дает

$$|u'_{ps}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a|^k}{k!} |u_{p(k+s)}| \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+s)!}{k!} \left(\frac{|a|}{r}\right)^k r^{-s} =$$

$$= Cr^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+s)!}{k!} b^k = Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+s} =$$

$$= Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} b^k = Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \frac{1}{1-b} = Cr^{-s} \frac{s!}{(1-b)^{s+1}} =$$

$$= C \frac{r}{r-|a|} s! (r-|a|)^{-s} \leqslant Cs! r_1^{-s}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, группа Ли—Беклунда (16.27) действует как обычная группа преобразований в классе целых функций $u = u(x)$, определенном условиями (16.28). Этот класс совпадает с семейством всех аналитических функций только при $p = 1$.

Пример 3. Для оператора $X = u_1^2 \frac{\partial}{\partial u} + \ldots$ построение преобразований Ли—Беклунда осуществляется с помощью рекурренции

$$(k+1) A_{k+1} = \sum_{i+j=k} D(A_i) \cdot D(A_j), \qquad A_0 = u.$$

В соответствии с теоремой 16.2 рассматриваемый оператор X эквивалентен оператору

$$Y = -2u_1 \frac{\partial}{\partial x} - u_1^2 \frac{\partial}{\partial u},$$

порождающему группу контактных преобразований

$$x' = x - 2u_1 a, \quad u' = u - u_1^2 a, \quad u_1' = u_1.$$

§ 17. Инвариантные дифференциальные многообразия

17.1. Критерий инвариантности. Основное пространство Z здесь также имеет вид (16.1). Пусть $F = (F^1, \ldots, F^p)$ — аналитическая функция от $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и дифференциальной переменной $u = (u^1, \ldots, u^m)$, т. е. $F = F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})$, где $s \geqslant 1$ — некоторое натуральное число. Символом $\underset{\nu}{F}$ обозначается совокупность функций $D_{i_1} \ldots D_{i_\nu}(F)$. Уравнение порядка s

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0 \tag{17.1}$$

рассматривается вместе со всеми дифференциальными следствиями и тем самым порождает (бесконечномерное) многообразие $[F] \subset Z$, заданное бесконечной системой уравнений

$$[F]\colon\ F=0,\quad \underset{\nu}{F}=0,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots \tag{17.2}$$

Будем говорить, что уравнение (17.1) задает дифференциальное многообразие $[F]$. Уравнение (17.1) называется *инвариантным относительно группы Ли—Беклунда* G, если инвариантно многообразие $[F]$. С помощью теоремы 15.2.2, справедливой также при переходе от уравнений специального вида (15.19) к более общим уравнениям (17.2), получается следующий инфинитезимальный критерий инвариантности дифференциальных многообразий.

Теорема. *Пусть G—группа преобразований Ли—Беклунда, а X—ее касательное векторное поле. Дифференциальное многообразие $[F]$ инвариантно относитгльно G тогда и только тогда, когда*

$$(XF)_{[F]}=0. \tag{17.3}$$

Доказательство. Применение теоремы 15.2.2 дает в качестве критерия инвариантности многообразия $[F]$ бесконечную цепочку уравнений

$$(XF)_{[F]}=0,\quad (X\underset{\nu}{F})_{[F]}=0,\qquad \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

Все уравнения этой цепочки являются следствием первого из них. Это легко устанавливается при помощи леммы 16.2.1 с учетом аналитичности рассматриваемых функций. Возьмем, например, выражения XD_iF, составляющие $X\underset{1}{F}$. По лемме 16.2.1

$$XD_iF=D_iXF-D_i(\xi^j)\,D_jF.$$

Очевидно, что второе слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль на многообразии $[F]$. Поэтому остается показать, что выражение D_iXF обращается в нуль в силу равенств (17.2) и (17.3). Это следует из того, что функция XF ввиду ее аналитичности и обращения в нуль на $[F]$ может быть представлена в виде линейной формы

$$XF=\lambda F+\lambda^jD_jF+\lambda^{jk}D_jD_kF+\ldots$$

от F, $\underset{1}{F}$, $\underset{2}{F}$, ... с регулярными коэффициентами.

Следствие 1. *Всякое дифференциальное многообразие инвариантно относительно группы, порожденной операторами X_* вида* (16.16).

