ГЛАВА 5

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 22. Основные теоремы

22.1. Тождество Нётер. Пусть $\mathcal{A}$ — пространство дифференциальных функций от n независимых переменных x^i и m дифференциальных переменных u^α, т. е. функций вида (см. § 19.1 и § 17.1) $f\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}\right)$, $s < \infty$. Рассмотрим следующие линейные операторы, действующие в пространстве $\mathcal{A}$:

оператор Ли — Беклунда

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geqslant 1} \zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}}, \tag{22.1}$$

координаты ξ^i, η^α которого являются произвольными функциями из $\mathcal{A}$, а координаты $\zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_s}$ определяются формулами (16.11); операторы Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geqslant 1} (-1)^s D_{i_1} \ldots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}}; \tag{22.2}$$

операторы Нётер

$$\begin{aligned} N^i = \xi^i + (\eta^\alpha - \xi^l u^\alpha_l)\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha_i} + \sum_{s \geqslant 1} (-1)^s D_{j_1} \ldots D_{j_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ij_1 \ldots j_s}}\right) + \\ + \sum_{r \geqslant 1} D_{k_1} \ldots D_{k_r} (\eta^\alpha - \xi^l u^\alpha_l) \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ik_1 \ldots k_r}} + \right. \\ \left. + \sum_{s \geqslant 1} (-1)^s D_{j_1} \ldots D_{j_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ik_1 \ldots k_r j_1 \ldots j_s}}\right), \end{aligned} \tag{22.3}$$

где функции ξ^i и η^α совпадают с соответствующими координатами оператора (22.1).

Теорема (Noether [1], Ибрагимов [15]). *Справедливо равенство*

$$X + D_i(\xi^i) = (\eta^\alpha - \xi^j u^\alpha_j) \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + D_i N^i. \tag{22.4}$$

Доказательство. Используется формула продолжения (16.11).

Операторное равенство (22.4) называется *тождеством Нётер*; оно лежит в основе теорем о законах сохранения.

22.2. Теорема Нётер. В работах Якоби, Клейна, Нётер было установлено, что законы сохранения для дифференциальных уравнений, получающихся из вариационного принципа, связаны с инвариантностью вариационной задачи. Якоби [1] ввел в обиход классической механики вывод законов сохранения на основе симметрии. Klein [1, 2] анализировал с этой точки зрения уравнения общей теории относительности и подчеркивал важность изучения теоретико-групповой природы законов сохранения для произвольных дифференциальных уравнений. Объединив методы формального вариационного исчисления и теории групп Ли, Noether [1] указала общий алгоритм построения законов сохранения для уравнений Эйлера—Лагранжа при условии инвариантности интеграла (действия)

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{L}\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots\right) dx \tag{22.5}$$

для всех допустимых функций $u = u(x)$ и любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Доказательство теоремы Нётер упрощается, если вместо интеграла (22.5) ввести в рассмотрение дифференциальную функцию (элементарное действие) $\mathscr{L}\left(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots\right) dx$.

Рассматриваются дифференциальное уравнение (17.1) и определяемое им дифференциальное многообразие $[F]$, т. е. бесконечномерное многообразие, заданное системой уравнений (17.2). Под законом сохранения для уравнения (17.1) понимается соотношение

$$D_i(C^i) = 0, \tag{22.6}$$

где $C^i \in \mathcal{A}$, а само равенство (22.6) должно выполняться на многообразии $[F]$. Если G—группа преобразований (16.5), то ее действие на элемент объема dx задается формулой $dx' = \det(D_i x'^k)\,dx$, откуда $\frac{\partial}{\partial a} dx'\Big|_{a=0} = D_i(\xi^i)\,dx$. Поэтому инфинитезимальный оператор (22.1) группы G, продолженный на дополнительную независимую переменную dx, имеет вид

$$\tilde{X} = X + D_i(\xi^i)\,dx \frac{\partial}{\partial\,dx}. \tag{22.7}$$

Теорема. *Пусть* $\mathscr{L} \in \mathcal{A}$, *и пусть элементарное действие*

$$\mathscr{L}\,dx \tag{22.8}$$

инвариантно относительно группы Ли—Беклунда с оператором (22.7). *Тогда функции*

$$C^i = N^i(\mathscr{L}), \qquad i = 1,\ \ldots,\ n, \tag{22.9}$$

удовлетворяют закону сохранения (22.6) *для уравнений Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u^{\alpha}}=0, \qquad \alpha=1, \ldots, m. \tag{22.10}$$

