ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ ЛИ—БЕКЛУНДА

§ 18. Характерные примеры

18.1. Уравнение теплопроводности. Всякое линейное эволюционное уравнение*) $u_t = \sum_{i=0}^{m} a^i u_i$ с постоянными коэффициентами a^i допускает бесконечную нетривиальную (т. е. не точечную) группу Ли — Беклунда. Алгоритм построения соответствующей бесконечномерной алгебры иллюстрируется здесь на примере уравнения

$$u_t = u_2. \tag{18.1}$$

Уравнение теплопроводности с точки зрения точечных преобразований рассматривал еще С. Ли (см. Lie [6], том 3, стр. 514): наряду с очевидной бесконечной группой с операторами вида (17.44), уравнение (18.1) допускает 6-параметрическую группу точечных преобразований, порожденную инфинитезимальными операторами

$$X_0 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_5 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Эти операторы эквивалентны каноническим операторам Ли — Беклунда

$$X = f(t, x, u, u_1, \ldots)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{18.2}$$

где f принимает значения

$$\begin{aligned} &f_0 = u, \quad f_1 = u_1, \quad f_2 = u_2, \quad f_3 = xu + 2tu_1, \\ &f_4 = xu_1 + 2tu_2, \quad f_5 = (x^2+2t)u + 4txu_1 + 4t^2u_2. \end{aligned} \tag{18.3}$$

Первые три функции в (18.3) связаны рекуррентной формулой

$$f_k = Df_{k-1}, \qquad k = 1, 2. \tag{18.4}$$

---

*) Здесь используются обозначения $u_0 = u$, $u_1 = u_x$, $u_2 = u_{xx}$, ..., $D = D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i \geqslant 0} u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i}$.

На самом деле рекурренция (18.4) переводит любое решение f определяющего уравнения

$$(D_t - D^2) f\,|_{u_t=u_2} = 0 \tag{18.5}$$

для (18.1) в решение $\tilde{f} = Df$ уравнения (18.5). Это следует из коммутационного соотношения $[D_t - D^2,\ D] = 0$. Поэтому можно, исходя из простейшего решения $f_0 = u$ определяющего уравнения, получить бесконечную последовательность операторов Ли—Беклунда

$$X_k = u_k \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{18.6}$$

допускаемых уравнением теплопроводности *). Кроме того, действие D на остальные функции из (18.3) дает

$$\begin{aligned} &Df_3 = f_0 + f_4, \quad Df_4 = f_1 + xu_2 + 2tu_3, \\ &Df_5 = 2f_3 + (x^2 + 2t)u_1 + 4txu_2 + 4t^2u_3. \end{aligned} \tag{18.7}$$

Поэтому уравнение (18.1) наряду с (18.6) допускает следующие две последовательности операторов:

$$X_k = (xu_k + 2tu_{k+1}) \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{18.8}$$

$$X_k = ((x^2 + 2t)\,u_k + 4txu_{k+1} + 4t^2u_{k+2}) \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots \tag{18.9}$$

Таким образом, уравнение (18.1) инвариантно относительно бесконечной группы Ли—Беклунда, алгебра Ли которой порождена операторами (18.6), (18.8), (18.9). Из соотношений (18.4) и (18.7) видно, что эту алгебру можно получить путем последовательного действия дифференцирования D на функции f_0, f_3 и f_5 из (18.3).

Приведенные соображения подсказывают следующий подход к решению определяющего уравнения (18.5). Пусть функция L, зависящая от независимых переменных t, x, от дифференциальной переменной u (т. е. от u, u_1, u_2, ...; величины u_t, u_{tx}, ... исключаются с помощью уравнения (18.1)) и от символа D, удовлетворяет условию

$$[D_t - D^2,\ L]_{u_t=u_2} = 0. \tag{18.10}$$

Тогда любое решение $f = f(t,\ x,\ u,\ u_1,\ \ldots)$ уравнения (18.5) переводится в решение Lf уравнения (18.5), если определено действие оператора L на f. Выше рассматривался случай $L = D$. В качестве простого обобщения этого случая найдем все решения уравнения (18.10), являющиеся дифференциальными операторами

