компоненты тензора Баха:

$$B_{11}=47(1+t)B_{44},\quad B_{22}=B_{33}=\frac{5}{3}B_{44},\quad B_{44}=-\frac{1}{48(1+t)^4}. \tag{12.56}$$

Подстановка (12.56) в уравнения (11.16) при $i=j$ приводит к уравнениям

$$\frac{1}{1+t}(K_{12}^2+K_{13}^2-K_{14}^2)-N=-\frac{94}{5}B_{44}, \tag{12.57}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{23}^2-K_{24}^2-N=-\frac{2}{3}B_{44}, \tag{12.58}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{13}^2+K_{23}^2-K_{34}^2-N=-\frac{2}{3}B_{44}, \tag{12.59}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{14}^2+K_{24}^2+K_{34}^2+N=-\frac{2}{5}B_{44}, \tag{12.60}$$

где

$$N=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{13}^2-K_{14}^2)+K_{23}^2-K_{24}^2-K_{34}^2\right]. \tag{12.61}$$

Уравнения (12.58), (12.59) путем почленного вычитания и сложения с учетом (12.61) переписываются в виде

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{34}^2=\frac{1}{1+t}K_{13}^2+K_{24}^2, \tag{12.62}$$

$$K_{23}^2+\frac{1}{1+t}K_{14}^2=-\frac{4}{3}B_{44}. \tag{12.63}$$

Уравнения (12.57) и (12.60) с учетом (12.62) дают

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{34}^2=-\frac{48}{5}B_{44}. \tag{12.64}$$

Из (12.57), (12.63), (12.64) следует равенство

$$B_{44}=0. \tag{12.65}$$

Очевидное противоречие между равенствами (12.65) и (12.56) доказывает, что в рассматриваемом пространстве V_4 никакое уравнение вида (11.1) не удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Из формул (12.56) следует, что пространство с метрикой (8.5) невозможно конформно отобразить на пустое пространство. Действительно, в силу формул (12.28), (8.17) и (8.18) из $R_{ij}=0$ следует уравнение $B_{ij}=0$, которое сохраняется при любом конформном отображении.

§ 13. Принцип Гюйгенса в V_{n+1}

13.1. Предварительный анализ решения. Метод, использованный в § 12.3 при решении задачи Коши для волнового уравнения в пространствах V_4 с нетривиальной конформной группой, с небольшими изменениями переносится на случай произвольной размерности (Ибрагимов, Мамонтов [2]). При этом в силу теоремы 8.5 и очевидного обобщения леммы 12.2.1 на многомерный случай достаточно рассмотреть уравнение

$$L[u] \equiv u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,\, j=1}^{n-1} a^{ij}(x-t)\, u_{y^i y^j} = 0 \tag{13.1}$$

с произвольным числом $n \geqslant 2$ пространственных переменных (x, y), где $y = (y^1, \ldots, y^{n-1})$. Коэффициенты a^{ij} считаются произвольными бесконечно дифференцируемыми функциями только одной переменной $x-t$, такими, что уравнение (13.1) строго гиперболично, т. е. квадратичная форма $a^{ij}\lambda_i\lambda_j$ положительно определена.

Для уравнения (13.1) в области $t > 0$ ищется решение задачи Коши с данными при $t=0$:

$$L[u] = 0, \quad u\,|_{t=0} = f(x, y), \quad u_t\,|_{t=0} = g(x, y). \tag{13.2}$$

Функции f и g предполагаются финитными, бесконечно дифференцируемыми. Эти требования на коэффициенты уравнения и на начальные данные приняты лишь для удобства изложения и не являются необходимыми для справедливости окончательных результатов. При сделанных предположениях задача Коши имеет, и притом единственное, бесконечно дифференцируемое решение; оно является финитным по пространственным переменным. Следующая лемма позволяет ограничиться рассмотрением специальной задачи Коши:

$$L[u] = 0, \quad u\,|_{t=0} = 0, \quad u_t\,|_{t=0} = h(x, y). \tag{13.3}$$

Лемма 1. *Пусть $v(t, x, y)$ — решение задачи* (13.3) *с $h = f$, а $w(t, x, y)$ — решение задачи* (13.3) *с $h = f_x - g$. Тогда функция*

$$u = v_t + v_x - w \tag{13.4}$$

является решгнием задачи (13.2).

