нию задачи постоянная k принимает только значения 0 или 1 (для плоских и осесимметрических волн соответственно). Интересно отметить, что в результате групповой классификации уравнений (23.20) с произвольным параметром k выделяются особые значения $k=2$ и $k=1/2$, при которых происходит расширение группы: к (23.23) добавляется функция (Хамитова [1])

$$\begin{aligned}g = 9\gamma w_t &+ [(3\gamma' - 4(k+1)\gamma)x - (3\gamma'' - (k+1)\gamma')y^2]w_x + \\ &+ (6\gamma' - 2(k+1)\gamma)yw_y + (3\gamma' + 8(k+1)\gamma)w + \\ &+ (3\gamma'' + (5-4k)\gamma')\frac{x^2}{2} - (3\gamma''' + (2-k)\gamma'' - (k+1)\gamma')xy^2 + \\ &+ (3\gamma^{(4)} + 2(k+1)\gamma''' - (k^2 - k + 1)\gamma'' - k(k+1)\gamma')\frac{y^4}{6}, \qquad (23.24)\end{aligned}$$

где γ — произвольная функция от t.

Рассматриваемое уравнение имеет бесконечное семейство законов сохранения. Как и в случае уравнения (23.11), функциям σ и τ из (23.23) соответствует закон сохранения с тривиальной плотностью, поэтому можно положить $\sigma = \tau = 0$. Кроме того, для применимости теоремы Нётер постоянные a и b должны удовлетворять условию $4(k+1)a + 9b = 0$. Пусть это условие выполнено, а все произвольные функции от t в формуле (23.23) выбраны равными нулю, т. е. оператор (23.22) имеет координату

$$f_0 = -9w_t + 4(k+1)xw_x + 2(k+1)yw_y - 8(k+1)w. \qquad (23.25)$$

Его можно записать в виде оператора однопараметрической группы точечных преобразований

$$X_0 = 9\frac{\partial}{\partial t} - 4(k+1)x\frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)y\frac{\partial}{\partial y} - 8(k+1)w\frac{\partial}{\partial w} \qquad (23.26)$$

и по теореме Нётер построить соответствующий ему закон сохранения с вектором (в обозначениях (23.15))

$$\begin{aligned}&C^1 = f_0\varepsilon w_x + 9\mathcal{L}, \quad C^2 = f_0\varepsilon(w_t - w_x^2 - 2xw_x) - 4(k+1)\mathcal{L}, \\ &C^3 = f_0\varepsilon w_y - 2(k+1)y\mathcal{L},\end{aligned} \qquad (23.27)$$

где $\mathcal{L}$ — лагранжиан (23.21), f_0 — функция (23.25), $\varepsilon = e^{2(k+1)t}$. Этим решена задача построения законов сохранения для уравнения (23.20), так как оператор (23.26) порождает алгебру, состоящую из операторов вида (23.22)—(23.24). Следовательно, вектор (23.27) задает базис законов сохранения.

§ 24. Группа Лоренца

24.1. Законы сохранения в релятивистской механике. Рассматривается свободное движение частицы (материальной точки) в пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = c^2(dx^4)^2 - \sum_{\mu=1}^{3}(dx^\mu)^2. \qquad (24.1)$$

Группой изометрий в этом пространстве является 10-параметрическая группа Лоренца. Операторы

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{\mu\nu} = x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \qquad (\mu < \nu),$$
$$X_{\mu 4} = x^4 \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{c^2} x^\mu \frac{\partial}{\partial x^4}, \qquad i = 1, \ldots, 4; \ \mu, \ \nu = 1, 2, 3, \tag{24.2}$$

образуют базис алгебры Ли L_{10} группы Лоренца.

Законы сохранения были выведены в § 23.1; в приведенных там формулах в данном случае нужно положить $K = 0$. В результате получаются следующие релятивистские интегралы движения свободной частицы:

энергия

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}},$$

импульс

$$\boldsymbol{P}_0 = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}},$$

момент импульса

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{P}_0,$$

а вектор (23.8) переходит в

$$\boldsymbol{Q}_0 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}} (\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}).$$

На этом примере легко проследить, как находится и используется базис законов сохранения для уравнений, основанных на группе Лоренца.

Соотношения

$$\operatorname{ad} X_i (X_1) = 0, \quad \operatorname{ad} X_{1i} (X_1) = X_i, \quad \operatorname{ad} X_{ij} (X_1) = 0 \qquad (i, j \neq 1)$$

показывают, что присоединенная алгебра L_{10}^A переводит оператор Y в подпространство из L_{10}, натянутое на операторы X_2, X_3, X_4, и $(L_{10}^A)^2 (X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Так как здесь вместо X_1 можно взять любой из операторов переноса X_i, повторное действие алгебры L_{10}^A не выводит из $\{X_1, \ldots, X_4\}$. Таким образом, для каждого $i = 1, \ldots, 4$ и любого целого положительного числа $l \geqslant 2$

$$(L_{10}^A)^l (X_i) = \{X_1, \ldots, X_4\}. \tag{24.3}$$

Далее, $L_{10}^A (X_{12}) = \{X_1, X_2, X_{13}, X_{23}, X_{14}, X_{24}\}$, поэтому

$$(L_{10}^A)^2 (X_{12}) = L_{10}. \tag{24.4}$$

Здесь вместо X_{12} можно взять любой из операторов X_{ij}. Следовательно, в качестве элемента, порождающего алгебру L_{10}, можно выбрать один из операторов X_{ij}; пусть это будет X_{12}. Из теоремы 22.4 следует

Предложение. *Величина*

$$M_0^3 = mc\,(x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1)$$

образует базис (L_{10}-базис) релятивистских интегралов движения свободной частицы.

