18.4. Волновое уравнение. Для уравнения

$$u_{xy}=0 \tag{18.44}$$

определяющее уравнение имеет вид

$$D_xD_yf\,|_{u_{xy}=0}=0.$$

Подстановкой сюда функции

$$f=f(x, y, u, u_x, \ldots, u_{nx}, u_y, \ldots, u_{ny}),$$

где $u_{nx}=D_x^n u$, $u_{ny}=D_y^n u$, получается общее решение порядка n:

$$\overset{(n)}{f}=cu+g(x, u_x, \ldots, u_{nx})+h(y, u_y, \ldots, u_{ny}) \tag{18.45}$$

с произвольными функциями g и h и $c=\text{const}$.

Таким образом, алгебра Ли—Беклунда, допускаемая волновым уравнением, бесконечномерна и состоит из элементов $\overset{(n)}{f}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, вида (18.45). В частности, для получения группы точечных преобразований нужно в (18.45) положить (теорема 16.2)

$$f=cu+a(x)+b(y)-\xi(x)u_x-\eta(y)u_y.$$

Это дает инфинитезимальный оператор

$$X=\xi(x)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(y)\frac{\partial}{\partial y}+[cu+a(x)+b(y)]\frac{\partial}{\partial u}$$

с произвольными функциями ξ, η, a, b. Функции (18.45) при $n=1$ соответствует группа контактных преобразований: инфинитезимальный оператор этой группы определяется формулами (14.6) с $W=cu+g(x, u_x)+h(y, u_y)$.

§ 19. Эволюционные уравнения

19.1. Алгебра $\mathcal{A}_F$. Изучение алгебры Ли—Беклунда, допускаемой дифференциальными уравнениями, является задачей дифференциальной алгебры. С этой точки зрения в настоящее время наиболее полно исследованы скалярные эволюционные уравнения

$$u_t=F(x, u, u_1, \ldots, u_m), \qquad m\geqslant 2, \tag{19.1}$$

с одной пространственной переменной x.

В соответствии с принятой в дифференциальной алгебре терминологией (см., например, Ritt [1]) u называется *дифференциальной переменной* (относительно дифференцирования $D=D_x$); ее *последовательные производные* — это переменные u_1, u_2, ... такие, что $D(u_i)=u_{i+1}$, $u_0=u$. Функция $f=f(x, u, u_1, \ldots, u_n)$, $n<\infty$, аналитическая по всем переменным и такая, что $\partial f/\partial u_n\neq 0$, называется *дифференциальной функцией порядка* n, а функция $f_n=\partial f/\partial u_n$ — ее *сепарантой*.

Рассматривается пространство $\mathcal{A}$ всех дифференциальных функций конечного порядка, снабженное дифференцированием

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{i\geqslant 0} u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i} \tag{19.2}$$

и двумя алгебраическими структурами: структурой ассоциативной алгебры, заданной обычным умножением функций, и структурой алгебры Ли, заданной скобкой

$$\{f, g\}=f_*g-g_*f, \tag{19.3}$$

где

$$f_*=\sum_{i\geqslant 0} f_iD^i, \quad f_i=\frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad D^i - i\text{-я степень } D.$$

Элементы $\mathcal{A}$ могут зависеть от параметра t. Эволюционное уравнение (19.1) рассматривается как динамическая система

$$\frac{du_i}{dt}=D^i(F), \qquad i=0, 1, 2, \ldots, \tag{19.1'}$$

в $\mathcal{A}$. Дифференцирование вдоль траекторий этой динамической системы обозначается $\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i\geqslant 0} D^i(F)\frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{19.4}$$

В этих обозначениях определяющее уравнение (17.4) для канонических операторов Ли—Беклунда (18.2), допускаемых уравнением (19.1), записывается в виде

$$\left(\frac{d}{dt}-F_*\right)f=0, \tag{19.5}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\{F, f\}=0. \tag{19.5'}$$

Множество решений уравнения (19.5′) образует подалгебру алгебры Ли $\mathcal{A}$; эта подалгебра обозначается $\mathcal{A}_F$,

$$\mathcal{A}_F=\left\{f\in\mathcal{A}:\ \frac{\partial f}{\partial t}-\{F, f\}=0\right\},$$

и называется *алгеброй Ли—Беклунда уравнения* (19.1). Ввиду инвариантности (19.1) относительно переносов по x и t алгебра $\mathcal{A}_F$ содержит элементы $f=u_1$ и $f=F$; если $\mathcal{A}_F$ помимо этих двух тривиальных элементов содержит хотя бы одну функцию порядка $n>1$, то (19.1) называется *уравнением с нетривиальной алгеброй*.

В дальнейшем за исключением специальных случаев, которые будут указываться особо, рассматриваются дифференциальные функции, не зависящие от t, x, и вместо (19.5′) решается

уравнение
$$\{f, F\}=0. \tag{19.6}$$

При этом алгебра $\mathcal{A}_F$ совпадает с централизатором элемента $F\in\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}_F$ с помощью динамической системы
$$\frac{du_i}{d\tau}=D^i(f), \quad f\in\mathcal{A}_F, \qquad i=0, 1, 2, \ldots, \tag{19.7}$$

порождает формальную группу преобразований Ли—Беклунда, допускаемую эволюционным уравнением (19.1). Используя отождествление эволюционного уравнения (19.1) с динамической системой (19.1′) и замечание 17.1.1, определяющее уравнение (19.6) можно трактовать как условие совместности исходного уравнения (19.1) с эволюционным уравнением
$$u_\tau=f(u, u_1, \ldots, u_n). \tag{19.7′}$$

Так как функции F и f входят в (19.6) симметрично, а коммутатор операторов Ли—Беклунда $X=F\frac{\partial}{\partial u}+\ldots$ и $Y=f\frac{\partial}{\partial u}+\ldots$ равен $[X, Y]=\{f, F\}\frac{\partial}{\partial u}+\ldots$, то условие (19.6) означает, что уравнения (19.1′) и (19.7) задают две коммутирующие друг с другом однопараметрические группы Ли—Беклунда. Содержательным обобщением этого свойства взаимности является приводимая ниже теорема о коммутативности централизатора дифференциального полинома.