Доказательство. Выполнение начальных условий задачи (13.2) для функции u, определенной формулой (13.4), проверяется непосредственно, а выполнение уравнения (13.1) — с учетом коммутационного соотношения $\left[L,\ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right] = 0$.

Для получения формулы, дающей представление решения задачи (13.3), применяется преобразование Фурье по переменным y. Если $u(t, x, y)$ — решение этой задачи, то его преобразование Фурье

$$\hat{u}(t, x; \lambda) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u(t, x, y)\, e^{-i(y,\lambda)}\, dy \tag{13.5}$$

удовлетворяет уравнению

$$\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a^{ij}(x-t)\,\lambda_i\lambda_j \hat{u} = 0 \tag{13.6}$$

с двумя независимыми переменными t, x (с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ и начальным условиям

$$\hat{u}|_{t=0}=0, \quad \hat{u}_t|_{t=0}=\hat{h}(x;\ \lambda), \tag{13.7}$$

где $\hat{h}$ — преобразование Фурье функции $h(x,\ y)$:

$$\hat{h}(x;\ \lambda)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{R^{n-1}} h(x,\ y)\,e^{-i(y,\ \lambda)}\,dy.$$

Здесь $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-1})$, $(y,\ \lambda)=y^i\lambda_i\equiv\sum\limits_{i=1}^{n-1}y^i\lambda_i$.

Лемма 2. *Функция Римана уравнения* (13.6) *имеет вид*

$$R(\tau,\ \xi;\ t,\ x)=J_0\left(\sqrt{(t-\tau+x-\xi)\left[A^{ij}(\xi-\tau)-A^{ij}(x-t)\right]\lambda_i\lambda_j}\right),$$

где J_0 — функция Бесселя, $A^{ij}(\sigma)=\int a^{ij}(\sigma)\,d\sigma$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если вектор λ равен нулю. Если $\lambda\neq 0$, то невырожденная замена переменных

$$\bar{t}=\frac{1}{2}(t+x), \quad \bar{x}=-\frac{1}{2}A^{ij}(x-t)\,\lambda_i\lambda_j$$

приводит к равенству

$$\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}=a^{ij}(x-t)\,\lambda_i\lambda_j\hat{u}_{\bar{t}\bar{x}}$$

и уравнение (13.6) принимает вид (12.45). Утверждение леммы получается из формулы (12.46), в которой нужно положить $\bar{\tau}=\frac{1}{2}(\tau+\xi)$, $\bar{\xi}=-\frac{1}{2}A^{ij}(\xi-\tau)\,\lambda_i\lambda_j$ и вернуться к старым переменным t, x, τ, ξ.

Решение задачи (13.6), (13.7) можно получить по формуле Римана

$$\hat{u}(t,\ x;\ \lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}R(0,\ \xi;\ t,\ x)\,\hat{h}(\xi,\ \lambda)\,d\xi,$$

или с учетом определения функции $\hat{h}$:

$$\hat{u}(t,\ x;\ \lambda)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{x-t}^{x+t}R(0,\ \xi;\ t,\ x)\int\limits_{R^{n-1}}h(\xi,\ \eta)\,e^{-i(\lambda,\ \eta)}\,d\eta.$$

В силу доказанной выше леммы эта формула дает

$$\hat{u}(t,\ x;\ \lambda)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{x-t}^{x+t}J_0\left(k\sqrt{Q(\lambda)}\right)d\xi\int\limits_{R^{n-1}}h(\xi,\ \eta)\,e^{-i(\lambda,\ \eta)}\,d\eta, \tag{13.8}$$

где

$$Q(\lambda)=[A^{ij}(\xi)-A^{ij}(x-t)]\lambda_i\lambda_j, \quad k=\sqrt{t+x-\xi}.$$