---

*) Операторы (18.6) допускаются любым линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

первого порядка,

$$L = \alpha D + \beta, \tag{18.11}$$

где α, β зависят от t, x, u, u_1, ... Подстановка (18.11) в (18.10) дает

$$[D_t - D^2,\ L] = -2D(\alpha)D^2 + (D_t(\alpha) - 2D(\beta) - D^2(\alpha))D + \\ + D_t(\beta) - D^2(\beta) = 0.$$

Отсюда следуют уравнения

$$D(\alpha) = 0, \quad D_t(\alpha) - 2D(\beta) = 0, \quad D_t(\beta) - D^2(\beta) = 0.$$

Так как из первых двух уравнений следует равенство $D^2(\beta) = 0$, то третье уравнение принимает вид $D_t(\beta) = 0$. Поэтому $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(x)$, и уравнение $D_t(\alpha) - 2D(\beta) = 0$ дает $\alpha' = 2\beta' = \text{const}$, откуда

$$\alpha = 2at + b, \quad \beta = ax + c,$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Опуская несущественную постоянную c, общее решение вида (18.11) уравнения (18.10) можно записать как линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами следующих двух дифференциальных операторов:

$$L_1 = D, \quad L_2 = 2tD + x. \tag{18.12}$$

Полученные операторы L_1 и L_2 позволяют построить описанную выше алгебру операторов Ли — Беклунда для уравнения теплопроводности, исходя из одного элемента $f_0 = u$. В силу формул (18.4), (18.7) достаточно показать, что f_3 и f_5 можно получить из f_0. Имеем

$$f_3 = L_2 f_0, \quad f_5 = L_2 f_3 = L_2^2 f_0.$$

Отсюда ясно также, что «рекурренции» L_1 и L_2 позволяют построить для уравнения теплопроводности более широкую алгебру, чем алгебра операторов (18.6), (18.8), (18.9).

С помощью замены (17.47) из операторов (18.12) можно получить рекурренции для построения бесконечной алгебры операторов Ли — Беклунда, допускаемых уравнением Бюргерса. Заметим сначала, что при замене переменной

$$v = \Phi(u) \tag{18.13}$$

координата f оператора (18.2) переходит в $\tilde{f} = \Phi' f$, и поэтому Lf переходит в $\Phi' L f = \Phi' L \Phi'^{-1} \tilde{f} = M\tilde{f}$. Следовательно, оператор рекурренции L при замене (18.13) принимает вид

$$M = \Phi' L \Phi'^{-1}. \tag{18.14}$$

Рассмотрим теперь уравнение Бюргерса

$$v_t = v_2 - \frac{1}{2} v_1^2, \tag{18.15}$$

которое связано с (18.1) заменой

$$v = -2 \ln u. \tag{18.16}$$

Преобразование (18.14) в этом случае имеет вид

$$M = \frac{1}{u} L u = e^{\frac{v}{2}} L e^{-\frac{v}{2}}.$$

Подставляя сюда значения (18.12) оператора L и учитывая инвариантность дифференцирования, $D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i \geqslant 0} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i \geqslant 0} v_{i+1} \frac{\partial}{\partial v_i}$, получаем следующие два оператора рекурренции для уравнения (18.15):

$$M_1 = D - \frac{1}{2} v_1, \quad M_2 = 2tM_1 + x. \tag{18.17}$$

Рекурренция M_1 использовалась в статье Ибрагимова и Шабата [2] при описании алгебры, не зависящей от t, x. Для построения операторов (18.2), допускаемых уравнением (18.15), можно в качестве исходного элемента алгебры взять $f_0 = 1$ и действовать на него операторами M_1, M_2. В частности, инфинитезимальные операторы точечных преобразований соответствуют следующим элементам алгебры:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = M_1 f_0 = v_1, \quad f_2 = M_1^2 f_0 = v_2 - \frac{1}{2} v_1^2 = v_t,$$
$$f_3 = M_2 f_0 = x - t v_1, \quad f_4 = M_2 M_1 f_0 = 2t v_t + x v_1,$$
$$f_5 = M_2^2 f_0 = (x^2 + 2t) - 2t^2 v_t - 2t x v_1$$