Лемма 1. *Пусть функция F имееет постоянную сепаранту, т. е.*
$$F_m\equiv\partial F/\partial u_m=\text{const}. \tag{19.8}$$

Тогда все решения f порядка $n\geqslant 1$ уравнения (19.6) имеют постоянную сепаранту f_n, а для решений порядка $n=0$ это справедливо при дополнительном предположении
$$F_{m-1}=\text{const}. \tag{19.9}$$

Более того, если
$$F_{m-i}=\text{const}, \qquad i=0, 1, \ldots, k, \tag{19.10}$$

то для решений порядка n справедливо представление
$$f=\sum_{i=0}^{k+1} c_i u_{n-i}+\frac{n}{m}F_{m-k-1}u_{n-k-1}+g(u, \ldots, u_{n-k-2}),$$
$$c_i=\text{const}. \tag{19.11}$$

Доказательство. В силу условия (19.8) можно считать, что
$$F=u_m+\Phi(u, \ldots, u_l), \qquad l\leqslant m-1. \tag{19.12}$$

Для этой функции F и произвольной функции f порядка n по формуле (19.3) при $m>2$, $n>0$ получается выражение

$$\{f, F\} = -mu_{m+n-1}Df_n + \ldots, \tag{19.13}$$

где опущенные члены имеют порядок $<m+n-1$. Поэтому из уравнения (19.6) следует, что $Df_n=0$, т. е. $f_n=\mathrm{const}$. Для $f=f(u)$ выражение (19.13) заменяется на

$$\{f, F\} = -mu_{m-1}Df' + (\Phi - u_{m-1}\Phi_{m-1})f' + \ldots,$$

и из (19.6) при условии (19.9) следует, что $Df'=0$. При $m=2$ эти рассуждения проводятся с заменой (19.13) на

$$\{f, F\} = f_{nn}u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}Df_n + \ldots \tag{19.14}$$

Таким образом, любая функция $f \in \mathcal{A}_F$ порядка n с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$f = u_n + g(u, \ldots, u_{n-1}). \tag{19.15}$$

Скобка функций (19.12), (19.15) при m, $n \geqslant 3$ равна

$$\{f, F\} = -mu_{m+n-2}Dg_{n-1} + nu_{n+l-1}D\Phi_l + \ldots,$$

и при условии (19.9) уравнение (19.6) дает $g = cu_{n-1} + h(u, \ldots, u_{n-2})$, а если $l=m-1$ и $D\Phi_l \neq 0$, то

$$f = u_n + cu_{n-1} + \frac{n}{m}\Phi_l u_{n-1} + g(u, \ldots, u_{n-2}), \qquad c = \mathrm{const}. \tag{19.16}$$

Повторением этого процесса получается формула (19.11). Для меньших значений m, n доказательство проводится аналогично.

Следующая лемма показывает, что централизатор дифференциального полинома с постоянной сепарантой состоит из полиномов.

Лемма 2. *Пусть F — дифференциальный полином вида* (19.12), *удовлетворяющий условию* (19.9), *и пусть f — решение уравнения*

$$\{f, F\} = P \tag{19.17}$$

с полиномиальной правой частью. Тогда f — полином.

Доказательство. Простое доказательство, предложенное Магадеевым и Соколовым [1], использует формулу (19.13) и разрешимость в полиномах уравнения $Dg=Q$, если Q — дифференциальный полином, удовлетворяющий условию $\delta Q/\delta u=0$. Для $f=f(u)$ из формулы $\{f, F\} = -mu_{m-1}Df' + \ldots$ и из уравнения (19.17) следует, что Df' — полином, так что f' и, следовательно, f — полиномы. Пусть теперь f имеет порядок $n \geqslant 1$, и пусть утверждение леммы справедливо для функций порядка $\leqslant n-1$. Согласно формуле (19.13) (при $m=2$ используется (19.14)) из уравнения (19.17) следует полиномиальность Df_n и, значит, f_n. Поэтому $f = Q(u, \ldots, u_n) + g(u, \ldots, u_l)$, $l<n$, где Q — полином. Подстановка этого выражения в уравнение (19.17) приводит

к уравнению вида (19.17) для функции g порядка $l \leqslant n-1$. По предположению индукции отсюда следует, что g — полином.

В дополнение к леммам, доказанным выше, предположим, что элементы алгебры $\mathcal{A}_F$ не имеют постоянных слагаемых; этого легко добиться соответствующей факторизацией. При указанных условиях теорема о коммутативности алгебры для уравнения Кортевега — де Фриза (Gardner [1], см. также Богоявленский, Новиков [2], Гельфанд, Дикий [2]) переносится на общие эволюционные уравнения (19.1) с полиномиальной правой частью (Ибрагимов, Шабат [2]).