Из (13.8) с помощью обратного преобразования Фурье

$$u(t, x, y)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{R^{n-1}}\hat{u}(t, x; \lambda)e^{i(y, \lambda)}\,d\lambda$$

после изменения порядка интегрирования по λ и ξ получается следующее представление решения задачи (13.3):

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{2}(2\pi)^{-(n-1)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{R^{n-1}}J_0\big(k\sqrt{Q(\lambda)}\big)\,d\lambda\int\limits_{R^{n-1}}h(\xi, \eta)\,e^{-i(\lambda, \eta-y)}\,d\eta. \tag{13.9}$$

Формула (13.9) допускает дальнейшие упрощения. Так как квадратичную форму $Q(\lambda)$ можно записать как интеграл $Q(\lambda)=\int\limits_{x-t}^{\xi}q(\sigma; \lambda)\,d\sigma$ от квадратичной формы $q(\sigma; \lambda)=a^{ij}(\sigma)\lambda_i\lambda_j$, положительно определенной при каждом значении σ, то $Q(\lambda)$ положительно определена при $\xi>x-t$. Поэтому существует невырожденное вещественное линейное преобразование

$$\mu=T\lambda, \tag{13.10}$$

приводящее форму $Q(\lambda)$ к сумме квадратов: $Q=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\mu_i^2$. Теперь в интеграле (13.9) удобно сделать замену переменных λ, η по формулам (13.10) и

$$\eta-y=T'z, \tag{13.10$'$}$$

где T' обозначает транспонированную матрицу преобразования (13.10). Указанные преобразования сохраняют скалярное произведение: $(\lambda, \eta-y)=(\mu, z)$ и элемент объема: $d\lambda\,d\mu=d\eta\,dz$. Поэтому формула (13.9) в новых переменных принимает вид

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{2}(2\pi)^{-(n-1)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{R^{n-1}}J_0(k|\mu|)\,d\mu\int\limits_{R^{n-1}}h(\xi, y+T'z)\,e^{-i(\mu, z)}\,dz, \tag{13.11}$$

где $|\mu|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\mu_i^2\right)^{1/2}$. Векторы в координатной форме записываются в строку, хотя алгебраические операции над ними производятся по обычным правилам действия с векторами-столбцами. Это соглашение, принятое для удобства записи, применяется без специальных оговорок.

Последующие упрощения формулы (13.11) связаны с вычислением входящих в нее интегралов. Непосредственное изменение порядка интегрирования по переменным μ и z не приводит к цели, так как соответствующий интеграл расходится. Поэтому нужно изучить внутренний интеграл в формуле (13.11) как преобразование Фурье обобщенной функции, задаваемой локально интегрируемой функцией $J_0(k|\mu|)$.

13.2. Преобразование Фурье функции Бесселя $J_0(a|\mu|)$. Рассмотрим обобщенную функцию, определяемую локально интегрируемой функцией $J_0(a|\mu|)=J_0\left(a\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\mu_i^2}\right)$ (a — произвольная неотрицательная постоянная) и действующую на основные функции $\psi(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ по формуле

$$\langle J_0(a|\mu|),\ \psi(\mu)\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} J_0(a|\mu|)\,\psi(\mu)\,d\mu. \tag{13.12}$$

Эта обобщенная функция является, очевидно, медленно растущей (Schwartz [1]), так что можно говорить о преобразовании Фурье $\mathcal{F}[J_0(a|\mu|)]$. В этом пункте удобно обозначать символом $\mathcal{F}$ преобразование Фурье как обычных, так и обобщенных функций.