Следствие 2. *Пусть X_F—оператор Ли—Беклунда, координаты ξ^i, η^α которого являются линейными формами от F, $\underset{1}{F}, \ldots$ с произвольными коэффициентами, регулярными в точках $z\in[F]$. Тогда дифференциальное многообразие $[F]$ инвариантно относительно группы с оператором X_F.*

Подстановка в (17.3) выражений (16.11) для координат ζ оператора X превращает (17.3) в систему уравнений для функций $\xi^i(z)$ и $\eta^\alpha(z)$, которая называется *определяющим уравнением группы Ли—Беклунда, допускаемой уравнением* (17.1). В силу следствия 2 можно считать, что функции ξ^i, η^α зависят только от тех величин x^i, u^α, u_i^α, ..., которые на многообразии $[F]$ играют роль независимых переменных. Дальнейшее упрощение определяющего уравнения достигается с помощью следствия 1, согласно которому вместо (16.14) можно рассматривать канонические операторы Ли—Беклунда (16.18). Тогда определяющее уравнение (17.3) имеет следующий вид:

$$\left(\eta^\alpha \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} + D_i(\eta^\alpha)\frac{\partial F}{\partial u_i^\alpha} + \ldots\right)_{[F]} = 0. \tag{17.4}$$

Замечание 1. Пусть уравнение (17.1) инвариантно относительно группы G с оператором (16.18). Тогда каждое решение $u=u(x)$ дифференциального уравнения (17.1) под действием G переходит снова в решение (являющееся формальным степенным рядом от a) $u=u(x, a)$. Учитывая это обстоятельство, читатель, предпочитающий язык дифференциальных уравнений, может рассматривать определяющее уравнение (17.4) как условие совместности исходной системы дифференциальных уравнений (17.1) с уравнением Ли—Беклунда, записанным в виде системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial a} = \eta^\alpha(x, u, \underset{1}{u}, \ldots), \qquad \alpha = 1, \ldots, m.$$

Замечание 2. Если G—группа точечных преобразований, то условие (17.3) формально отличается от классического определяющего уравнения (4.12) в том случае, когда порядок некоторых из уравнений системы (17.1) меньше s. Отличие состоит в том, что в (4.12) учитываются только связи между x, u, $\underset{1}{u}$, ..., $\underset{s}{u}$, заданные уравнениями (17.1), тогда как в (17.3) наряду с (17.1) используются также дифференциальные следствия (до порядка s) тех уравнений системы (17.1), порядок которых меньше s. Для таких систем дифференциальных уравнений замена определяющего уравнения (4.12) условием (17.3) может привести к расширению допускаемой группы точечных преобразований.

Замечание 3. Следующий пример иллюстрирует возможность использования преобразований Беклунда для расширения допускаемой группы. Рассматривается уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \tag{17.5}$$

для которого определяющее уравнение (17.4) имеет вид

$$D_t^2(\eta) - D_x^2(\eta) = 0.$$

Уравнение (17.5) допускает преобразование Беклунда

$$v_t - u_x = 0, \quad v_x - u_t = 0. \tag{17.6}$$

Пусть u, v—два решения уравнения (17.5), связанные соотношениями (17.6). Тогда (17.5) инвариантно относительно группы, порожденной оператором

$$X = \eta(u+v)\frac{\partial}{\partial u} \tag{17.7}$$

с произвольной функцией η. Выполнение определяющего уравнения проверяется легко. Так как для оператора (17.7)

$$(D_t - D_x)\eta = [(u_t - v_x) + (v_t - u_x)]\eta', \tag{17.8}$$

то

$$(D_t^2 - D_x^2)\eta = (D_t + D_x)(D_t - D_x)\eta = (D_t + D_x)[(u_t - v_x) + (v_t - u_x)]\eta' = 0$$