Теорема. *Пусть F — дифференциальный полином порядка $m \geqslant 2$ с постоянной сепарантой F_m, удовлетворяющий дополнительному условию $F_{m-1} = \mathrm{const}$. Тогда его централизатор $\mathcal{A}_F$ коммутативен.*

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathcal{A}_F$; согласно лемме 2 они являются полиномами, а их коммутатор $\{f, g\}$ представляет собой дифференциальный полином, не содержащий линейных членов. Последнее обстоятельство не противоречит лемме 1 только в том случае, когда $\{f, g\} = 0$.

Следствие. *Пусть уравнение* (19.1) *имеет нетривиальную алгебру Ли — Беклунда $\mathcal{A}_F$ и пусть F удовлетворяет условиям теоремы. Тогда для каждой функции $f \in \mathcal{A}_F$ уравнение* (19.7′) *также имеет нетривиальную алгебру, причем $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_F$.*

Это утверждение позволяет перейти от конкретного уравнения (19.1) с нетривиальной алгеброй к рассмотрению всей серии эволюционных уравнений (19.7′). В этих сериях выбираются представители минимального порядка >1, и их групповая классификация решает задачу перечисления серий эволюционных уравнений с нетривиальной алгеброй Ли — Беклунда.

С помощью формулы (19.13) можно дальше уточнять вид (19.11) элементов из $\mathcal{A}_F$. Следующие примеры поясняют сказанное.

Пример 1. Пусть $F = u_3 + \Phi(u, u_1)$. По формулам (19.11), (19.13) находится следующее выражение для решения порядка 5 уравнения (19.6):

$$f = u_5 + \frac{5}{3}\Phi_1 u_3 + \frac{5}{3}\Phi_0 u_2 + \frac{5}{6}\Phi_{11} u_2^2 + \frac{5}{3}\Phi_{01} u_1 u_2 + \\ + c_1\left(u_4 + \frac{4}{3}\Phi_1 u_2\right) + c_2 u_2 + g(u, u_1). \qquad (19.18)$$

Пример 2. С помощью описанной процедуры можно убедиться, что централизатор функции $F = u_4 + \frac{1}{4} u_1^4$ не содержит элементов порядков 5, 6 и 7. Действительно, для этих значений n по формуле (19.11) находятся

$$\overset{(5)}{f} = u_5 + \frac{5}{4} u_1^3 u_2 + c_1 u_3 + c_2 u_2 + g(u, u_1),$$

$$\overset{(6)}{f}=u_6+\frac{3}{2}u_1^3u_3+\frac{9}{4}u_1^2u_2^2+c_3\overset{(5)}{f}+\tilde{g}(u,\ u_1),$$
$$\overset{(7)}{f}=u_7+\frac{7}{4}u_1^3u_4+\frac{63}{8}u_1^2u_2u_3+c_4\overset{(6)}{f}+c_5\overset{(5)}{f}+h(u,\ u_1,\ u_2).$$

Здесь $c_i=\mathrm{const}$, а функции $g(u,\ u_1)$ и $h(u,\ u_1,\ u_2)$ нужно найти из определяющего уравнения. Для этих функций формула (19.13) дает

$$\{g,\ F\}=-4u_4Dg_1+\ldots,\quad \{h,\ F\}=-4u_5Dh_2+\ldots$$

Поэтому

$$\left\{\overset{(5)}{f},\ F\right\}=-\frac{15}{2}u_4D\,(u_1^2u_2)-4u_4Dg_1+\ldots,$$
$$\left\{\overset{(6)}{f},\ F\right\}=-\frac{3}{2}u_1^2u_4^2-4u_4D\tilde{g}_1+\ldots,$$
$$\left\{\overset{(7)}{f},\ F\right\}=u_5D\left(\frac{21}{4}u_1^2u_3+\frac{147}{2}u_1u_2^2-4h_2\right)+\ldots$$

В силу первой из этих формул определяющее уравнение (19.6) принимает вид следующего противоречивого равенства:

$$g_1(u,\ u_1)+\frac{15}{8}u_1^2u_2=\mathrm{const}.$$

Точно так же убеждаемся в отсутствии решений при $n=6,\ 7$.

Вернемся теперь к изучению централизатора произвольной функции F порядка $m\geqslant 2$, уделяя при этом особое внимание таким бесконечным алгебрам $\mathcal{A}_F$, которые содержат элементы произвольно большого порядка. Для анализа определяющего уравнения (19.6) запишем выражения для производных вида D^kf в удобной для нас форме.

19.2. Формула Фаа де Бруно. Высшие производные $D^kf(u, v,\ldots)$ функции f дифференциальных переменных $u,\ v,\ldots$ выражаются через $u_j=D^ju,\ v_j=D^jv,\ldots$ известной формулой Faà de Bruno [1]. Эта формула эквивалентна выражению оператора D^k через коммутирующие дифференциальные операторы

$$d_j=\frac{1}{j!}\left(u_j\frac{\partial}{\partial u}+v_j\frac{\partial}{\partial v}+\ldots\right),\tag{19.19}$$

которые действуют на функции конечного числа переменных u, $v,\ldots$ и переводят их в функции переменных $u,\ u_j,\ v,\ v_j,\ldots$ Для вывода формулы Фаа де Бруно достаточно заметить, что d_1 совпадает с D:

$$d_1=u_1\frac{\partial}{\partial u}+v_1\frac{\partial}{\partial v}+\ldots=D,$$

а при $j>1$ выполняется соотношение

$$jd_j=Dd_{j-1}-d_{j-1}d_1.$$

Отсюда следует равенство

$$D^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} d^\alpha, \quad d^\alpha = d_1^{\alpha_1} \dots d_k^{\alpha_k}, \tag{19.20}$$