Преобразованием Фурье функции $\varphi(z)$ из пространства быстро убывающих функций является функция

$$\psi(\mu)=\mathcal{F}[\varphi(z)]=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(z)\,e^{-i(\mu,z)}\,dz.$$

Обратное преобразование Фурье определяется формулой

$$\varphi(z)=\mathcal{F}^{-1}[\psi(\mu)]=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\psi(\mu)\,e^{i(\mu,z)}\,d\mu.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}[J_0(a|\mu|)]$ обобщенной функции $J_0(a|\mu|)$ определяется равенством

$$\langle\mathcal{F}[J_0(a|\mu|)],\ \varphi(z)\rangle=\langle J_0(a|\mu|),\ \psi(\mu)\rangle. \tag{13.13}$$

Найдем преобразование Фурье обобщенной функции $J_0(a|\mu|)$ для случая нечетных $n\geqslant 3$. Этого будет достаточно для желаемого упрощения формулы (13.11). Пусть j_a — обобщенная функция, действующая на функции $\varphi(z^1, \ldots, z^{2m+2})$ по формуле

$$\langle j_a(z),\ \varphi(z)\rangle=\frac{d^m}{d\sigma^m}\left[\sigma^m\int\limits_{S_{2m+2}}\varphi(\zeta\sqrt{\sigma})\,dS\right]\Bigg|_{\sigma=a^2}, \tag{13.14}$$

где S_{2m+2} — единичная сфера с центром в начале координат в $(2m+2)$-мерном пространстве, $\zeta\in S_{2m+2}$, $z=\zeta\sqrt{\sigma}$.

Теорема. *Пусть* $n=2m+3$, $m\geqslant 0$, $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_{2m+2})$. *Тогда*

$$\mathcal{F}[J_0(a|\mu|)]=2^m j_a.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\mathcal{F}^{-1}[j_a]=2^{-m}J_0(a|\mu|). \tag{13.15}$$

Так как обобщенная функция j_a имеет компактный носитель, то $\mathcal{F}^{-1}[j_a]=(2\pi)^{-(m+1)}\langle j_a(z), e^{i(\mu, z)}\rangle=$

$$=(2\pi)^{-(m+1)}\frac{d^m}{d\sigma^m}\left[\sigma^m \int\limits_{S_{2m+2}} e^{i\sqrt{\sigma}(\mu, \zeta)}\,dS\right]\Bigg|_{\sigma=a^2}.$$

Пусть θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ — угол между векторами μ и ζ. Тогда $(\mu, \zeta)=|\mu|\cos\theta$ и

$$\int\limits_{S_{2m+2}} e^{i\sqrt{\sigma}(\mu, \zeta)}\,dS=\Omega_{2m+1}\int\limits_0^\pi e^{i\sqrt{\sigma}|\mu|\cos\theta}(\sin\theta)^{2m}\,d\theta,$$

где $\Omega_{2m+1}=\dfrac{2\pi^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}$ — площадь поверхности единичной сферы в $(2m+1)$-мерном пространстве. Последний интеграл выражается через функцию Бесселя (см. Ватсон [1], стр. 34):

$$\int\limits_0^\pi e^{i\sqrt{\sigma}|\mu|\cos\theta}(\sin\theta)^{2m}\,d\theta=2^m\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(\sqrt{\sigma}|\mu|)^m}J_m(\sqrt{\sigma}|\mu|).$$

Отсюда

$$\mathcal{F}^{-1}[j_a]=\frac{d^m}{d\sigma^m}\left[\sigma^{\frac{m}{2}}|\mu|^{-m}J_m(\sqrt{\sigma}|\mu|)\right]\Big|_{\sigma=a^2}.$$

Правая часть полученной формулы упрощается введением переменной $x=|\mu|\sqrt{\sigma}$. Имеем $\dfrac{d}{d\sigma}=\dfrac{|\mu|^2}{2}\dfrac{d}{x\,dx}$, поэтому

$$\mathcal{F}^{-1}[j_a]=2^{-m}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m[x^m J_m(x)]\big|_{x=a|\mu|}.$$

Равенство (13.15) получается отсюда с использованием формулы приведения для бесселевых функций:

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m[x^\nu J_\nu(x)]=x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x).$$

13.3. Метод спуска. Представление решения для произвольных *n*. Возвратимся теперь к вычислениям, связанным с упрощением формулы (13.11) для решения задачи Коши. Сначала будет рассмотрен случай нечетных $n \geqslant 3$. Затем методом спуска (Адамар [1]) получается представление решения для четных $n \geqslant 2$.