для любых u, v, удовлетворяющих уравнениям (17.6). При этом всякая пара решений u, v уравнения (17.5), связанная преобразованием Беклунда (17.6), под действием рассматриваемой группы снова переходит в пару решений, связанную тем же преобразованием Беклунда. В самом деле, из (17.8) видно, что «удвоенный» оператор (17.7)

$$X = \eta(u+v)\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

удовлетворяет условию инвариантности (17.6): $(D_t\eta - D_x\eta)_{(17.6)} = 0$

17.2. Примеры решения определяющего уравнения. Первый пример иллюстрирует алгоритм отыскания группы точечных преобразований на основе определяющего уравнения (17.4) и теоремы 16.2. Приводимые ниже вычисления полезно сравнить с § 5.2. Рассматривается уравнение (5.2)

$$u_x u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

и ищутся допускаемые этим уравнением канонические операторы

$$X = \mu\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{17.9}$$

эквивалентные инфинитезимальным операторам точечных преобразований. Для этого в соответствии с теоремой 16.2 нужно найти все решения вида

$$\mu = \xi^1(x, y, u)\,u_x + \xi^2(x, y, u)\,u_y + \eta(x, y, u) \tag{17.10}$$

определяющего уравнения

$$(u_{xx}D_x + u_x D_x^2 + D_y^2)\,\mu = 0; \tag{17.11}$$

в уравнении (17.11) делаются подстановки $u_{yy} = -u_x u_{xx}$, $u_{xyy} =$

$= -u_x u_{xxx} - u_{xx}^2$, ... Производные функции μ вида (17.10) равны

$$D_x(\mu) = \xi^1 u_{xx} + \xi^2 u_{xy} + \xi_u^1 u_x^2 + \xi_u^2 u_x u_y + (\xi_x^1 + \eta_u) u_x + \xi_x^2 u_y + \eta_x,$$

$$D_x^2(\mu) = \xi^1 u_{xxx} + \xi^2 u_{xxy} + (3\xi_u^1 u_x + \xi_u^2 u_y + 2\xi_x^1 + \eta_u) u_{xx} + \\ + 2(\xi_u^2 u_x + \xi_x^2) u_{xy} + \xi_{uu}^1 u_x^3 + \xi_{uu}^2 u_x^2 u_y + (2\xi_{xu}^1 + \eta_{uu}) u_x^2 + \\ + 2\xi_{xu}^2 u_x u_y + (\xi_{xx}^1 + 2\eta_{xu}) u_x + \xi_{xx}^2 u_y + \eta_{xx},$$

$$D_y^2(\mu) = \xi^1 u_{xyy} + \xi^2 u_{yyy} + 2(\xi_u^1 u_y + \xi_y^1) u_{xy} + \\ + (\xi_u^1 u_x + 3\xi_u^2 u_y + 2\xi_y^2 + \eta_u) u_{yy} + \xi_{uu}^1 u_x u_y^2 + \xi_{uu}^2 u_y^3 + \\ + 2\xi_{yu}^1 u_x u_y + (2\xi_{yu}^2 + \eta_{uu}) u_y^2 + \xi_{yy}^1 u_x + (\xi_{yy}^2 + 2\eta_{yu}) u_y + \eta_{yy}.$$

Подстановка этих выражений в определяющее уравнение дает

$$2(\xi_u^2 u_x^2 + \xi_x^2 u_x + \xi_x^1 u_y + \xi_y^1) u_{xy} + \\ + [3\xi_u^1 u_x^2 - \xi_u^2 u_x u_y + (3\xi_x^1 - 2\xi_y^2 + \eta_u) + \xi_x^2 u_y + \eta_x] u_{xx} + \ldots = 0,$$

где опущенные члены зависят только от переменных x, y, u, u_x, u_y. Дальше повторяются рассуждения, приведенные в § 5.2. Равенство нулю коэффициента при u_{xy} приводит к уравнениям (5.5), с учетом которых условие равенства нулю коэффициента при u_{xx} дает уравнения (5.6) и $\eta_u = 2\xi_y^2 - 3\xi_x^1$; последнее соотношение отличается от (5.7) знаком при ξ^1, ξ^2 вследствие перехода от оператора вида (5.3) к его каноническому представителю (17.9) по формуле (16.7). Из полученных соотношений выводятся также уравнения (5.8), и определяющее уравнение (17.11) принимает следующий простой вид:

$$\eta_{yy} + (2\eta_{yu} + \xi_{yy}^2) u_y = 0.$$

В результате получается общее решение

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \quad \xi^2 = c_3 y + c_4, \quad \eta = (2c_3 - 3c_1) u + c_5 y + c_6,$$

зависящее от шести произвольных постоянных c_i, $i = 1, \ldots, 6$, и базис искомой алгебры образуют канонические операторы Ли—Беклунда

$$X_1 = u_x \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \quad X_2 = u_y \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = y \frac{\partial}{\partial u} + \ldots,$$

$$X_5 = (3u - xu_x) \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \quad X_6 = (2u + yu_y) \frac{\partial}{\partial u} + \ldots,$$

эквивалентные операторам (5.11).