эквивалентное формуле Фаа де Бруно (ср. Гурса [2], стр. 77). В формуле (19.20) норма мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ равна

$$|\alpha| = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k.$$

При анализе определяющего уравнения (19.6) используется линейная по старшим производным часть формулы Фаа де Бруно. Выделим эту главную линейную часть. Пусть l — «длина» мультииндекса α, т. е. номер его последней отличной от нуля компоненты α_l. Если $l > \left[\frac{k}{2}\right]$, то из равенства $|\alpha| = k$ следует, что $\alpha_l = 1$. Поэтому

$$D^k = \sum_{l=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} d_l \sum_{|\alpha'|=k-l} \frac{k!}{\alpha!} d_1^{\alpha_1} \dots d_{l-1}^{\alpha_{l-1}} + \dots, \quad \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}),$$

где опущенные члены зависят только от $u_i, v_i, \dots$ с $i \leqslant \left[\frac{k}{2}\right]$ — целой части $\frac{k}{2}$. Так как в этом равенстве в соответствии с (19.20) внутренняя сумма равна $\frac{k!}{(k-l)!} D^{k-l}$, то отсюда получается следующее выражение для главной линейной части формулы Фаа де Бруно:

$$D^k = \sum_{l=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} \frac{k!}{(k-l)!} d_l D^{k-l} + \dots,$$

или

$$D^k f(u, v, \dots) = \sum_{l=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} \binom{k}{k-l} \left(u_l D^{k-l} \frac{\partial f}{\partial u} + v_l D^{k-l} \frac{\partial f}{\partial v} + \dots \right) + \dots$$

Подстановкой $v = u_1, \dots$ получается главная линейная часть для $D^k f(u, u_1, \dots, u_n)$, которую удобно записать в виде

$$D^k f(u, \dots, u_n) = \widehat{D^k f_*} u \left(\operatorname{mod} u_{\left[\frac{k}{2}\right]+n} \right). \tag{19.21}$$

Здесь

$$D^k f_* = \sum_{p=0}^{n+k} a_p D^p, \qquad a_p \in \mathcal{A},$$

разложение обычного произведения дифференциальных операторов D^k и f_*, а

$$\widehat{D^k f_*} = \sum_{p=\left[\frac{k}{2}\right]+n+1}^{n+k} a_p D^p;$$

выражение $\operatorname{mod} u_p$ означает, что соответствующее равенство верно с точностью до слагаемых, содержащих производные u_i порядка $\leqslant p$.

Пример. Для функции $f(u, u_1)$ формула (19.21) дает

$$D^3 f(u, u_1) = \widehat{D^3 f_*} u \ (\operatorname{mod} u_2).$$

Так как в данном случае $\widehat{D^3 f_*} = f_1 D^4 + (3Df_1 + f_0) D^3$, то окончательно

$$D^3 f(u, u_1) = f_1 u_4 + (3Df_1 + f_0) u_3 \ (\operatorname{mod} u_2).$$

19.3. Алгебра $\mathscr{L}_F$. Рассматривается ассоциативная алгебра $\mathscr{L}$ формальных операторов

$$L = \sum_{i=-\infty}^{n} a_i D^i, \qquad a_i \in \mathcal{A}. \tag{19.22}$$

Целое число n называется *порядком* оператора (19.22). Умножение в $\mathscr{L}$ определяется правилом Лейбница и формулой

$$D^{-1} a = a D^{-1} - (Da) D^{-2} + (D^2 a) D^{-3} - \ldots$$

Функции $F \in \mathcal{A}$ ставится в соответствие подалгебра $\mathscr{L}_F \subset \mathscr{L}$ как множество решений уравнения

$$L_t = F_* L - L F_*, \tag{19.23}$$

где L_t получается дифференцированием (19.4) коэффициентов оператора L. Значение алгебры $\mathscr{L}_F$ определяется теоремой о разрешимости уравнения (19.23) для функций F с бесконечным централизатором, причем операторное уравнение (19.23) позволяет выписать в явном виде ряд необходимых условий разрешимости определяющего уравнения (19.6) и поэтому дает конструктивный метод классификации эволюционных уравнений с нетривиальной алгеброй (Ибрагимов, Шабат [3, 4]). Если в $\mathscr{L}_F$ содержатся операторы, рационально зависящие от D (т. е. являющиеся отношением дифференциальных операторов, см., например, формулы (18.23), (18.41)), то рациональные операторы $L \in \mathscr{L}_F$ служат для рекуррентного построения алгебры $\mathcal{A}_F$, а соотношение (19.23) задает представление Лакса уравнения (19.1).

Следующая лемма утверждает, что алгебра $\mathscr{L}_F$ порождена дробными степенями одного из своих элементов (Гельфанд, Дикий [3], Mumford [1], Манин [1]; см. также Wilson [1]).

Лемма. 1. *Пусть алгебра* $\mathscr{L}_F$ *содержит оператор* M *порядка* $r \neq 0$. *Тогда* $M^{1/r} \in \mathscr{L}_F$ *и* *) $\mathscr{L}_F = \mathbb{C}[[M^{1/r}]]$.