и равны

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = 2t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2tx \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + 2t) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Коммутационные соотношения в этой 6-мерной алгебре определяются свойствами операторов M_1 и M_2 и поэтому переносятся на бесконечномерную алгебру операторов Ли—Беклунда, порожденную рекурренциями M_1, M_2. Например, элементы вида $M_1^n f_0$ и $M_2^n f_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (или элементы $L_1^n f_0$ и $L_2^n f_0$ в случае уравнения теплопроводности), образуют две бесконечномерные коммутативные, но не коммутирующие друг с другом, подалгебры.

Вместо (18.13) можно взять более общие преобразования

$$v = \Phi(u, u_1, u_2, \ldots). \tag{18.18}$$

При этом происходит следующая замена операторов Ли—Беклунда:

$$X \equiv f \frac{\partial}{\partial u} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots = X(v) \frac{\partial}{\partial v} + \ldots = \Phi_*(f) \frac{\partial}{\partial v} + \ldots,$$

где Φ_* — дифференциальный оператор, равный

$$\Phi_* = \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} D + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} D^2 + \ldots \tag{18.19}$$

Поэтому формула (18.14) обобщается в виде

$$\tilde{L}\Phi_* = \Phi_* L, \tag{18.20}$$

где L и $\tilde{L}$ — операторы рекурренции в переменных u и v соответственно. Примером такой замены переменной является переход в уравнении Бюргерса (18.15) (один раз продифференцированном) от потенциала v к скорости $u = -v_1$. При указанной замене уравнение Бюргерса принимает вид

$$u_t = u_2 + uu_1, \tag{18.21}$$

а $\Phi_* = -D$. Формула (18.20) дает соотношение

$$L = DMD^{-1} \tag{18.22}$$

между рекурренциями M и L для уравнений (18.15) и (18.21) соответственно. Подстановкой в (18.22) операторов M из (18.17) получаются два оператора рекурренции для уравнения (18.21):

$$\begin{gathered} L_1 = D + \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} u_1 D^{-1}, \\ L_2 = 2tD + (x + tu) + (1 + tu_1) D^{-1}. \end{gathered} \tag{18.23}$$

18.2. Уравнение Кортевега — де Фриза. Операторы (18.2), допускаемые уравнением Кортевега — де Фриза

$$u_t = u_3 + uu_1, \tag{18.24}$$

находятся из определяющего уравнения

$$(D_t - D^3 - uD - u_1) f = 0. \tag{18.25}$$

В соответствии с общей теорией уравнение (18.25) рассматривается на дифференциальном многообразии (с естественными координатами $t,\ x,\ u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$), заданном уравнением (18.24). Четыре решения

$$\begin{gathered} f_1 = u_1, \quad f_2 = u_3 + uu_1, \quad f_3 = 1 + tu_1, \\ f_4 = 2u + xu_1 + 3t(u_3 + uu_1) \end{gathered} \tag{18.26}$$

определяющего уравнения соответствуют операторам

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} \end{gathered} \tag{18.27}$$

группы точечных преобразований, порожденной переносами по x, t, преобразованием Галилея и растяжением. В дальнейшем решения определяющего уравнения, имеющие вид

$$f=f(t,\ x,\ u,\ \ldots,\ u_n),\quad \frac{\partial f}{\partial u_n}\neq 0, \tag{18.28}$$

называются *решениями порядка n* и обозначаются $\overset{(n)}{f}$.

На основе следующей леммы все решения определяющего уравнения, не зависящие от t, x, можно построить с помощью одной рекурренции (Ибрагимов, Шабат [1]).