Пусть $n=2m+3$, $m \geqslant 0$. Используя результаты § 13.2, формулу (13.11) можно записать в виде

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-(m+1)} \int_{x-t}^{x+t} \langle J_0(k|\mu|), \mathcal{F}[\varphi_\xi(z)] \rangle \, d\xi,$$

где $\varphi_\xi(z) = h(\xi, y+T'z)$. Согласно определению (13.13) преобразования Фурье обобщенных функций

$$\langle J_0(k|\mu|), \mathcal{F}[\varphi_\xi(z)] \rangle = \langle \mathcal{F}[J_0(k|\mu|), \varphi_\xi(z) \rangle.$$

Поэтому

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-(m+1)} \int_{x-t}^{x+t} \langle \mathcal{F}[J_0(k|\mu|)], \varphi_\xi(z) \rangle \, d\xi. \quad (13.16)$$

Дальнейшее упрощение формулы (13.16) осуществляется на основе теоремы 13.2 и определения (13.14) обобщенной функции j_a с неотрицательным $a=k=\sqrt{x+t-\xi}$. В результате получается следующее окончательное представление решения задачи (13.3) в случае нечетных $n \geqslant 3$:

$$u(t, x, y) =$$
$$= \frac{1}{4}\pi^{-(m+1)} \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial^m}{\partial \sigma^m} \left[\sigma^m \int_{S_{2m+2}} h(\xi, y+\sqrt{\sigma} T'\zeta) \, dS \right] \Bigg|_{\sigma=x+t-\xi} d\xi. \quad (13.17)$$

В формуле (13.17) используются введенные ранее обозначения: T' — транспонированная матрица преобразования (13.10), $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^{2m+2})$ — точки единичной сферы S_{2m+2} в $(2m+2)$-мерном пространстве с центром в начале координат, по которой ведется интегрирование.

Пусть теперь $n=2m+2$, $m \geqslant 2$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши:

$$\begin{aligned} &\tilde{L}[u] \equiv u_{tt} - u_{xx} - a^{ij}(x-t)\, u_{y^i y^j} - u_{pp} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = h(x, y). \end{aligned} \quad (13.18)$$

Так как функция h не зависит от переменной p, то в силу единственности решения задачи Коши решение u задачи (13.18) также не зависит от этой переменной и тем самым является решением интересующей нас задачи Коши

$$\begin{aligned} &L[u] \equiv u_{tt} - u_{xx} - a^{ij}(x-t)\, u_{y^i y^j} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = h(x, y), \end{aligned} \quad (13.19)$$

где $y=(y^1, \ldots, y^{2m+1})$. Формулу для решения задачи (13.19) можно получить, воспользовавшись представлением (13.17), записанным для вспомогательной задачи (13.18). Пусть T — $(2m+1)\times(2m+1)$-матрица преобразования (13.10), соответствующего рассматриваемой задаче (13.19), и T' — транспонированная матрица. Тогда в качестве $(2m+2)\times(2m+2)$-матрицы преобразования (13.10), соответствующего вспомогательной задаче (13.18), можно взять матрицу

$$\tilde{T}=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & & & 0\\ & & & .\\ & T & & .\\ & & & .\\ & & & 0\\ 0 & 0\ldots & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{13.20}$$

Транспонированная матрица $\tilde{T}'$ имеет тот же вид с заменой T на T'. Пусть далее $\tilde{\zeta}=(\zeta^1, \ldots, \zeta^{2m+1}, \varkappa)\in S_{2m+2}$. Решение вспомогательной задачи (13.18) в соответствии с формулой (13.17) имеет вид

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{\partial^m}{\partial\sigma^m}\left[\sigma^m\int\limits_{S_{2m+2}}h(\xi, y+\sqrt{\sigma}\tilde{T}'\tilde{\zeta})\,dS\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi}d\xi. \tag{13.21}$$