Доказательство. Из уравнения $L_1^r = M$ однозначно (с точностью до корней из единицы) находится оператор первого порядка L_1. Подстановка в (19.23) оператора $M = L_1^r$ (пусть $r = 2$) дает

$$QL_1 + L_1 Q = 0, \tag{19.24}$$

где $Q = (L_1)_t - [F_*, L_1]$. Из (19.24) вытекает (достаточно проследить за старшими членами левой части (19.24)), что $M = 0$, т. е. $L_1 = M^{1/r} \in \mathscr{L}_F$. Поэтому $L_1^k \in \mathscr{L}_F$ при любом целом k и, следовательно, формальный ряд

$$L = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k M^{k/r}, \qquad c_k = \mathrm{const}, \tag{19.25}$$

с комплексными коэффициентами c_k удовлетворяет уравнению (19.23), т. е. $\mathbb{C}[[M^{1/r}]] \subset \mathscr{L}_F$. Обратное включение следует из того, что порядок n оператора $L \in \mathscr{L}_F$ можно понизить, переходя к оператору $L - cL_1^n$ с подходящей постоянной c. Действительно, подстановка оператора (19.22) в уравнение (19.23) дает

$$\left[\frac{d}{dt} - F_*,\ L\right] = (na_n DF_m - mF_m Da_n)\, D^{m+n-1} + \ldots = 0, \tag{19.26}$$

поэтому старший коэффициент a_n оператора $L \in \mathscr{L}_F$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя:

$$a_n = \mathrm{const} \cdot (F_m)^{n/m}. \tag{19.27}$$

Индукция завершает доказательство леммы.

Из уравнения (19.26), приравнивая нулю следующие коэффициенты, можно получить цепочку уравнений для последовательного определения коэффициентов операторов $L \in \mathscr{L}_F$. Изучение нетривиальной алгебры $\mathscr{L}_F$ сводится к исследованию разрешимости в $\mathscr{A}$ этой цепочки уравнений. При этом удобно рассматривать приближенные решения уравнения (19.23). Пусть L_0 — оператор порядка n из алгебры $\mathscr{L}_F$ и $p > 0$ — целое число. Любой оператор $L \in \mathscr{L}$ порядка n, первые p коэффициентов которого совпадают с соответствующими коэффициентами оператора L_0 (это условие будет записываться $L = L_0 \,(\mathrm{mod}\, D^{n-p})$), удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d}{dt} - F_*,\ L\right] = 0 \quad (\mathrm{mod}\, D^{m+n-p-1}). \tag{19.28}$$

Рассмотрим множество решений этого уравнения при фиксированном p. Решения L, L' уравнения (19.28) порядка n называются *эквивалентными*, если $L' = L\,(\mathrm{mod}\, D^{n-p})$, а соответствующий

*) Здесь существенно, что коэффициенты операторов (19.22) не зависят от t.

класс эквивалентности — *p-решением порядка n уравнения* (19.23). Произведение любых двух p-решений (порядков n_1 и n_2) снова является p-решением (порядка n_1+n_2). Для p-решения L порядка $n\neq 0$ оператор $L^{1/n}$ является p-решением первого порядка, а L^{-1} — p-решением порядка $-n$. На приближенные решения переносится также формула (19.25): любое p-решение L порядка n допускает представление

$$L=\sum_{k=0}^{p-1} c_{n-k}L_1^{n-k} (\operatorname{mod} D^{n-p}), \tag{19.29}$$

где L_1 — произвольное p-решение первого порядка.

Лемма 2. *Нетривиальная алгебра $\mathscr{L}_F$ содержит оператор порядка m вида*

$$L=F_*+\alpha D+\beta+\gamma D^{-1}+\delta D^{-2}+\ldots \tag{19.30}$$

Доказательство. Оператор F_* является p-решением с $p=m-1$. Поэтому его можно представить в виде (19.29), взяв в качестве L_1 оператор первого порядка из $\mathscr{L}_F$; такой выбор L_1 возможен в силу леммы 1. Из полученного представления для F_*:

$$F_*=c_mL_1^m+\ldots+c_2L_1^2 (\operatorname{mod} D),$$

видно, что оператор $L=c_mL_1^m+\ldots+c_2L_1^2$, принадлежащий алгебре $\mathscr{L}_F$, удовлетворяет условию (19.30).

Лемма. 3. *Пусть для каждого $p\geqslant 1$ существует p-решение порядка $n=n(p)\neq 0$ уравнения* (19.23). *Тогда алгебра $\mathscr{L}_F$ нетривиальна.*

Доказательство. Для оператора (19.22) из $\mathscr{L}_F$ оператор

$$L_k=a_nD^n+\ldots+a_{n-k+1}D^{n-k+1}$$

при любом $k\geqslant 1$ является k-решением, и поэтому

$$\left[\frac{d}{dt}-F_*,\ L_k\right]+\psi_kD^{m+n-k-1}=0 (\operatorname{mod} D^{m+n-k-2}). \tag{19.31}$$

Коэффициент ψ_k в (19.31) является функцией от $a_n, \ldots, a_{n-k+1}$ и их производных. Если теперь в соотношении (19.26) заменить L на $L-L_k$, то для определения следующего коэффициента a_{n-k} оператора L получится следующее уравнение:

$$mF_mDa_{n-k}-(n-k)\,a_{n-k}DF_m=\psi_k. \tag{19.32}$$

Отсюда с учетом (19.27) и (19.31) следует, что

$$a_{n-k}=a_{n-k}(u,\ u_1, \ldots, u_{m+k}), \qquad k=0,\ 1, \ldots \tag{19.33}$$

Уравнение (19.28) для p-решения L эквивалентно системе уравнений (19.32) с $k=0,\ 1, \ldots, p-1$. Эта система из p уравнений с учетом определения оператора D и условий (19.33) записывается в виде обычной переопределенной системы дифференциальных уравнений. Для этого к каждому из уравнений (19.32) следует добавить уравнения

$$\frac{\partial a_{n-k}}{\partial u_i}=0, \qquad i=m+k+1,\ m+k+2, \ldots$$

При фиксированном значении n разрешимость этой переопределенной системы зависит только от функции F. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что из существования p-решения L порядка n следует существование p-решения любого порядка s: им является $L^{s/n}$. Поэтому условия совместности полученной переопределенной системы уравнений при разных значениях n эквивалентны.