Лемма. *Решение порядка* n,

$$\overset{(n)}{f}=f(u,\ \ldots,\ u_n), \tag{18.28$'$}$$

определяющего уравнения единственно по модулю решений меньшего порядка, причем нетривиальные решения существуют только для нечетных n.

Доказательство. Подстановка функции (18.28′) в левую часть уравнения (18.25) дает

$$(D_t-D^3-uD-u_1)\overset{(n)}{f}=3u_{n+2}D\left(\frac{\partial \overset{(n)}{f}}{\partial u_n}\right)+g$$

с некоторой функцией $g=g(u,\ \ldots,\ u_{n+1})$. Поэтому из уравнения (18.25) следует, что

$$\overset{(1)}{f}=u_1,\qquad \overset{(n)}{f}=u_n+h(u,\ \ldots,\ u_{n-1}),\qquad n>1. \tag{18.29}$$

Отсюда индукцией по n получается единственность решения порядка n. Для того чтобы доказать отсутствие решений четного порядка, уточним формулу (18.29). Подстановка функции вида (18.29) при $n>3$ в уравнение (18.25) дает (см. также § 19.2)

$$\overset{(n)}{f}=u_n+c_1u_{n-1}+c_2u_{n-2}+\frac{n}{3}uu_{n-2}+h, \tag{18.29$'$}$$

где c_1, $c_2=\mathrm{const}$, а $h=h(u,\ \ldots,\ u_{n-3})$. Теперь можно воспользоваться тем, что для произвольного решения $f(t,\ x,\ u,\ u_1,\ \ldots)$ определяющего уравнения (18.25) коммутатор соответствующего оператора (18.2) с оператором X_3 из (18.27) дает решение

$$t\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial u} \tag{18.30}$$

определяющего уравнения. Применительно к решению порядка n вида (18.29′) формула (18.30) дает решение порядка $n-2$:

$$\frac{\partial \overset{(n)}{f}}{\partial u}=\frac{n}{3}u_{n-2}+h(u,\ \ldots,\ u_{n-3}).$$

Таким путем, начав с решения произвольного четного порядка n, можно спуститься до решения порядка 2. Однако легко убедиться, что уравнение (18.25) не имеет решений порядка 2. Это доказывает лемму.

Таким образом, для построения всех решений определяющего уравнения, не зависящих от t, x, достаточно для каждого нечетного n найти одно решение порядка n. Эти решения можно построить по рекурренции. По аналогии с оператором L_1 из (18.23), принимая во внимание доказанную выше лемму, естественно искать оператор рекурренции для уравнения (18.24) в виде

$$L = D^2 + \alpha + \beta D^{-1} \tag{18.31}$$

с коэффициентами α, β, зависящими от t, x, u, u_1 ...; из сравнения функций f_1 и f_2 из (18.26) ясно, что в L не может входить слагаемое вида γD.

Коммутатор оператора (18.31) с оператором, входящим в определяющее уравнение (18.25), равен

$$[D_t - D^3 - uD - u_1, L] = (2u_1 - 3D(\alpha))D^2 + (3u_2 - 3D^2(\alpha) - 3D(\beta))D + \\ + (D_t - D^3 - uD)(\alpha) + u_3 - 3D^2(\beta) + (D_t - D^3 - uD - u_1)(\beta)D^{-1}.$$

Для того чтобы это выражение обращалось в нуль, нужно, чтобы равнялись нулю коэффициенты при всех степенях D. В частности, коэффициенты при D^2 и D равны нулю тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \frac{2}{3}u + c_1(t), \qquad \beta = \frac{1}{3}u_1 + c_2(t).$$

Из следующих двух уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов при D^0 и D^{-1}, видно, что $c_1 = \text{const}$, $c_2 = 0$. Таким образом, коэффициенты α и β однозначно (с точностью до несущественного постоянного слагаемого в α) определились. Искомый оператор рекурренции равен

$$L = D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_1 D^{-1} \tag{18.32}$$

и удовлетворяет коммутационному соотношению

$$[D_t - D^3 - uD - u_1, \ L] = \frac{2}{3}(u_1 - u_3 - uu_1) + \frac{1}{3}D(u_t - u_3 - uu_1)\cdot D^{-1}. \tag{18.33}$$