Ввиду того, что функция h в задаче (13.18) не зависит от переменной p, интеграл по поверхности единичной сферы S_{2m+2} записывается в виде интеграла по $(2m+1)$-мерному шару. В самом деле, пусть K_{2m+1} — шар единичного радиуса в $(2m+1)$-мерном пространстве с центром в начале координат, и пусть $\zeta\in K_{2m+1}$; если $\tilde{\zeta}=(\zeta, \varkappa)\in S_{2m+2}$, то $\varkappa$ вещественно, $|\varkappa|\leqslant 1$. Пользуясь специальным видом (13.20) матрицы $\tilde{T}$, интеграл по сфере S_{2m+2} в формуле (13.21) можно переписать в виде

$$\int\limits_{S_{2m+2}}h(\xi, y+\sqrt{\sigma}\tilde{T}'\tilde{\zeta})\,dS=2\int\limits_{K_{2m+1}}h(\xi, y+\sqrt{\sigma}T'\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}. \tag{13.22}$$

Здесь использованы равенство $\tilde{T}'\tilde{\zeta}=(T'\zeta, \varkappa)$ и стандартное преобразование интегралов по поверхности сферы в $(2m+2)$-мерном пространстве по функций, не зависящих от одной из переменных, к интегралам по $(2m+1)$-мерному шару. Формулы (13.21) и (13.22) дают следующее представление решения задачи (13.19):

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{2}\pi^{-(m+1)}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{\partial^m}{\partial\sigma^m}\left[\sigma^m\int\limits_{K_{2m+1}}h(\xi, y+\sqrt{\sigma}\,T'\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi}d\xi. \tag{13.23}$$

Полученные результаты могут быть сформулированы в виде следующей теоремы (Ибрагимов, Мамонтов [2]).

Теорема *Решение задачи Коши*

$$u_{tt}-u_{xx}-\sum_{i,j=1}^{n-1} a^{ij}(x-t)\,u_{y^iy^j}=0, \qquad t>0,$$
$$u\big|_{t=0}=0, \qquad u_t\big|_{t=0}=h(x,\ y)$$

для нечетных $n\geqslant 3$ *дается формулой*

$$u(t,\ x,\ y)=$$
$$=\frac{1}{4}\pi^{-\frac{n-1}{2}}\int_{x-t}^{x+t}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left[\sigma^{\frac{n-3}{2}}\int_{S_{n-1}} h(\xi,\ y+\sqrt{\sigma}T'\zeta)\,dS\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi} d\xi, \tag{13.24}$$

а для четных $n\geqslant 2$*—формулой*

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\int_{x-t}^{x+t}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left[\sigma^{\frac{n-2}{2}}\int_{K_{n-1}} h(\xi,\ y+\sqrt{\sigma}T'\zeta)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d\zeta}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi} d\xi, \tag{13.25}$$

где S_{n-1} *и* K_{n-1}*—сфера и шар единичного радиуса в* $(n-1)$*-мерном пространстве с центром в начале координат, переменная интегрирования* $\zeta=(\zeta^1,\ \ldots,\ \zeta^{n-1})$ *пробегает сферу* S_{n-1} *и шар* K_{n-1} *соответственно, а* T' *обозначает транспонированную матрицу преобразования* (13.10).

Замечание. Невырожденная матрица T, участвующая в теореме, определена неоднозначно. Единственным требованием, накладываемым на нее, является выполнение равенства

$$A(\xi)-A(x-t)=T'T,$$

где $A(\sigma)$ представляет собой $(n-1)\times(n-1)$-матрицу с элементами $A^{ij}(\sigma)=\int a^{ij}(\sigma)\,d\sigma$. Этим условием матрица T определяется с точностью до умножения на произвольную ортогональную матрицу. Поэтому в качестве T можно взять, например, симметрическую положительно определенную матрицу $T=[A(\xi)-A(x-t)]^{1/2}$, которая бесконечно дифференцируема по переменным x, t и $\xi>x-t$.

