, \tag{12.32}$$

$$K_{13}^2+fK_{23}^2-K_{03}^2+\frac{f}{\mathscr{D}}N=0, \tag{12.33}$$

$$K_{01}^2+fK_{02}^2+2\varphi K_{02}K_{03}+K_{03}^2+N=0. \tag{12.34}$$

Исключение величины $N$ сначала из уравнений (12.31), (12.32), а затем из (12.31), (12.33) приводит к равенствам

$$K_{12}K_{13}-K_{02}K_{03}=\varphi(K_{02}^2-K_{12}^2), \tag{12.35}$$

$$K_{03}^2-K_{13}^2=f(K_{02}^2-K_{12}^2). \tag{12.36}$$

В результате вычитания левой части уравнения (12.30) из левой части (12.34) с учетом (12.35) и (12.36) получается равенство $K_{01}^2-\mathscr{D}K_{23}^2=0$, которое в силу условия $\mathscr{D}<0$ дает

$$K_{01}=K_{23}=0. \tag{12.37}$$

Теперь (12.30) упрощается и приводит к уравнениям

$$K_{02}=0,\ K_{13}=-\varphi K_{12}. \tag{12.38}$$

Окончательный результат $K_{ij}=0$ $(i, j=0, \ldots, 3)$ является следствием уравнений (12.36)—(12.38). Теорема доказана.

**12.3. Решение задачи Коши.** Для уравнения (12.25) рассматривается задача Коши с гладкими начальными данными

$$u|_{t=0}=g(x, y, z),\quad u_t|_{t=0}=h(x, y, z). \tag{12.39}$$

Здесь, как и в случае обычного волнового уравнения, доста точно решить задачу Коши специального вида:

$$L[u]=0,\quad u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=h(x, y, z), \tag{12.40}$$

а затем воспользоваться коммутативностью оператора

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-f(x-t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\varphi(x-t)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{12.41}$$

с оператором $\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}$. Действительно, если $v$ и $w$ решают частную задачу (12.40) с $v_t|_{t=0}=g$ и $w_t|_{t=0}=g_x-h$ соответственно, то функция

$$u=v_t+v_x-w \tag{12.42}$$

является решением задачи Коши с начальными данными (12.39).

При $f=1$, $\varphi=0$ оператор $L=\square$, и решение задачи (12.40) в этом случае дается формулой Пуассона

$$u(t,\ x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S(t)} h\,dS,$$

где $S(t)$ — сфера радиуса $t$ с центром в точке $(x,\ y,\ z)$. Если в плоскости $(y,\ z)$ ввести полярные координаты, то точки $(\xi,\ \eta,\ \zeta)\in S(t)$ записываются в виде

$$\xi=\xi,\quad \eta=y+\rho\cos\theta,\quad \zeta=z+\rho\sin\theta$$

с координатами $(\xi,\ \rho,\ \theta)$, удовлетворяющими условиям

$$(\xi-x)^2+\rho^2=t^2,\quad x-t\leqslant\xi\leqslant x+t,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

В этих координатах $dS=t\,d\xi\,d\theta$, и формула Пуассона принимает вид

$$u(t,\ x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{0}^{2\pi}h\left(\xi,\ y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\cos\theta,\right.$$
$$\left. z+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\sin\theta\right)d\theta. \quad (12.43)$$

Такое представление решения задачи Коши можно получить также в случае оператора (12.41) (Ибрагимов, Мамонтов [1], Ибрагимов [10]). Для этого удобно сделать преобразование Фурье по переменным $y,\ z$.

Пусть

$$\hat{u}(t,\ x,\ \lambda,\ \mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda y+\mu z)}\,u(t,\ x,\ y,\ z)\,dy\,dz.$$

Аналогичное преобразование Фурье переводит $h(x,\ y,\ z)$ в $\hat{h}(x,\ \lambda,\ \mu)$. Задача (12.40) переходит при этом в задачу Коши

$$\hat{L}[\hat{u}]=0,\quad \hat{u}|_{t=0}=0,\quad \hat{u}_t|_{t=0}=\hat{h}(x,\ \lambda,\ \mu) \quad (12.44)$$

для оператора $\hat{L}$:

$$\hat{L}[\hat{u}]=\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}+(f\lambda^2+2\varphi\lambda\mu+\mu^2)\,\hat{u}$$

с двумя независимыми переменными $t,\ x$ и с параметрами $\lambda,\ \mu$. Уравнение $\hat{L}[\hat{u}]=0$ заменой

$$\bar{t}=\frac{1}{2}(x+t),\quad \bar{x}=-\frac{1}{2}[\lambda^2F(x-t)+2\lambda\mu\Phi(x-t)+\mu^2(x-t)]$$