Бесконечная группа Ли—Беклунда для уравнения Кортевега—де Фриза, т. е. последовательность уравнений Ли—Беклунда

$$u_\tau = \overset{(n)}{f}(u, \ldots, u_n), \tag{18.34}$$

называемых *старшими уравнениями Кортевега—де Фриза*, была ранее найдена методом обратной задачи рассеяния (см. Lax [1], Gardner [1]); рекурренцию (18.32) нашел A. Lenard (формулы (5.10), (5.11) в Gardner, Greene, Kruskal, Miura [1]; см. также Olver [1]).

Действие оператора (18.32) на функцию f_1 из (18.26) дает следующую бесконечную последовательность решений (18.28) нечетного порядка определяющего уравнения (18.25):

$$\overset{(1)}{f} = u_1, \quad \overset{(n+2)}{f} = \left(D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_1D^{-1}\right)\overset{(n)}{f}, \quad n = 1,\ 3,\ \ldots \tag{18.35}$$

В частности, $\overset{(3)}{f}$ совпадает с функцией f_2 из (18.26), а

$$\overset{(5)}{f} = u_5 + \frac{5}{3}uu_3 + \frac{10}{3}u_1u_2 + \frac{5}{6}u^2u_1.$$

Так как в L входит оператор D^{-1}, то при построении решений по рекурренции (18.35) появляются постоянные «интегрирования». Однако эти постоянные можно опускать, так как они добавляют к $\overset{(n)}{f}$ решения меньшего порядка.

Из коммутационного соотношения (18.33) следует, что оператор (18.32) переводит любое решение определяющего уравнения снова в решение. В частности, функции f_3 и f_4 из (18.26) связаны равенством

$$f_4 = 3Lf_3.$$

Таким образом, исходя из группы точечных преобразований и действуя оператором рекурренции (18.32), можно построить две серии решений определяющего уравнения. В отличие от первой серии, представленной формулой (18.35), вторая серия

$$\overset{(1)}{g} = 1 + tu_1, \quad \overset{(n+2)}{g} = \left(D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_1D^{-1}\right)\overset{(n)}{g}, \quad n = 1,\ 3,\ \ldots \tag{18.36}$$

приводит к «нелокальной» группе преобразований, допускаемой уравнением Кортевега—де Фриза (см. Ибрагимов, Шабат [1]). Это означает, что функции $\overset{(n)}{g}$, определяемые рекурренцией (18.36), зависят не только от t, x и дифференциальной переменной u, но также от новых переменных, связанных с u дифференциальными соотношениями *). Например,

$$\overset{(5)}{g} = t\overset{(5)}{f} + \frac{1}{3}x\overset{(3)}{f} + \frac{4}{3}u_2 + \frac{4}{9}u^2 + \frac{1}{9}\varphi u_1,$$

где функции $\overset{(3)}{f}$ и $\overset{(5)}{f}$ определены формулой (18.35), а φ—потенциал для u, т. е. $\varphi_1 = u$, $\varphi_t = u_2 + \frac{1}{2}u^2$. Функция $\overset{(7)}{g}$ будет содержать наряду с φ еще одну новую переменную ψ, связанную с u равенством $\psi_1 = u^2$ и т. д.

*) Определяющее уравнение (18.25) не имеет локальных решений (18.28), зависящих от t, x, кроме f_3 и f_4 из (18.26) (см. Магадеев, Соколов [1]).