Замечание. Так как F_* является p-решением с $p=m-1$, как уже отмечалось при доказательстве леммы 2, то условия разрешимости первых $m-1$ уравнений (19.32) выполнены для любой функции F. Первое нетривиальное условие соответствует уравнению (19.32) с $k=m-1$. Подстановка (19.30) в (19.28) дает равенство

$$mF_m D\alpha-\alpha DF_m=\frac{dF_m}{dt}, \tag{19.34}$$

которое можно переписать в виде

$$D(\alpha F_m^{-1/m})=-\frac{dF_m^{-1/m}}{dt}.$$

Отсюда получается следующее условие существования m-решения уравнения (19.23):

$$\frac{dF_m^{-1/m}}{dt}\in D(\mathcal{A}), \quad \text{или} \quad \frac{\delta}{\delta u}\frac{dF_m^{-1/m}}{dt}=0. \tag{19.35}$$

При выполнении этого условия из уравнения (19.34) находится первый коэффициент α оператора (19.30). Следующий коэффициент этого оператора при $m\geqslant 3$ (случай $m=2$ подробно обсуждается в § 20.1) определяется уравнением

$$D\left(m\beta+\binom{m}{2}D\alpha-\alpha F_m^{-1}F_{m-1}\right)=\frac{d}{dt}(F_m^{-1}F_{m-1}). \tag{19.36}$$

Поэтому для существования $(m+1)$-решения уравнения (19.23) необходимо и достаточно, чтобы кроме (19.35) выполнялось условие *)

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d}{dt}(F_m^{-1}F_{m-1})=0. \tag{19.37}$$

*) Алгебраическое доказательство равенства $D(\mathcal{A})=\operatorname{Ker}\frac{\delta}{\delta u}$, использованного в (19.35), (19.37), см. Гельфанд, Дикий [1].

Согласно лемме 3 уравнения (19.35), (19.37) представляют собой первые два необходимых условия нетривиальности алгебры $\mathscr{L}_F$. Дополняя их условиями существования p-решений для $p=m+2$, $m+3, \ldots,$ можно получить следующие необходимые условия нетривиальности $\mathscr{L}_F$, которые, как сейчас будет показано, являются также необходимыми условиями нетривиальности алгебры Ли — Беклунда $\mathcal{A}_F$ для уравнения (19.1).

Ниже рассматриваются такие бесконечные алгебры $\mathcal{A}_F$, которые содержат элементы произвольно большого порядка. Для них справедлива следующая теорема (Ибрагимов, Шабат [4]).

Теорема. *Для уравнения* (19.1) *с бесконечной алгеброй Ли — Беклунда $\mathcal{A}_F$ алгебра $\mathscr{L}_F$ нетривиальна и задает* (*формула* (19.41)) *главную линейную часть алгебры $\mathcal{A}_F$.*

Доказательство. Для функций $F=F(u, u_1, \ldots, u_m)$ и $f=f(u, u_1, \ldots, u_n)$ старший член скобки (19.5) при $m, n>2$ равен

$$\{f, F\}=(nf_nDF_m-mF_mDf_n)\,u_{n+m-1}+\ldots \tag{19.38}$$

Поэтому решение f уравнения (19.6) удовлетворяет условию

$$nf_nDF_m-mF_mDf_n\equiv f_nF_mD\ln(f_n^mF_m^{-n})=0,$$

и следовательно,

$$f_n=\mathrm{const}\,(F_m)^{n/m}. \tag{19.39}$$

В случае $m=2$ (пусть $n>2$) вместо (19.38) имеем

$$\{f, F\}=f_{nn}u_{n+1}^2+(nf_nDF_2-2F_2Df_n)u_{n+1}+\ldots, \tag{19.38$'$}$$

откуда снова получается формула (19.39) для решения f. Для определения производных $f_{n-k}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial u_{n-k}}$, $k=1, 2, \ldots,$ из (19.6) находятся уравнения вида (19.32) (с заменой a_{n-k} на f_{n-k}), которые дают

$$f_{n-k}=f_{n-k}(u, u_1, \ldots, u_{m+k}), \qquad k=0, 1, \ldots, n-l. \tag{19.40}$$

Формулы (19.40) справедливы для $l\geqslant\left[\dfrac{m+n}{2}\right]+1$.

При любом фиксированном p элемент $f\in\mathcal{A}_F$ достаточно большого порядка n в силу условий (19.40) представляется в виде

$$f=Lu+g(u, \ldots, u_{n-p}), \tag{19.41}$$

где

$$L=\sum_{k=0}^{p-1}a_{n-k}D^{n-k}, \qquad a_{n-k}=f_{n-k}. \tag{19.42}$$

Дифференцирование функции (19.41) по t и использование формулы (19.21) дают

$$\frac{df}{dt}=L_t(u)+L(F)+\frac{dg}{dt}=\frac{dg}{dt}+(L_t+LF_*)\,u\ (\mathrm{mod}\,u_{m+n-p-1}).$$

Отсюда с учетом равенств $F_*f=F_*Lu+F_*g$, $\frac{df}{dt}=F_*f$ следует, что

$$\left(\frac{d}{dt}-F_*\right)f=\left(\frac{d}{dt}-F_*\right)g+(L_t-[F_*,\ L])\,u\ (\operatorname{mod} u_{m+n-p-1}). \qquad (19.43)$$

Левая часть (19.43) равна нулю в силу определяющего уравнения (19.5), а первое слагаемое в правой части зависит только от переменных $u,\ u_1,\ \ldots,\ u_{m+n-p-1}$. Следовательно, оператор (19.42) удовлетворяет соотношению (19.28). Так как число p может быть выбрано произвольно ввиду бесконечности алгебры $\mathcal{A}_F$, лемма 3 завершает доказательство теоремы.