13.4. Обсуждение принципа Гюйгенса. На основе полученных результатов легко доказывается следующая

Теорема. *Для любого нечетного* $n\geqslant 3$ *волновое уравнение*

$$\sum_{i,\ j=1}^{n+1} g^{ij}u_{,ij}+\frac{n-1}{4n}Ru=0 \tag{13.26}$$

в лоренцевом пространстве V_{n+1} с нетривиальной конформной группой удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Доказательство. Формулы (13.24) и (13.4) показывают, что решение задачи Коши (13.2) определяется значениями начальных данных f, g и их производных до некоторого порядка на $(n-1)$-мерном многообразии в n-мерном пространстве переменных x, y. Из теории Адамара [1] следует, что это многообразие с необходимостью является пересечением характеристического коноида и гиперплоскости $t=0$, несущей начальные данные *). Это означает, что уравнение (13.1) удовлетворяет принципу Гюйгенса, так как принципу Гюйгенса связан только со свойствами самого уравнения, и его справедливость не зависит от вида начального многообразия. Многомерный вариант леммы 12.2.1 и теорема 8.5 завершают доказательство.

Нетрудно показать, что в случае классического волнового уравнения теорема 13.3 приводит к известной формуле для решения задачи Коши

$$\square_{n+1}u=0, \quad u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=h(x), \tag{13.27}$$

где $x=(x^1, \ldots, x^n)$. При этом достаточно рассмотреть нечетные значения $n \geqslant 3: n=2m+3$. Формула Тедоне для решения задачи (13.27) (см. Tedone [1], Курант [1]) в использованных выше обозначениях записывается в виде

$$u(t, x)=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m\left[t^{2m+1}\int\limits_{S_{2m+3}} h(x+t\alpha)\,dS\right], \tag{13.28}$$

где $\alpha \in S_{2m+3}$ — переменная интегрирования. Формула (13.28) приводится к виду (13.17) следующими преобразованиями. Удобно сначала переобозначить переменные: $x=x^1$, $y^i=x^{i+1}$ $(i=1, \ldots, 2m+2)$, и в формуле (13.28) сделать замену переменных интегрирования, введя переменные ξ и ζ^i $(i=1, \ldots, 2m+2)$ согласно формулам

$$\alpha^1=\frac{\xi-x}{t}, \quad \alpha^{i+1}=\frac{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}}{t}\zeta^i.$$

Тогда $x-t \leqslant \xi \leqslant x+t$ и $|\zeta|=1$, где $\zeta=(\zeta^1, \ldots, \zeta^{2m+2})$. После указанных замен переменных формула (13.28) перепишется в виде

$$u(t, x, y)=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{S_{2m+2}}[t^2-(\xi-x)^2]^m h\left(\xi, y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\zeta\right)dS$$

*) В этом можно убедиться также путем сравнения многообразия, по которому производится интегрирование в формуле (13.24), с уравнением характеристического коноида $\Gamma(x_0, x)=0$, воспользовавшись явным видом (12.24) функции $\Gamma(x_0, x)$.

с $y=(y^1, \ldots, y^{2m+2})$. Здесь использована связь между элементами dS_{2m+2} и dS_{2m+3} площади поверхности единичной сферы в пространствах размерностей $2m+2$ и $2m+3$ соответственно:

$$dS_{2m+3}=\frac{[t^2-(\xi-x)^2]^m}{t^{2m+1}}\,dS_{2m+2}\,d\xi.$$

Выражение $t^2-(\xi-x)^2$ обращается в нуль при $\xi=x-t$ и $\xi=x+t$ вместе со всеми производными по t^2 до порядка $m-1$ включительно. Поэтому

$$u(t,\ x,\ y)=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)}\times$$
$$\times\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{S_{2m+2}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m[(t^2-(\xi-x)^2)^m h(\xi,\ y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\,\zeta)]dS.$$

Для завершения преобразования формулы (13.28) к виду (13.17) достаточно убедиться, что справедливо тождество

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m[(t^2-(\xi-x)^2)^m h(\xi,\ y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\,\zeta)]=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^m\left[\sigma^m h(\xi,\ y+\sqrt{\sigma(\xi-x+t)}\,\zeta)\right]\Big|_{\sigma=x+t-\xi}. \qquad (13.29)$$

Если вместо t^2 ввести новую переменную $s=t^2-(\xi-x)^2$, то левая часть равенства (13.29) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m\left[s^m h(\xi,\ y+\zeta\sqrt{s})\right]\Big|_{s=t^2-(\xi-x)^2}.$$

Правая часть равенства (13.29) приводится к тому же виду с помощью замены σ на $s=\sigma(\xi-x+t)$. Тождество (13.29) доказано.