Второй пример—стационарное уравнение Шредингера для атома водорода:

$$Lu \equiv \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} D_i^2 + \frac{1}{r} - E \right) u = 0, \qquad (17.12)$$

где $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x^i)^2}$, E—положительная постоянная. Хорошо известно, что это уравнение инвариантно относительно 6-мерной группы Фока [2], которая после преобразования Фурье уравнения (17.12) может быть записана в виде группы вращений в 4-мерном пространстве. В исходных переменных x, u группа Фока представляется преобразованиями Ли—Беклунда:она образована трехмерными вращениями в пространстве $x=(x^1, x^2, x^3)$ и 3-параметрической группой Ли—Беклунда с каноническими операторами (Ibragimov & Anderson [1])

$$X_k=\eta_k\frac{\partial}{\partial u}+\ldots,\quad k=1,\ 2,\ 3. \tag{17.13}$$

Координаты операторов (17.13) задаются формулами

$$\eta_k=P_k(u), \tag{17.14}$$

где P_k—линейные дифференциальные операторы второго порядка:

$$P_k=\frac{x^k}{r}-D_k+\sum_{i\neq k}(x^kD_i-x^iD_k)\,D_i. \tag{17.15}$$

Операторы (17.15) коммутируют с оператором L из (17.12):

$$LP_k=P_kL,\qquad k=1,\ 2,\ 3.$$

Отсюда следует инвариантность уравнения (17.12) относительно рассматриваемой группы Ли—Беклунда, так как $X_kLu=L\eta_k$. Функции η_k, заданные формулами (17.14), зависят от $\underset{2}{u}$ и в силу теоремы 16.2 операторы (17.13) не эквивалентны операторам групп точечных или контактных преобразований.

17.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка могут допускать самое большее 8-параметрическую группу точечных преобразований, причем это максимальное значение достигается для линейных уравнений (см. лекции Lie [4] или Овсянников [4], § 8.8)

$$\frac{d^2u}{dx^2}=a(x)\frac{du}{dx}+b(x)\,u.$$

Например, для уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0 \tag{17.16}$$

оператор

$$X=\xi(x,\ u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,\ u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{17.17}$$

максимальной группы точечных преобразований задается формулами

$$\begin{aligned}\xi&=A_1+A_2x+A_3u+A_4xu+B_4x^2,\\ \eta&=B_1+B_2x+B_3u+B_4xu+A_4u^2,\end{aligned} \tag{17.18}$$

где A_i, B_i $(i=1,\ .\ .,\ 4)$—произвольные постоянные.

Если вместо уравнения (17.16) рассмотреть эквивалентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du^1}{dx}=u^2, \quad \frac{du^2}{dx}=0 \tag{17.19}$$

с зависимыми переменными

$$u^1=u, \quad u^2=\underset{1}{u}\equiv\frac{du}{dx}, \tag{17.20}$$

то допускаемая группа расширяется. А именно, уравнения (17.19) инвариантны относительно бесконечной группы точечных преобразований, порожденной операторами

$$X_*=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\xi u^2\frac{\partial}{\partial u^1}, \tag{17.21}$$

$$X=(u^1g+h)\frac{\partial}{\partial u^1}+u^2g\frac{\partial}{\partial u^2}, \tag{17.22}$$

где $\xi=\xi(x,\ u^1,\ u^2)$, $g=g(u^1-xu^2,\ u^2)$, $h=h(u^1-xu^2,\ u^2)$ — произвольные функции указанных аргументов. Эта группа является максимальной группой точечных преобразований, допускаемой системой (17.20), в чем легко убедиться, решая соответствующие определяющие уравнения.