преобразуется в уравнение

$$\hat{u}_{\bar{t}\bar{x}}+\hat{u}=0 \quad (12.45)$$

с известной функцией Римана

$$R(\bar{\tau},\ \bar{\xi};\ \bar{t},\ \bar{x})=J_0\left(\sqrt{4(\bar{t}-\bar{\tau})(\bar{x}-\bar{\xi})}\right), \quad (12.46)$$

где $J_0$ — функция Бесселя. Затем переходом к старым переменным $t$ и $x$ получается функция Римана для уравнения $\hat{L}[\hat{u}]=0$: $R(\tau, \xi;\ t, x)=$

$$=J_0\left(\sqrt{(t-\tau+x-\xi)\left[\lambda^2(F_0-F)+2\lambda\mu(\Phi_0-\Phi)+\mu^2(t-\tau+\xi-x)\right]}\right).$$

Поэтому решение задачи (12.44) находится по формуле

$$\hat{u}(t, x, \lambda, \mu)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\hat{h}(\xi, \lambda, \mu)R(0, \xi;\ t, x)\,d\xi,$$

которая после подстановки значения $\hat{h}(\xi, \lambda, \mu)$ принимает вид

$$\hat{u}(t, x, \lambda, \mu)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t}R(0, \xi;\ t, x)\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-i(\lambda\eta+\mu\zeta)}h(\xi, \eta, \zeta)\,d\eta\,d\zeta.$$

Из этой формулы с помощью обратного преобразования Фурье получается следующее представление решения исходной задачи (12.40):

$$u(t, x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^2}Ih(\xi, \eta, \zeta)\,d\eta\,d\zeta, \tag{12.47}$$

где

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-i[\lambda(\eta-y)+\mu(\zeta-z)]}J_0\left(k\sqrt{Q(\lambda, \mu)}\right)d\lambda\,d\mu.$$

Здесь $k=\sqrt{x+t-\xi}$, а через $Q(\lambda, \mu)$ обозначена квадратичная форма

$$Q(\lambda, \mu)=a^2\lambda^2+2b\lambda\mu+c^2\mu^2$$

с коэффициентами

$$a^2=F(\xi)-F(x-t),\ b=\Phi(\xi)-\Phi(x-t),\ c^2=\xi-(x-t).$$

Для преобразования интеграла $I$ к более удобному виду заметим, что из условия

$$-\mathscr{D}(\sigma)=f(\sigma)-\varphi^2(\sigma)>0$$

гиперболичности оператора (12.41) следует положительная определенность квадратичной формы

$$q(\sigma;\ \lambda, \mu)=f(\sigma)\lambda^2+2\varphi(\sigma)\lambda\mu+\mu^2$$

от $\lambda$ и $\mu$, имеющей дискриминант $-\mathscr{D}(\sigma)$. Следовательно, положительно определена также квадратичная форма

$$Q(\lambda, \mu)=\int\limits_{x-t}^{\xi}q(\sigma;\ \lambda, \mu)\,d\sigma$$

и ее дискриминант $a^2c^2-b^2$ положителен. Поэтому можно сделать замену переменных $\lambda$, $\mu$, $\eta$, $\zeta$, определенную формулами

$$\lambda=\frac{1}{a}\left(\bar\lambda-\frac{b}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}\bar\mu\right),\quad \mu=\frac{a}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}\bar\mu$$

и

$$\bar\eta-\bar y=\frac{1}{a}(\eta-y),$$
$$\bar\zeta-\bar z=\frac{1}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}\left[a(\zeta-z)-\frac{b}{a}(\eta-y)\right]. \qquad (12.48)$$

В этих переменных

$$Q=\bar\lambda^2+\bar\mu^2,\quad \lambda(\eta-y)+\mu(\zeta-z)=\bar\lambda(\bar\eta-\bar y)+\bar\mu(\bar\zeta-\bar z),$$
$$d\eta\,d\zeta=\sqrt{a^2c^2-b^2}\,d\bar\eta\,d\bar\zeta,\qquad d\lambda\,d\mu=\frac{d\bar\lambda\,d\bar\mu}{\sqrt{a^2c^2-b^2}},$$

и интеграл $I$ принимает вид

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} e^{-i[\bar\lambda(\bar\eta-\bar y)+\bar\mu(\bar\zeta-\bar z)]}J_0\left(k\sqrt{\bar\lambda^2+\bar\mu^2}\right)\frac{d\bar\lambda\,d\bar\mu}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}.$$

Пользуясь известной формулой преобразования Фурье сферически симметричных функций и свойствами функции Бесселя $J_0$, можно показать (см. § 13.2), что

$$I=\frac{1}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}\int\limits_0^\infty J_0(kr)\,J_0(\rho r)\,r\,dr=\frac{\delta(k-\rho)}{\rho\sqrt{a^2c^2-b^2}},$$

где $\delta$ — дельта-функция, а $\rho^2=(\bar\eta-\bar y)^2+(\bar\zeta-\bar z^2)^2$.