Доказательство. По теореме 15.2.1 условие инвариантности функции (22.8) имеет вид $\tilde{X}(\mathscr{L}\,dx)=0$, т. е.

$$X(\mathscr{L})+\mathscr{L}D_i(\xi^i)=0. \tag{22.11}$$

С помощью тождества Нётер это условие переписывается в виде

$$(\eta^{\alpha}-\xi^j u_j^{\alpha})\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u^{\alpha}}+D_i N^i(\mathscr{L})=0, \tag{22.12}$$

откуда следует утверждение теоремы.

Замечание. Согласно тождеству Нётер законы сохранения получаются также тогда, когда условие инвариантности (22.11) заменяется соотношением

$$X(\mathscr{L})+\mathscr{L}D_i(\xi^i)=D_i(B^i) \tag{22.13}$$

с некоторыми $B^i \in \mathcal{A}$. В этом случае закон сохранения будет выполняться с функциями $C'^i=C^i-B^i$, где по-прежнему $C^i=N^i(\mathscr{L})$.

22.3. Инвариантность на экстремалях. Теорема 22.2 дает достаточное условие, при котором операторы Нётер переводят лагранжиан $\mathscr{L}$ в закон сохранения. Таким условием является инвариантность элементарного действия, или интеграла (22.5). Следующая теорема утверждает, что необходимым и достаточным условием является инвариантность экстремальных значений интеграла (22.5) (Ибрагимов [8], см. также Candotti, Palmieri & Vitale [1]).

Теорема. *Пусть уравнения Эйлера — Лагранжа инвариантны относительно группы G с оператором* (22.1). *Функции $C^i=N^i(\mathscr{L})$ удовлетворяют закону сохранения тогда и только тогда, когда значения элементарного действия $\mathscr{L}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})\,dx$ в точках $(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) \in [F]$, где $F=\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u^{\alpha}}\right)_{\alpha=1}^{m}$, инвариантны относительно группы G.*

Доказательство. Введем в рассмотрение переменную λ, на которую группа G действует по формуле

$$\lambda' \det[D_i x'^k]=\lambda. \tag{22.14}$$

Отсюда с использованием стандартного правил дифференцирования определителя находится $\left.\frac{\partial \lambda'}{\partial a}\right|_{a=0}=-\lambda D_i(\xi^i)$, так что оператор (22.1) после продолжения на λ принимает вид

$$\tilde{X}=X-\lambda D_i(\xi^i)\frac{\partial}{\partial \lambda}. \tag{22.15}$$

Инвариантность уравнений Эйлера—Лагранжа и значений элементарного действия на дифференциальном многообразии, определяемом этими уравнениями, означает тогда, что (22.10) вместе с равенством

$$\lambda = \mathscr{L}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) \tag{22.16}$$

задают инвариантное многообразие группы G в пространстве переменных λ, x, u, $\underset{1}{u}$, ... Согласно теореме 15.2.2 (см. также теорему 17.1) критерий инвариантности этого многообразия записывается в виде равенств

$$X\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u^\alpha} = 0, \qquad \tilde{X}(\lambda - \mathscr{L}) = 0,$$

которые должны выполняться на рассматриваемом многообразии. Первое из этих равенств выполнено в силу предполагаемой инвариантности уравнений Эйлера—Лагранжа*), и остается рассмотреть второе из них. С учетом формул (22.15), (22.16) и (22.1) оно переписывается в виде уравнения (22.12), которое в данном случае должно выполняться в силу уравнений (22.10) и их дифференциальных следствий. Таким образом, указанный критерий инвариантности состоит в выполнении равенства

$$D_i N^i(\mathscr{L}) = 0 \tag{22.17}$$

на дифференциальном многообразии, определяемом уравнениями Эйлера—Лагранжа, что и утверждалось в теореме.