Если операторы (17.21), (17.22) переписать в терминах функции u, делая замену (17.20), т. е. $u^1\mapsto u$, $u^2\mapsto \underset{1}{u}$, то в результате получатся следующие операторы Ли — Беклунда, допускаемые уравнением (17.16):

$$X_*=\xi\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)D, \quad D=\frac{\partial}{\partial x}+\underset{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}+\ldots, \tag{17.23}$$

$$X=\left[ug\left(u-x\underset{1}{u},\ \underset{1}{u}\right)+h\left(u-x\underset{1}{u},\ \underset{1}{u}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}+\ldots \tag{17.24}$$

Оператор (17.23) — тривиальный (см. лемму 16.2.2 и следствие 17.1.1), а оператор (17.24) эквивалентен инфинитезимальному оператору группы контактных преобразований по теореме 16.2: $X\sim Y$, где Y — оператор вида (16.23) с $W=ug\left(u-x\underset{1}{u},\ \underset{1}{u}\right)+h\left(u-x\underset{1}{u},\ \underset{1}{u}\right)$. Этот оператор Y задает максимальную группу контактных преобразований, допускаемую уравнением (17.16) (см. Anderson & Ibragimov [2], стр. 59); с другой стороны, для уравнения (17.16) нужно рассматривать только такие операторы Ли — Беклунда, координаты которых зависят от x, u, $\underset{1}{u}$, т. е. эквивалентные операторам контактных преобразований. Следовательно, наиболее широкая группа Ли — Беклунда, допускаемая (17.16), порождается оператором (17.24).

Предыдущие результаты переносятся также на уравнения более высокого порядка. Например, максимальная группа Ли — Беклунда для уравнения порядка $n \geqslant 2$

$$\underset{n}{u} \equiv \frac{d^n u}{dx^n} = 0 \tag{17.25}$$

вычисляется так (Anderson & Ibragimov [2], § 15). Оператор

$$X = \eta\left(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{n-1}{u}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{17.26}$$

допускаемый уравнением (17.25), ищется из определяющего уравнения

$$D^n(\eta)\,|_{\underset{n}{u}=0} = 0,$$

которое, очевидно, равносильно уравнению

$$\underset{n-2}{D^n}(\eta) = 0, \tag{17.27}$$

где (формула (14.15))

$$\underset{n-2}{D} = \frac{\partial}{\partial x} + \underset{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + \underset{n-1}{u}\frac{\partial}{\partial \underset{n-2}{u}}.$$

Общее решение уравнения (17.27) выражается через функции

$$J_{n-k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-x)^{k-j}}{(k-j)!}\underset{n-j}{u}, \qquad k = 1,\ \ldots,\ n, \tag{17.28}$$

образующие базис инвариантов оператора $\underset{n-2}{D}$ для функций от переменных $x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{n-1}{u}$. Удобно взять общее решение уравнения

$$\underset{n-2}{D}\,F\left(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{n-1}{u}\right) = 0$$

в виде

$$F = \underset{n-1}{u}\,g_{n-1}(J_0,\ \ldots,\ J_{n-1})$$

и один раз проинтегрировать уравнение (17.27):

$$\underset{n-2}{D^{n-1}}(\eta) = \underset{n-1}{u}\,g_{n-1}. \tag{17.29}$$

С помощью частного решения $F = \underset{n-2}{u}\,g_{n-1}$ уравнения $\underset{n-2}{D}\,F = \underset{n-1}{u}\,g_{n-1}$ можно еще раз проинтегрировать уравнение (17.29) и получить

$$\underset{n-2}{D^{n-2}}(\eta) = \underset{n-2}{u}\,g_{n-1} + \underset{n-1}{u}\,g_{n-2}$$

с произвольными функциями g_{n-1}, g_{n-2} от $J_0, \ldots, J_{n-1}$. Повторение этого процесса дает общее решение уравнения (17.27):

$$\eta = ug_{n-1} + \underset{1}{u}g_{n-2} + \ldots + \underset{n-2}{u}g_1 + g_0, \tag{17.30}$$

где $g_0, \ldots, g_{n-1}$ — произвольные функции от $J_0, \ldots, J_{n-1}$.