Легко видеть, что полученное в § 12.3 решение задачи Коши для уравнения (12.25) также содержится в теореме 13.3. Действительно, при $n=3$, $a^{11}=f$, $a^{12}=\varphi$, $a^{22}=1$ формула (13.24) принимает вид (12.50), если в качестве T' выбрать матрицу

$$T'=\frac{1}{\sqrt{x+t-\xi}}\begin{pmatrix}A & 0\\ B & C\end{pmatrix}$$

с функциями A, B и C, определенными в (12.49).

Как отмечалось в § 8.5, множество лоренцевых пространств с нетривиальной конформной группой не исчерпывается конформно-плоскими пространствами. В соответствии с этим уравнение (13.1) с произвольными коэффициентами $a^{ij}\ (x-t)$ нельзя преобразовать в классическое волновое уравнение. Например, в простом случае одного переменного коэффициента, соответствующего формулам (8.33), такое преобразование возможно только при условии (8.34).

13.5. Нарушение связи принципа Гюйгенса с конформной инвариантностью. Уравнения Штельмахера и Лагнеза выявляют ослабление связи принципа Гюйгенса со свойством «максимальной» инвариантности уравнения при переходе от V_4 к пространствам более высокой размерности. Наиболее простое из них, уравнение (11.27), в случае $p \neq 0$ принадлежит к числу уравнений с группой изометрий максимального порядка (см. (10.47)). Его удобно переписать в ковариантной форме (10.45). Для этого заметим, что дифференциальному оператору $-Kt^2 \Box_{n+1}$ соответствует риманово пространство V_{n+1} постоянной отрицательной кривизны K. Если Δ — волновой оператор (10.15) в этом пространстве, то формула (10.50) дает

$$-Kt^2 \Box_{n+1} u = t^{-\frac{n-1}{2}} \Delta \left(u t^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

Поэтому

$$[-Kt^2 \Box_{n+1} + Kp(p+1)] \left(u t^{-\frac{n-1}{2}} \right) = t^{-\frac{n-1}{2}} [\Delta + Kp(p+1)] u.$$

Следовательно, (11.27) эквивалентно уравнению (10.45) с параметром $\lambda = Kp(p+1)$. Аналогичное уравнение в пространстве положительной постоянной кривизны получается при рассмотрении вместо (11.27) другого уравнения Штельмахера (11.25), которое получается заменой параметра λ_0 на любой из параметров λ_i, $i \neq 0$; все они эквивалентны между собой, поэтому достаточно рассмотреть, например, уравнение

$$\Box_{n+1} u + \frac{p(p+1)}{(x^1)^2} u = 0.$$

Таким образом, в пространстве V_{n+1} постоянной кривизны K при любом нечетном $n \geqslant 5$ уравнение

$$\Delta u + Kp(p+1) u = 0 \tag{13.30}$$

удовлетворяет принципу Гюйгенса для $p = 0, 1, \ldots, \frac{n-3}{2}$. Из результатов Штельмахера следует, что для уравнения (10.45) принцип Гюйгенса может выполняться только при указанных здесь значениях параметра λ. Так как скалярная кривизна пространства V_{n+1} постоянной кривизны в силу условия (8.11) равна $R = -n(n+1)K$, то после подстановки выражения (10.15) волнового оператора Δ уравнение (13.30) принимает вид

$$g^{ij} u_{,ij} + K \left[p(p+1) - \frac{1}{4}(n-1)(n+1) \right] u = 0.$$

Другие уравнения Штельмахера и Лагнеза инвариантны только относительно некоторых подгрупп группы, допускаемой уравнением (13.30). Возможно, что в многомерном случае удастся установить связь принципа Гюйгенса со свойством максимальной инвариантности на основе теории групп касательных преобразований высшего порядка.