Используя полученное значение интеграла $I$, легко вычислить внутренний интеграл в (12.47). Для этого удобно перейти к полярным координатам $\rho$, $\theta$ в плоскости переменных $\bar\eta$, $\bar\zeta$:

$$\bar\eta-\bar y=\rho\cos\theta,\quad \bar\zeta-\bar z=\rho\sin\theta.$$

Из этих формул и из (12.48) находятся функции $\eta(\rho,\theta)$ и $\zeta(\rho,\theta)$. Теперь можно вычислить указанный интеграл:

$$\int\limits_{R^2} Ih(\xi,\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^\infty Ih(\xi,\eta(\rho,\theta),\zeta(\rho,\theta))\sqrt{a^2c^2-b^2}\,\rho\,d\rho=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}h(\xi,\eta(k,\theta),\zeta(k,\theta))\,d\theta=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}h\left(\xi,\ y+ak\cos\theta,\ z+\frac{b}{a}k\cos\theta+\frac{\sqrt{a^2c^2-b^2}}{a}k\sin\theta\right)d\theta.$$

Если ввести обозначения

$$A=\{(x+t-\xi)[F(\xi)-F(x-t)]\}^{1/2},$$
$$B=\frac{x+t-\xi}{A}[\Phi(\xi)-\Phi(x-t)],\quad C=[t^2-(x-\xi)^2-B^2]^{1/2}, \tag{12.49}$$

то формулу (12.47) можно записать в следующем окончательном виде:

$$u(t,\ x,\ y,\ z)=T[h](t,\ x,\ y,\ z)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{x-t}^{x+t}d\xi\int_0^{2\pi}h(\xi,\ y+A\cos\theta,\ z+B\cos\theta+C\sin\theta)\,d\theta. \tag{12.50}$$

Очевидно, что при $f=1$, $\varphi=0$ (12.50) совпадает с формулой (12.43).

Прямой подстановкой можно проверить, что функция $u$, определенная формулой (12.50), удовлетворяет задаче (12.40). Так как выполнение начальных условий очевидно, то нужно лишь убедиться в выполнении уравнения $L[u]=0$. Для этого удобно перейти к переменным $\alpha=x-t$, $\beta=x+t$ и оператор $L$ записать в виде

$$L[u]=4u_{\alpha\beta}+f(\alpha)\,u_{yy}+2\varphi(\alpha)\,u_{yz}+u_{zz}, \tag{12.51}$$

а формулу (12.50) — в виде

$$u(\alpha,\ \beta,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi}\int_\alpha^\beta d\xi\int_0^{2\pi}h(\xi,\ y+A\cos\theta,\ z+B\cos\theta+C\sin\theta)\,d\theta.$$

Из (12.49) следует, что функции $A$, $B$, и $C$ удовлетворяют соотношениям

$$A_\alpha A_\beta=-\frac{1}{4}f(\alpha),\quad AB_\beta=BA_\beta,\quad AC_\beta=CA_\beta,$$
$$A_\alpha B_\beta+A_\beta B_\alpha=-\frac{1}{2}\varphi(\alpha),\quad B_\alpha B_\beta+C_\alpha C_\beta=-\frac{1}{4}, \tag{12.52}$$
$$AA_{\alpha\beta}=A_\alpha A_\beta,\quad BB_{\alpha\beta}=B_\alpha B_\beta,\quad CC_{\alpha\beta}=C_\alpha C_\beta.$$

Имеем в (12.51)

$$u_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\int_\alpha^\beta\Bigg\{P+\int_0^{2\pi}[h_{yy}A_\alpha A_\beta\cos^2\theta+$$
$$+h_{yz}((A_\alpha C_\beta+A_\beta C_\alpha)\cos\theta\sin\theta+(A_\alpha B_\beta+A_\beta B_\alpha)\cos^2\theta)+$$
$$+h_{zz}(B_\alpha B_\beta\cos^2\theta+(B_\alpha C_\beta+B_\beta C_\alpha)\cos\theta\sin\theta+C_\alpha C_\beta\sin^2\theta)]\,d\theta\Bigg\}\,d\xi, \tag{12.53}$$

где

$$P=\int_0^{2\pi}[h_y A_{\alpha\beta}\cos\theta+h_z(B_{\alpha\beta}\cos\theta+C_{\alpha\beta}\sin\theta)]\,d\theta.$$

Если $P$ с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^{2\pi} h_y\cos\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi} h_y\,d(\sin\theta)=-\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d(h_y)=$$

$$=\int_0^{2\pi}[h_{yy}A\sin^2\theta+h_{yz}(B\sin^2\theta-C\sin\theta\cos\theta)]d\theta$$