Замечание. Если алгебра $\mathcal{A}_F$ содержит элемент порядка $n>m$, то в силу формул (19.40)—(19.43) уравнение (19.23) имеет p-решение с $p=\left[\frac{n-m+1}{2}\right]$. Поэтому для нетривиальности алгебры $\mathcal{A}_F$ необходимо выполнение указанных в замечании к лемме 3 условий существования p-решений.

19.4. Преобразования эквивалентности. Рассматриваются преобразования Ли—Беклунда в $\mathcal{A}$, определяемые заменой переменных $(x,\ u)\mapsto(y,\ v)$ вида

$$y=\varphi(x,\ u,\ u_1,\ \ldots,u_n),\quad v=\Phi(x,\ u,\ u_1,\ \ldots,\ u_n); \qquad (19.44)$$

при этом осуществляются замены

$$D_x\mapsto D_y,\quad u_i\mapsto v_i,\quad u_t\mapsto v_t,\ f\mapsto\tilde{f}$$

по формулам

$$D_x=D_x(\varphi)\,D_y, \qquad (19.44a)$$

$$D_x(\Phi)=v_1D_x(\varphi)),\qquad v_{i+1}=D_y(v_i), \qquad (19.44b)$$

$$\frac{d\Phi}{dt}=v_t+v_1\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (19.44c)$$

$$D_x(\varphi)\tilde{f}=(D_x(\varphi)\,\Phi_*-D_x(\Phi)\,\varphi_*)\,f,\qquad f\in\mathcal{A}. \qquad (19.44d)$$

Определение. Эволюционное уравнение

$$v_t=H(y,\ v,\ v_1,\ \ldots,\ v_m) \qquad (19.45)$$

эквивалентно (19.1), если существует преобразование (19.44) динамической системы (19.1′) в (19.45).

Замечание 1. При отображении (19.1)$\mapsto$(19.45) дифференцирование $\frac{d}{dt}$ в формуле (19.44c) осуществляется с помощью оператора (19.4).

Замечание 2. Обратное к (19.44) преобразование $(y,\ v)\mapsto$ $\mapsto(x,\ u)$ уравнения (19.45) в (19.1) является в общем случае преобразованием Беклунда в $\mathcal{A}$.

Теорема. *Если уравнения* (19.1) *и* (19.45) *с бесконечной алгеброй Ли—Беклунда эквивалентны, то алгебры* $\mathcal{L}_F$ *и* $\mathcal{L}_H$ *подоб-*

ны. Подобие этих алгебр задается соотношением

$$\tilde{L}(\Phi_*-v_1\varphi_*)=(\Phi_*-v_1\varphi_*)L, \tag{19.46}$$

где $L\in\mathscr{L}_F$, $\tilde{L}\in\mathscr{L}_H$, *а* $v_1=D_x(\Phi)/D_x(\varphi)$.

Доказательство. Используется инвариантность уравнения Лакса $L_t=[A, L]$ относительно преобразования $\tilde{A}=MAM^{-1}+M_tM^{-1}$, $\tilde{L}=MLM^{-1}$ с произвольным $M\in\mathscr{L}$. Действительно,

$$\tilde{L}_t-[\tilde{A}, \tilde{L}]=M(L_t-[A, L])M^{-1}.$$

Пример 1. Для уравнения теплопроводности (18.1) алгебра $\mathscr{L}_F$ состоит из формальных степенных рядов от двух дифференциальных операторов первого порядка L_1, L_2 (формулы (18.12)) с постоянными коэффициентами. Из этой алгебры по формуле (19.46) получается алгебра $\mathscr{L}_F$ для уравнения Бюргерса (см. § 18.1). Для уравнения

$$v_t=v_2+\frac{2}{y}v_1 \tag{19.47}$$

подстановкой (18.11) в соотношение (19.23) находятся операторы

$$L_1=D_y+\frac{1}{y},\quad L_2=2tL_1+y.$$

Будем искать преобразование эквивалентности, заданное точечной заменой переменных $y=\varphi(x, u)$, $v=\Phi(x, u)$, при помощи операторного равенства (19.46) с $L=D_x$ и $\tilde{L}=D_y+\frac{1}{y}$. Это равенство с учетом формулы (19.44а) может быть записано в виде

$$\left(D_x+\frac{1}{\varphi}D_x(\varphi)\right)\frac{\varphi_x\Phi_u-\varphi_u\Phi_x}{D_x(\varphi)}=(\varphi_x\Phi_u-\varphi_u\Phi_x)D_x, \tag{19.48}$$

где $\varphi_x\Phi_u-\varphi_u\Phi_x\neq 0$, так как φ и Φ предполагаются функционально независимыми. Равенство коэффициентов при D_x достигается при $D_x(\varphi)=1$, и с учетом этого условия (19.48) дает $\Phi_u+xD_x(\Phi_u)=0$, откуда $\Phi=\frac{u}{x}$. Следовательно, замена переменных, сводящая (19.47) к уравнению теплопроводности (18.1), имеет вид $y=x$, $v=\frac{u}{x}$.