В связи с групповым анализом уравнения Кортевега—де Фриза следует отметить, что коммутативная бесконечная группа Ли—Беклунда, порожденная преобразованиями (18.34), (18.35), может быть положена в основу исследования решений типа солитонов. А именно, если алгоритм построения инвариантных решений уравнения (18.24), описанный в § 5.3 для случая групп точечных преобразований, перенести на однопараметрическую группу преобразований Ли—Беклунда (18.34), то соответствующее инвариантное решение представляет собой совместное решение исходного уравнения (18.24) и обыкновенного дифференциального уравнения

$$\overset{(n)}{f}(u, u_1 \ldots, u_n) = 0. \tag{18.37}$$

Первоначально это уравнение (а также уравнение (18.34)) связывалось с законами сохранения следующей процедурой, которую предложил C. Gardner (см. Lax [1], стр. 163): пусть для уравнения (18.24) известен закон сохранения $D_t(T) + D(F) = 0$ с полиномиальной плотностью $T = T(u, \ldots, u_p)$, тогда правая часть уравнения (18.34) определяется формулой (с $n = 2p + 1$)

$$\overset{(n)}{f} = D\frac{\delta T}{\delta u}, \quad \frac{\delta}{\delta u} = \sum_{i \geqslant 0} (-D)^i \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{18.38}$$

Наличие бесконечной коммутативной алгебры позволяет понизить порядок уравнения (18.37) и в конечном счете проинтегрировать его *).

18.3. Уравнение пятого порядка. Рекурренция более сложного вида реализуется для уравнения **)

$$u_t = u_5 + 5(uu_3 + u_1u_2 + u^2u_1), \tag{18.39}$$

которое не принадлежит серии (18.35). Здесь опять можно начать с группы точечных преобразований. Рассматриваемое уравнение инвариантно относительно 3-параметрической группы, порожденной переносами по x, t и растяжением $x' = ax$, $t' = a^5t$, $u' = a^{-2}u$. Поэтому в данном случае определяющее уравнение имеет решения

$$\begin{aligned} &f_1 = u_1, \quad f_2 = u_5 + 5(uu_3 + u_1u_2 + u^2u_1), \\ &f_3 = 2u + xf_1 + 5tf_2. \end{aligned} \tag{18.40}$$

Дальнейшее построение алгебры, допускаемой уравнением (18.39), осуществляется с помощью оператора рекурренции

$$L = (D^2 + 4u + 2u_1D^{-1})(D^2 + u)D(D^2 + u)D^{-1}, \tag{18.41}$$

который нашли В. В. Соколов и А. Б. Шабат.

---

*) Подробнее об этом и о способе перехода от бесконечной алгебры Ли—Беклунда к обратной задаче рассеяния см. Ибрагимов, Шабат [1, 4].

**) Sawada & Kotera [1] показали, что уравнение (18.39) интегрируется методом обратной задачи рассеяния (см. также Caudrey, Dodd & Gibbon [1], Dodd & Gibbon [1]).

Чтобы выявить, на какие функции $f=f(t, x, u, u_1, \ldots)$ можно действовать (оставаясь в пространстве функций от переменных $t, x, u, u_1, \ldots$) оператором L, формулу (18.41) удобно переписать в виде

$$L=D^6+6uD^4+9u_1D^3+(11u_2+9u^2)D^2+(10u_3+21uu_1)D+ \\ +(5u_4+6u_1^2+16uu_2+4u^3)+(u_5+5uu_3+5u_1u_2+5u^2u_1)D^{-1}+ \\ +u_1D^{-1}\cdot(2u_2+u^2).$$

Отсюда видно, что f должна удовлетворять условиям

$$f=D(g), \quad (2u_2+u^2)f=D(h)$$

с некоторыми функциями g и h от $t, x, u, u_1, \ldots$ Иначе говоря, функция f должна быть решением вариационных уравнений

$$\frac{\delta f}{\delta u}=0, \quad \frac{\delta}{\delta u}[(2u_2+u^2)f]=0. \tag{18.42}$$

Легко проверить, что функции f_1 и f_2 из (18.40) удовлетворяют указанным условиям. Например,

$$f_1=D(u), \quad (2u_2+u^2) \quad f_1=D\left(u_1^2+\frac{1}{3}u^3\right).$$

Действие оператора (18.41) на функции f_1 и f_2 из (18.40) дает две последовательности

$$\begin{aligned} &\overset{(1)}{f}=f_1, \quad \overset{(n+6)}{f}=L\overset{(n)}{f}, \quad n=1+6k; \\ &\overset{(5)}{f}=f_1, \quad \overset{(m+6)}{f}=L\overset{(m)}{f}, \quad m=5+6k; \quad k=0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{18.43}$$