(аналогично преобразуется второе слагаемое в $P$) переписать в виде

$$P=\int_0^{2\pi}\{h_{yy}AA_{\alpha\beta}\sin^2\theta+$$
$$+h_{yz}[(AB_{\alpha\beta}+BA_{\alpha\beta})\sin^2\theta-(AC_{\alpha\beta}+CA_{\alpha\beta})\cos\theta\sin\theta]+$$
$$+h_{zz}[BB_{\alpha\beta}\sin^2\theta-(BC_{\alpha\beta}+CB_{\alpha\beta})\cos\theta\sin\theta+CC_{\alpha\beta}\cos^2\theta]\}\,d\theta,$$

то равенство (12.53) с учетом уравнений (12.52) дает

$$4u_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\int_\alpha^\beta d\xi\int_0^{2\pi}-[f(\alpha)h_{yy}+2\varphi(\alpha)h_{yz}+h_{zz}]d\theta. \qquad (12.54)$$

Дифференцирование функции $u(\alpha, \beta, y, z)$ по переменным $y$, $z$ осуществляется непосредственно, и с помощью формулы (12.54) легко проверяется необходимое равенство $L[u]=0$.

Формулы (12.42) и (12.50) показывают, что решение задачи Коши с начальными данными (12.39) представляется в виде

$$u=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)T[g]-T[g_x-h] \qquad (12.55)$$

с определенным в (12.50) оператором $T$. Теорема 12.2 и формулы (12.55) и (10.50) позволяют найти решение задачи Коши для всех конформно-инвариантных уравнений (11.1) в пространствах $V_4$ с нетривиальной конформной группой.

**12.4. Случай тривиальной конформной группы.** В § 11.4 уже отмечалось, что в пустом пространстве $V_4$ принцип Гюйгенса может выполняться только тогда, когда это пространство имеет нетривиальную конформную группу. Дополнительным примером в пользу гипотезы об отсутствии гюйгенсовых уравнений в пространствах с тривиальной конформной группой может служить пространство с метрикой (8.5). Рассмотрим этот пример подробнее.

В данном случае достаточно воспользоваться необходимым условием (11.16). По формулам (12.28) находятся следующие компоненты тензора Баха:

$$B_{11}=47(1+t)B_{44}, \quad B_{22}=B_{33}=\frac{5}{3}B_{44}, \quad B_{44}=-\frac{1}{48(1+t)^4}. \tag{12.56}$$

Подстановка (12.56) в уравнения (11.16) при $i=j$ приводит к уравнениям

$$\frac{1}{1+t}(K_{12}^2+K_{13}^2-K_{14}^2)-N=-\frac{94}{5}B_{44}, \tag{12.57}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{23}^2-K_{24}^2-N=-\frac{2}{3}B_{44}, \tag{12.58}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{13}^2+K_{23}^2-K_{34}^2-N=-\frac{2}{3}B_{44}, \tag{12.59}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{14}^2+K_{24}^2+K_{34}^2+N=-\frac{2}{5}B_{44}, \tag{12.60}$$

где

$$N=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{13}^2-K_{14}^2)+K_{23}^2-K_{24}^2-K_{34}^2\right]. \tag{12.61}$$

Уравнения (12.58), (12.59) путем почленного вычитания и сложения с учетом (12.61) переписываются в виде

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{34}^2=\frac{1}{1+t}K_{13}^2+K_{24}^2, \tag{12.62}$$

$$K_{23}^2+\frac{1}{1+t}K_{14}^2=-\frac{4}{3}B_{44}. \tag{12.63}$$

Уравнения (12.57) и (12.60) с учетом (12.62) дают

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{34}^2=-\frac{48}{5}B_{44}. \tag{12.64}$$

Из (12.57), (12.63), (12.64) следует равенство

$$B_{44}=0. \tag{12.65}$$

Очевидное противоречие между равенствами (12.65) и (12.56) доказывает, что в рассматриваемом пространстве $V_4$ никакое уравнение вида (11.1) не удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Из формул (12.56) следует, что пространство с метрикой (8.5) невозможно конформно отобразить на пустое пространство. Действительно, в силу формул (12.28), (8.17) и (8.18) из $R_{ij}=0$ следует уравнение $B_{ij}=0$, которое сохраняется при любом конформном отображении.

## § 13. Принцип Гюйгенса в $V_{n+1}$

**13.1. Предварительный анализ решения.** Метод, использованный в § 12.3 при решении задачи Коши для волнового уравнения в пространствах $V_4$ с нетривиальной конформной группой, с небольшими изменениями переносится на случай произвольной размер-