Операторы

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial x}, \quad x^2\frac{\partial}{\partial x} + (n-1)xu\frac{\partial}{\partial u},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}, \quad u\frac{\partial}{\partial u}, \quad x\frac{\partial}{\partial u}, \quad x^2\frac{\partial}{\partial u}, \quad \ldots, \quad x^{n-1}\frac{\partial}{\partial u},$$

порождающие $(n+4)$-параметрическую (максимальную) группу точечных преобразований, допускаемую уравнением (17.27) (Lie [4]), а также операторы контактных преобразований, легко получаются из формулы (17.30).

Оператор Ли—Беклунда (17.26), (17.30), можно получить также тем способом, который использовался выше в случае уравнения второго порядка. Для этого нужно переписать уравнение (17.25) в виде системы уравнений первого порядка и искать группу точечных преобразований, допускаемую этой системой.

17.4. Теорема об изоморфизме. Рассмотренные в § 17.3 примеры показывают, что уравнение произвольного порядка и равносильная ему система уравнений первого порядка обладают разными свойствами инвариантности по отношению к точечным преобразованиям. Расширение допустимых преобразований за счет преобразований Ли—Беклунда устраняет это различие.

Теорема. *Группы Ли—Беклунда, допускаемые дифференциальным уравнением* (17.1) *и равносильной системой уравнений первого порядка, полученной из* (17.1) *стандартным преобразованием*

$$v^\alpha = u^\alpha, \quad v^{\alpha i} = u_i^\alpha, \quad \ldots, \tag{17.31}$$

изоморфны.

Доказательство. Для простоты можно ограничиться случаем уравнений второго порядка

$$F\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}\right) = 0, \tag{17.32}$$

так как в общем случае рассуждения аналогичны. Пусть

$$X = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + D_i(\eta^\alpha)\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + D_iD_j(\eta^\alpha)\frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha} + \ldots \tag{17.33}$$

— канонический оператор Ли—Беклунда, допускаемый уравнением (17.32). При переходе от старых зависимых переменных u^α к новым зависимым переменным v^α, $v^{\alpha i}$ из (17.33) получается оператор

$$\overline{X}=\overline{\eta}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+\overline{\zeta}_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha i}}+\overline{\zeta}_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v_j^{\alpha i}}+\ldots, \qquad (17.34)$$

где

$$\overline{\eta}^{\alpha}=\overline{\eta}^{\alpha}\left(x, v, \underset{1}{v}, \ldots\right), \quad \overline{\zeta}_i^{\alpha}=\overline{D}_i(\overline{\eta}^{\alpha}), \quad \overline{\zeta}_{ij}^{\alpha}=\overline{D}_j(\overline{\zeta}_i^{\alpha}), \qquad (17.35)$$
$$\overline{D}_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+v^{\alpha i}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+v_i^{\alpha j}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha j}}+\ldots$$

Здесь временно принято правило суммирования по всем, а не только по верхним и нижним, повторяющимся индексам.

Так как оператор (17.33) на решениях уравнения (17.32) удовлетворяет условию $XF=0$, то для оператора (17.34) справедливо равенство

$$\overline{X}H=0 \qquad (17.36)$$

на решениях уравнения

$$H\left(x, v, \underset{1}{v}\right)=0, \qquad (17.37)$$

полученного из (17.32) заменой (17.31). Уравнение (17.37) вместе с равенствами

$$v_i^{\alpha}=v^{\alpha i}, \ \ldots, \qquad (17.38)$$

вытекающими из (17.31), образуют систему дифференциальных уравнений первого порядка, равносильную исходному уравнению второго порядка (17.32).

Оператор (17.34), (17.35) не является оператором Ли—Беклунда в пространстве переменных $x, v, \underset{1}{v}, \ldots$ Соответствующий оператор Ли—Беклунда равен

$$Y=\overline{\eta}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+\overline{\zeta}_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha i}}+\mu_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v_i^{\alpha}}+\mu_j^{\alpha i}\frac{\partial}{\partial v_j^{\alpha i}}+\ldots, \qquad (17.39)$$

где

$$\mu_i^{\alpha}=D_i'(\overline{\eta}^{\alpha}), \quad \mu_j^{\alpha i}=D_j'(\overline{\zeta}_i^{\alpha}),$$
$$D_i'=\frac{\partial}{\partial x^i}+v_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+v_i^{\alpha j}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha j}}+v_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v_j^{\alpha}}+\ldots \qquad (17.40)$$