Замечание. Теорема обобщается на произвольные дифференциальные уравнения путем замены лагранжиана на так называемый слабый лагранжиан (Ибрагимов [13, 14]). *Слабый лагранжиан* для уравнения (17.1)—это функция $\mathscr{L} \in \mathscr{A}$, удовлетворяющая условию $(\delta\mathscr{L}/\delta u^\alpha)_{[F]} = 0$; он существует для любого уравнения. Обобщенный вариант теоремы (доказательство аналогично предыдущему) состоит в следующем.

Пусть уравнение (17.1) инвариантно относительно группы G с оператором (22.1), $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, u, u_1, \ldots, u_s)$—слабый лагранжиан для (17.1). Функции $C^i = N^i(\mathscr{L})$ удовлетворяют закону сохранения (22.6) для уравнения (17.1) тогда и только тогда, когда значения функции $\mathscr{L}(x, u, u_1, \ldots, u_s)\,dx$ в точках $(x, u, u_1, \ldots, u_s) \in [F]$ инвариантны относительно группы G.

22.4. Действие присоединенной алгебры. Для применения теоремы Нётер или ее обобщений помимо группы, допускаемой рассматриваемым дифференциальным уравнением, нужно знать либо лагранжиан, либо слабый лагранжиан и проверить выполнение

*) В теореме 22.2 такое предположение не делается, потому что инвариантность уравнений Эйлера—Лагранжа является следствием инвариантности элементарного действия.

некоторых дополнительных условий инвариантности. Здесь описывается простой способ построения законов сохранения, основанный на действии присоединенной алгебры, и предыдущие теоремы дополняются утверждением о базисе законов сохранения.

Лемма. *Пусть $\overline{X}$ — канонический оператор Ли—Беклунда, допускаемый дифференциальным уравнением* (17.1) *с известным законом сохранения* (22.6). *Тогда функции*

$$C'^i = \overline{X}(C^i) \tag{22.18}$$

также удовлетворяют закону сохранения.

Доказательство. Согласно лемме 16.2.1 всякий канонический оператор (16.18) коммутирует с дифференцированием D_i, поэтому $D_i C'^i = \overline{X} D_i C^i$. Из равенств $(D_i C^i)_{[F]} = 0$, $(\overline{X}F)_{[F]} = 0$ ввиду аналитичности рассматриваемых функций следует (см. доказательство теоремы 17.1), что $(\overline{X} D_i C^i)_{[F]} = 0$.

Теорема Нётер в случае r-параметрической группы дает r-мерное пространство векторов $C = (C^i)_{i=1}^n$, удовлетворяющих закону сохранения, а в случае бесконечной группы*) — соответствующее бесконечное семейство независимых законов сохранения. Доказанная лемма позволяет выделить среди этих законов сохранения несколько фундаментальных, из которых можно получить остальные простым преобразованием (22.18). Таким образом, между законами сохранения кроме очевидной линейной зависимости можно ввести нетривиальную зависимость на основе равенства (22.18) и выделить фундаментальные законы сохранения следующим определением.

Определение. Пусть L — алгебра Ли операторов Ли—Беклунда, допускаемых дифференциальным уравнением (17.1), S — некоторое множество векторов $C = (C^i)_{i=1}^n$, удовлетворяющих закону сохранения (22.6) для уравнения (17.1). *Базисом*, или *L-базисом*, множества S называется такое минимальное подмножество этого множества, из которого S получается кратным действием (22.18) с каноническими операторами $\overline{X}$ из L и линейными комбинациями.