которые образуют бесконечную коммутативную алгебру Ли—Беклунда, допускаемую уравнением (18.39). Функции f, получаемые по формулам (18.43), удовлетворяют условиям (18.42). Например,

$$\overset{(7)}{f}=Lf_1= \\ =u_7+7\left(uu_5+2u_1u_4+3u_2u_3+2u^2u_3+6u_1u_2u_3+u_1^3+\frac{4}{3}u^3u_1\right)= \\ =D\left[u_6+7\left(uu_4+u_1u_3+u_2^2+2u^2u_2+uu_1^2+\frac{1}{3}u^4\right)\right]$$

в соответствии с первым из уравнений (18.42); выполнение второго из этих уравнений легко проверяется подстановкой значения $\overset{(7)}{f}$.

Функция f_3 из (18.40) не удовлетворяет условиям (18.42). Поэтому действие оператора L на f_3 порождает, как и в случае уравнения Кортевега—де Фриза, нелокальные преобразования.

18.4. Волновое уравнение. Для уравнения

$$u_{xy}=0 \tag{18.44}$$

определяющее уравнение имеет вид

$$D_xD_yf\,|_{u_{xy}=0}=0.$$

Подстановкой сюда функции

$$f=f(x,\,y,\,u,\,u_x,\,\ldots,\,u_{nx},\,u_y,\,\ldots,\,u_{ny}),$$

где $u_{nx}=D_x^nu$, $u_{ny}=D_y^nu$, получается общее решение порядка n:

$$\overset{(n)}{f}=cu+g(x,\,u_x,\,\ldots,\,u_{nx})+h(y,\,u_y,\,\ldots,\,u_{ny}) \tag{18.45}$$

с произвольными функциями g и h и $c=\mathrm{const}$.

Таким образом, алгебра Ли—Беклунда, допускаемая волновым уравнением, бесконечномерна и состоит из элементов $\overset{(n)}{f}$, $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$, вида (18.45). В частности, для получения группы точечных преобразований нужно в (18.45) положить (теорема 16.2)

$$f=cu+a(x)+b(y)-\xi(x)\,u_x-\eta(y)\,u_y.$$

Это дает инфинитезимальный оператор

$$X=\xi(x)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(y)\frac{\partial}{\partial y}+[cu+a(x)+b(y)]\frac{\partial}{\partial u}$$

с произвольными функциями ξ, η, a, b. Функции (18.45) при $n=1$ соответствует группа контактных преобразований: инфинитезимальный оператор этой группы определяется формулами (14.6) с $W=cu+g(x,\,u_x)+h(y,\,u_y)$.

§ 19. Эволюционные уравнения

19.1. Алгебра $\mathcal{A}_F$. Изучение алгебры Ли—Беклунда, допускаемой дифференциальными уравнениями, является задачей дифференциальной алгебры. С этой точки зрения в настоящее время наиболее полно исследованы скалярные эволюционные уравнения

$$u_t=F(x,\,u,\,u_1,\,\ldots,\,u_m),\qquad m\geqslant 2, \tag{19.1}$$

с одной пространственной переменной x.

В соответствии с принятой в дифференциальной алгебре терминологией (см., например, Ritt [1]) u называется *дифференциальной переменной* (относительно дифференцирования $D=D_x$); ее *последовательные производные*—это переменные u_1, u_2, ... такие, что $D(u_i)=u_{i+1}$, $u_0=u$. Функция $f=f(x,\,u,\,u_1,\,\ldots,\,u_n)$, $n<\infty$, аналитическая по всем переменным и такая, что $\partial f/\partial u_n\neq 0$, называется *дифференциальной функцией порядка* n, а функция $f_n=$ $=\partial f/\partial u_n$—ее *сепарантой*.