Докажем, что система уравнений (17.37), (17.38) инвариантна относительно группы с оператором Y. Для этого достаточно показать, что справедливо равенство

$$Y=\overline{X} \quad \text{на} \quad (17.38),$$

и воспользоваться условием (17.36). Пусть

$$w^{\alpha i}=v_i^{\alpha}-v^{\alpha i}, \quad w_j^{\alpha i}=v_{ij}^{\alpha}-v_j^{\alpha i}, \ \ldots$$

Так как

$$D_i' = \frac{\partial}{\partial x^i} + (v^{\alpha i} + w^{\alpha i}) \frac{\partial}{\partial v^\alpha} + v^{\alpha j} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} - v_i^{\alpha j} \frac{\partial}{\partial w^{\alpha j}} + v_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial w^{\alpha j}} + \ldots,$$

то с учетом (17.38) из формул (17.35) и (17.40) следует, что

$$\mu_i^\alpha = \bar{\zeta}_i^\alpha, \quad \mu_j^{\alpha i} = \bar{\zeta}_{ij}^\alpha, \quad \ldots$$

Поэтому на многообразии, заданном уравнениями (17.38),

$$Y = \bar{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha} + \bar{\zeta}_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v^{\alpha i}} - \bar{\zeta}_i^\alpha \frac{\partial}{\partial w^{\alpha i}} + \mu_i^\alpha \frac{\partial}{\partial w^{\alpha i}} + \ldots = \bar{X}.$$

Приведенные рассуждения обратимы. Если система уравнений (17.37), (17.38) инвариантна относительно группы, порожденной оператором (17.39), (17.40), то уравнение (17.32) инвариантно относительно группы с оператором (17.33). При этом формулы (17.33) и (17.39), (17.40) устанавливают взаимно однозначное соответствие между группами Ли — Беклунда, допускаемыми уравнением (17.32) и равносильной системой уравнений первого порядка (17.37), (17.38). Очевидно, что это соответствие является изоморфизмом.

17.5. Линеаризация преобразованиями Ли — Беклунда. Приводимость дифференциальных уравнений в частных производных к линейным уравнениям путем точечной замены переменных можно установить на основе свойства инвариантности исходных уравнений относительно группы точечных преобразований: группа должна быть бесконечной, причем степень ее бесконечности определяется множеством решений рассматриваемых уравнений. Однако многие встречающиеся на практике способы линеаризации не ограничиваются точечными заменами и не могут быть указаны из априорных групповых соображений, если ограничиться только группами точечных преобразований. Хорошей иллюстрацией является уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0, \tag{17.41}$$

которое переводится в линейное уравнение теплопроводности

$$v_t - v_{xx} = 0 \tag{17.42}$$

преобразованием Хопфа — Коула (Hopf [1], Cole [1])

$$u = -2\frac{v_x}{v}. \tag{17.43}$$

Максимальная группа точечных преобразований, допускаемая уравнением Бюргерса, является 5-параметрической, а уравнение (17.42) инвариантно относительно бесконечной группы точечных преобразований, которая, в частности, содержит бесконечную подгруппу, порожденную операторами

$$X = h(t, x)\frac{\partial}{\partial v} \tag{17.44}$$

с произвольным решением $h(t, x)$ уравнения (17.42). Кроме того, упомянутая 5-параметрическая группа для уравнения Бюргерса под действием преобразования (17.43) переходит в группу точечных преобразований для уравнения теплопроводности. Указанное различие в групповых свойствах делает очевидной невозможность точечного соответствия между уравнениями (17.41) и (17.42); отсюда же ясно, что не существует точечная замена (в пространстве переменных t, x, u!), линеаризующая уравнение Бюргерса.