Возникает вопрос о построении базиса и, в частности, о его конечности. Как можно при этом использовать структуру алгебры L? Рассмотрим подробнее важный случай, когда множество S получено применением теоремы Нётер к алгебре L. Пусть L^A — присоединенная алгебра для L (§ 2.3); ее элементами являются внутренние дифференцирования $\operatorname{ad} X$ в L:

$$\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y], \qquad X, Y \in L. \tag{22.19}$$

*) Здесь не рассматриваются бесконечные группы, содержащие произвольные функции от всех независимых переменных $x^1, \ldots, x^n$. Если элементарное действие инвариантно относительно такой группы, то имеются зависимости между левыми частями (22.10) (Noether [1]).

Определим действие алгебры L^A на векторы $C=(C^i)_{i=1}^n$ формулой

$$\operatorname{ad} X(C)=\overline{X}(C), \tag{22.20}$$

где $\overline{X}$ — канонический оператор, эквивалентный X (см. § 16.2). Согласно предыдущей лемме множество S остается при этом инвариантным. Следующее утверждение (Хамитова [1]) показывает, что действие алгебры L^A на множестве S согласовано с теоремой Нётер (для простоты считается, что L — алгебра Ли точечных преобразований).

Теорема. *Пусть операторам* X_1, $X_2\in L$ *соответствуют векторы* C_1, $C_2\in S$. *Тогда* $(\operatorname{ad} X(X_1)=X_2)\Rightarrow(\operatorname{ad} X(C_1)=C_2)$, *т. е. диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\operatorname{ad} X} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1 & \xrightarrow{\operatorname{ad} X} & C_2 \end{array} \tag{22.21}$$

коммутативна.

Доказательство. Из равенств (22.11), (22.12) выводится соотношение

$$\overline{X}(C_1^i)=C_2^i+D_k(\xi^iC_1^k-\xi^kC_1^i)+\xi^i(\eta_1^\alpha-\xi_1^ku_k^\alpha)\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta u^\alpha},$$

где

$$\overline{X}=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots,\qquad X_1=\xi_1^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta_1^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть* $\{X_\nu\}$ — *минимальное множество операторов из* L, *порождающее алгебру* L (*т. е.* L *совпадает с линейной оболочкой операторов, полученных из* $\{X_\nu\}$ *кратным действием* L^A). *Тогда векторы* C_ν, *соответствующие операторам* X_ν, *образуют базис множества* S. *Если, в частности,* L — *конечно-порожденная алгебра, то множество* S *имеет конечный базис.*

22.5. Интегралы эволюционных уравнений. Для уравнения (19.1) соотношение (22.6) имеет вид

$$\frac{dh}{dt}+D\varphi=0, \tag{22.22}$$

где h, $\varphi\in\mathcal{A}$, дифференцирования D и $\frac{d}{dt}$ определены формулами (19.2) и (19.4). Функция

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(t,\ x,\ u(x,\ t),\ \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x},\ \ldots\right)dx$$

не зависит от времени t для любого решения $u(x,\ t)$ уравнения (19.1) и называется *интегралом уравнения* (19.1). При изучении интегралов можно применять изложенные в § 19 понятия и методы, пользуясь следующим утверждением (Lax [1], лемма 1.1).

Теорема. *Если h удовлетворяет равенству* (22.22), *то функция*

$$g=\frac{\delta h}{\delta u} \tag{22.23}$$

является решением уравнения

$$\frac{dg}{dt}+\sum_{i=0}^{m}(-D)^i F_i g=0, \qquad F_i\equiv\frac{\partial F}{\partial u_i}, \tag{22.24}$$

формально сопряженного определяющему уравнению (19.5).