Пример 2. Найдем преобразование эквивалентности (19.44) с $y=x$ для уравнений

$$u_t=u_3+u^2u_1, \tag{19.49}$$

и

$$v_t=v_3+vv_1 \tag{19.49'}$$

с алгебрами $\mathscr{L}_P$ и $\mathscr{L}_H$, порожденными операторами

$$L = D^2 + \frac{2}{3} u^2 + \frac{2}{3} u_1 D^{-1} u \tag{19.50}$$

и

$$\tilde{L} = D^2 + \frac{2}{3} v + \frac{1}{3} v_1 D^{-1} \tag{19.50$'$}$$

соответственно. Подстановка этих операторов L, $\tilde{L}$ и $\varphi_* = 0$ в равенство (19.46) дает условия $\Phi_i = 0$ при $i = 2, \ldots, n$ и уравнения

$$D(\Phi_1) = 0, \qquad 2D(\Phi_0) + \frac{2}{3} \Phi\Phi_1 = \frac{2}{3} u^2 \Phi_1$$

для функции $\Phi = \Phi(x, u, u_1)$. Отсюда легко находится преобразование Миуры (ср. замечание 2 с интерпретацией этого преобразования в примере 10 из § 14.4):

$$v = u^2 + \varepsilon\sqrt{6}\, u_1, \qquad \varepsilon = \pm i. \tag{19.51}$$

Пример 3. Для преобразования эволюционных уравнений, правые части которых имеют переменную сепаранту, замена переменной x существенна. Это необходимо, в частности, когда одно из преобразуемых уравнений имеет постоянную, а другое из них переменную сепаранту. Рассмотрим, например, уравнение

$$v_t = v_1^{-2} v_2, \quad v = v(t, y). \tag{19.52}$$

Для него легко находится решение $\tilde{L} = D_y \cdot v_1^{-1}$ уравнения (19.23). С этим оператором $\tilde{L}$ и с $L = D_x$, $\varphi = \varphi(x, u)$, $\Phi = \Phi(x, u)$ соотношение (19.46) имеет вид

$$D_x \cdot \frac{\varphi_x \Phi_u - \varphi_u \Phi_x}{D_x(\Phi)} = (\varphi_x \Phi_u - \varphi_u \Phi_x) D_x.$$

Сравнением коэффициентов при D_x отсюда получается условие $D_x(\Phi) = 1$, с учетом которого оставшееся уравнение дает $D_x(\varphi_u) = 0$. Следовательно, уравнение (19.52) эквивалентно уравнению теплопроводности (18.1) и получается из него точечным преобразованием

$$y = u, \qquad v = x.$$

Замечание 3. Определение эквивалентности эволюционных уравнений можно обобщить, рассматривая вместо (19.44) преобразование

$$y = \varphi(t, x, u, \ldots, u_n), \quad s = \psi(t, x, u, \ldots, u_n),$$
$$v = \Phi(t, x, u, \ldots, u_n). \tag{19.53}$$

В этом случае вместо (19.44a)—(19.44d), (19.46) используются следующие формулы:

$$D_x = D_x(\varphi) D_y + D_x(\psi) D_s, \qquad D_t = D_t(\varphi) D_y + D_t(\psi) D_s,$$
$$D_x(\Phi) = v_1 D_x(\varphi) + v_s D_x(\psi), \qquad v_{i+1} = D_y(v_i),$$
$$D_t(\Phi) = v_1 D_t(\varphi) + v_s D_t(\psi),$$
$$\tilde{f} = (\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) f, \qquad f \in \mathcal{A},$$
$$\tilde{L}(\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) = (\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) L.$$

В следующем параграфе подробно рассматриваются случаи $m=2$ и 3 для иллюстрации описанного выше метода групповой классификации.

§ 20. Анализ эволюционных уравнений второго и третьего порядка

20.1. $m=2$**.** В соответствии с теоремой 19.3 и леммой 19.3.2 для групповой классификации уравнений

$$u_t = F(u, u_1, u_2) \tag{20.1}$$

используется соотношение (19.23) с оператором

$$L = F_* + \alpha D + \beta + \gamma D^{-1} + \ldots, \tag{20.2}$$

коэффициенты α, β, γ, ... которого принадлежат $\mathcal{A}$ и могут зависеть от t, x. Так как в данном случае

$$L_t - [F_*, L] = \left(\frac{dF_2}{dt} - 2F_2 D\alpha + \alpha DF_2\right) D^2 + \\ + \left(\frac{d(F_1+\alpha)}{dt} - F_2 D^2\alpha - 2F_2 D\beta - F_1 D\alpha + \alpha DF_1\right) D + \\ + \left(\frac{d(F_0+\beta)}{dt} - F_2 D^2\beta - 2F_2 D\gamma - F_1 D\beta + \alpha DF_0 - \gamma DF_2\right) + \ldots,$$

равенство (19.23) приводит к уравнениям

$$\frac{dF_2}{dt} - 2F_2 D\alpha + \alpha DF_2 = 0, \tag{20.3}$$

$$\frac{d(F_1+\alpha)}{dt} - F_2 D^2\alpha - 2F_2 D\beta - F_1 D\alpha + \alpha DF_1 = 0, \tag{20.4}$$

$$\frac{d(F_0+\beta)}{dt} - F_2 D^2\beta - 2F_2 D\gamma - F_1 D\beta + \alpha DF_0 - \gamma DF_2 = 0 \tag{20.5}$$

между функцией F и коэффициентами α, β, γ.

Условие разрешимости уравнения (20.3) (см. (19.35)),

$$\frac{\delta}{\delta u} \frac{dF_2^{-1/2}}{dt} = 0, \tag{20.6}$$