Заметим теперь, что преобразование (17.43) вместе с его дифференциальными следствиями

$$u_t = D_t\left(-2\frac{v_x}{v}\right), \quad u_x = D_x\left(-2\frac{v_x}{v}\right), \ \ldots$$

является преобразованием Ли — Беклунда. Под действием этого преобразования оператор (17.44) переходит в оператор Ли — Беклунда

$$X = (hu + 2h_x)\, e^{\varphi/2} \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad \varphi_x = u, \tag{17.45}$$

который допускается уравнением (17.41) для любой функции $h(t, x)$, удовлетворяющей уравнению (17.42). Таким образом, оператор Ли — Беклунда (17.45) линеаризует уравнение Бюргерса. Однако следует отметить наличие нелокальности, связанной с зависимостью оператора (17.45) от потенциала φ. Чтобы исключить нелокальность, можно переписать уравнение Бюргерса в переменной φ, подставив $u = \varphi_x$ в уравнение (17.41) и один раз проинтегрировав полученное уравнение. Если учесть неоднозначность выбора потенциала, то уравнение Бюргерса можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x^2 - \varphi_{xx} = 0. \tag{17.46}$$

Так как $(h\varphi_x + 2h_x)\, e^{\varphi/2} = 2\,(he^{\varphi/2})_x$, оператор (17.45) переходит в оператор

$$X = h(t, x)\, e^{\varphi/2} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

порождающий бесконечную группу точечных преобразований, допускаемую уравнением (17.46). Это говорит о линеаризуемости уравнения (17.46) точечной заменой. Соответствующая замена, равносильная преобразованию (17.43), имеет вид

$$\varphi = -2 \ln v. \tag{17.47}$$

Приведенный пример достаточно полно иллюстрирует следующий общий вывод из теоремы об изоморфизме *):

*) Эта теорема, доказанная в § 17.4 в случае преобразований частного вида (17.31), переносится, если рассматривать алгебры с нелокальными (см. стр. 191) элементами, на произвольные преобразования Ли — Беклунда.

Всякое дифференциальное уравнение в частных производных, допускающее линеаризацию некоторым преобразованием Ли—Беклунда, инвариантно относительно бесконечной группы Ли—Беклунда.

Еще один пример—уравнение стационарного околозвукового течения газа (5.2). Это уравнение не допускает линеаризацию точечной заменой, так как оно инвариантно только относительно 6-параметрической группы точечных преобразований (см. § 5.2 или § 17.2). Однако оно линеаризуется методом годографа, так как допускает бесконечную группу Ли—Беклунда, порожденную операторами

$$X = \eta(u_x, u_y)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{17.48}$$

где $\eta(\alpha, \beta)$—произвольное решение линейного уравнения второго порядка

$$\eta_{\alpha\alpha} + \alpha\eta_{\beta\beta} = 0. \tag{17.49}$$

Именно уравнение (17.49) реализует указанную линеаризацию. В данном случае линеаризацию можно осуществить также с помощью контактных преобразований, что хорошо известно в механике. Действительно, к оператору (17.48) применима теорема 16.2, в соответствии с которой оператор Ли—Беклунда (17.48) эквивалентен инфинитезимальному оператору

$$X = \eta_\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \eta_\beta\frac{\partial}{\partial y} + (\alpha\eta_\alpha + \beta\eta_\beta - \eta)\frac{\partial}{\partial u}$$

группы контактных преобразований

$$\begin{aligned} &x' = x + a\eta_\alpha, \quad y' = y + a\eta_\beta, \\ &u' = u + a(\alpha\eta_\alpha + \beta\eta_\beta - \eta), \\ &\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \end{aligned} \tag{17.50}$$

где $\alpha = u_x$, $\beta = u_y$. Теоретико-групповые аспекты метода годографа обсуждаются также в книгах Биркгофа [1] и Овсянникова [2].

Условие линеаризуемости преобразованиями Ли—Беклунда, высказанное выше, более точно формулируется как свойство автоморфности рассматриваемого дифференциального уравнения. Уравнение (17.1), инвариантное относительно группы Ли—Беклунда G, называется *автоморфным* (относительно группы G), если G действует транзитивно на множестве решений этого уравнения, иначе говоря, если все решения уравнения (17.1) получаются из одного решения преобразованиями группы G. Например, любое линейное уравнение автоморфно. Примеры нелинейных автоморфных уравнений приводились выше; они появятся еще в следующей главе.

Теорема. *Дифференциальное уравнение, линеаризуемое преобразованием Ли—Беклунда, автоморфно относительно некоторой группы Ли—Беклунда.*

Доказательство. Свойство автоморфности инвариантно относительно произвольных преобразований Ли—Беклунда. Поэтому утверждение вытекает из теоремы об изоморфизме.