Доказательство. Условие (22.22) равносильно уравнению

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dh}{dt}\equiv\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+h_*F\right)=0. \tag{22.22'}$$

Так как выражение h_*F можно переписать в виде

$$h_*F=F\frac{\delta h}{\delta u}+D\psi \tag{22.25}$$

с некоторой функцией $\psi\in\mathcal{A}$, то равенство (22.22′) с учетом формулы (22.23) дает

$$\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\delta}{\delta u}(Fg)=0. \tag{22.26}$$

Функцию g можно представить в виде (22.23) тогда и только тогда, когда выполняется операторное равенство (см. Манин [1], § 7.12)

$$\sum_{i\geqslant 0}(-D)^i\cdot g_i=\sum_{i\geqslant 0}g_iD^i\equiv g_*. \tag{22.27}$$

Поэтому

$$\frac{\delta}{\delta u}(Fg)=\sum_{i\geqslant 0}(-D)^i(g_iF+F_ig)=g_*F+\sum_{i\geqslant 0}(-D)^iF_ig,$$

и уравнение (22.26) принимает вид (22.24).

Из этой теоремы следует, что эволюционные уравнения четного порядка не могут иметь бесконечное множество интегралов с неограниченным ростом порядка входящих в них производных u_i (Abellanas & Galindo [1], см. также Капцов [1]). Достаточно проверить, что уравнение (22.24) не имеет решений $g(t, x, u, u_1, \ldots, u_s)$ порядка $s>m$, если m четно. Действительно, при $s>m$ старший член левой части (22.24) равен $2g_sF_m u_{m+s}$, поэтому уравнение (22.24) дает $g_s=0$. Следовательно, для уравнения (19.1) порядка $m=2n$ плотность закона сохранения (22.22) (т. е. функция h, рассматриваемая с точностью до слагаемых вида $D\psi$) не зависит от производных порядка $>n$. Утверждение можно усилить, но в дальнейшем это не будет использовано (см. Abellanas & Galindo [1]).

Лемма 22.4 в случае эволюционных уравнений утверждает, что для любых решений f и g уравнений (19.5) и (22.24) соответственно их произведение fg удовлетворяет (22.22). Действительно, для $\overline{X}=f\frac{\partial}{\partial u}+\ldots$ имеем, используя (22.25), (22.23),

$$\overline{X}h=h_*f=f\frac{\delta h}{\delta u}+D\psi=fg\,(\mathrm{mod}\,D\psi). \tag{22.28}$$

§ 23. Примеры

23.1. Движение в пространстве де Ситтера. Свободная частица в 4-мерном пространстве-времени V_4 движется по геодезической. Лагранжиан частицы с массой m, движущейся в пространстве V_4 с метрической формой (6.4), равен

$$\mathscr{L}=-mc\sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j}, \tag{23.1}$$

где c — скорость света, x^i, $i=1,\ \ldots,\ 4$, — дифференциальные переменные, $\dot{x}^i$ — их производные по независимой переменной, в качестве которой выбирается произвольный параметр σ, так что траекторией частицы будет кривая $x^i=x^i(\sigma)$, $i=1,\ \ldots,\ 4$, в V_4. Элементарное действие $\mathscr{L}\,d\sigma$ инвариантно относительно группы изометрических движений в V_4. Поэтому применима теорема Нётер, в которой в качестве оператора (22.1) участвуют операторы

$$X=\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

с координатами η^i, удовлетворяющими уравнениям Киллинга (7.3). В качестве параметра σ удобно выбрать длину s кривой. Тогда $g_{kl}(x)\dot{x}^k\dot{x}^l=1$, так что

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^i}=-mc\,(g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l)^{-1/2}g_{ij}\dot{x}^j=-mcg_{ij}\dot{x}^j.$$

С учетом этого равенства по формуле (22.9) получается следующее выражение для вычисления интегралов движения:

$$I=mcg_{ij}\dot{x}^i\eta^j. \tag{23.2}$$

Пространство де Ситтера — это пространство-время V_4 постоянной кривизны. Так как оно имеет 10-параметрическую группу изометрий (§ 8.2), то имеется 10 линейно независимых интегралов движения. Их вычисление удобно проводить в системе координат, в которой метрическая форма имеет вид (8.14), т. е.

$$ds^2=\theta^{-2}(c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2), \tag{23.3}$$

где

$$\theta=1+\frac{K}{4}(c^2t^2-x^2-y^2-z^2), \qquad K=\mathrm{const}.$$