Согласно (24.4) интегралы E_0, $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{M}_0$, $\boldsymbol{Q}_0$ получаются из M_0^3 двукратным действием алгебры L_{10}^A. Так как операторы (24.2) имеют канонический вид (независимой переменной является параметр s), а величина M_0^3 зависит от первых производных, то для применения формулы (22.20), определяющей действие L_{10}^A на интегралы движения, операторы (24.2) нужно продолжить на $\dot{x}^i$. Получим, например, выражение для энергии. Оператор X_{14} после продолжения на производные по формуле (16.19) имеет вид

$$X_{14}' = x^4\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{c^2}x^1\frac{\partial}{\partial x^4} + \dot{x}^4\frac{\partial}{\partial \dot{x}^1} + \frac{1}{c^2}\dot{x}^1\frac{\partial}{\partial \dot{x}^4}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ad} X_{14}(M_0^3) = X_{14}(M_0^3) = mc\,(x^4x^2 - x^2\dot{x}^4) = -Q_0^2;$$

в последнем равенстве использованы соотношения (23.4) $c\dot{\theta} = 1$ и определение вектора $\boldsymbol{Q}_0$. Действие оператора X_2, продолжение которого совпадает с ним самим, дает

$$X_2\,(Q_0^2) = mc\dot{x}^4 = \frac{1}{c^2}E_0.$$

Таким образом, энергия (с точностью до постоянного множителя) получается из M_0^3 последовательным применением преобразований $\operatorname{ad} X_{14}$ и $\operatorname{ad} X_2$. Так же просто получаются остальные интегралы движения.

24.2. Нелинейное волновое уравнение. В релятивистской механике в качестве базиса можно было бы взять также одну из компонент вектора $\boldsymbol{Q}_0$. Этим произвол в выборе базиса исчерпывается: энергия и импульс не образуют базис в силу (24.3). Ситуация изменяется при расширении допускаемой группы. Рассмотрим, например, нелинейное волновое уравнение в пространстве Минковского (пусть $c = 1$):

$$u_{tt} - \Delta u + au^3 = 0, \qquad a = \text{const}, \tag{24.5}$$

где $\Delta u = \sum_{\mu=1}^{3} u_{\mu\mu}$. Это уравнение конформно-инвариантно (теорема 10.3): оно допускает 15-параметрическую группу, инфинитезимальные операторы которой получаются добавлением к базису (24.2) алгебры L_{10} (при $c = 1$) следующих операторов собственно конформных преобразований:

$$
\begin{aligned}
&Y_\mu=(2x^\mu x^i+(t^2-|\boldsymbol{x}|^2)\delta^{\mu i})\frac{\partial}{\partial x^i}-2x^\mu u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mu=1,\ 2,\ 3,\\
&Y_4=2tx^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+(t^2+|\boldsymbol{x}|^2)\frac{\partial}{\partial x^4}-2tu\frac{\partial}{\partial u},\\
&Z=x^i\frac{\partial}{\partial x^i}-u\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}
\tag{24.6}
$$

Здесь $|\boldsymbol{x}|^2=\sum\limits_{\mu=1}^{3}(x^\mu)^2$, двойное обозначение $t\equiv x^4$ используется для удобства записи. Пусть L_{15} — алгебра Ли с базисом (24.2), (24.6), L_{15}^A — ее присоединенная алгебра. Соотношение (24.4) обобщается в виде следующего утверждения.

Предложение. *Пусть* $X\in L_{15}$, $X\neq 0$. *Тогда*

$$
(L_{15}^A)^2(X)=L_{15}. \tag{24.7}
$$

Следовательно, для конформно-инвариантных уравнений все законы сохранения равноправны: любой из них образует базис. В частности, для рассматриваемого здесь нелинейного волнового уравнения в качестве такого фундаментального закона сохранения выберем закон сохранения энергии, являющийся результатом инвариантности относительно переноса t. Законы сохранения будем писать в виде

$$
D_t(\rho)+\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0, \tag{24.8}
$$

где ρ — плотность, $\boldsymbol{H}=(H^1,\ H^2,\ H^3)$, $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=D_\mu H^\mu$. Уравнение (24.5) имеет лагранжиан

$$
\mathscr{L}=|\nabla u|^2-u_t^2+\frac{a}{2}u^4,
$$

где $\nabla u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$, и формула (23.17) дает

$$
\begin{aligned}
H^\mu&=2(\eta-\xi^i u_i)u_\mu+\xi^\mu\mathscr{L},\\
\rho&=-2(\eta-\xi^i u_i)u_t+\xi^4\mathscr{L}.
\end{aligned}
\tag{24.9}
$$

Отсюда подстановкой координат $\xi^i=\delta^{i4}$, $\eta=0$ находится вектор

$$
\boldsymbol{H}_0=-2u_t\nabla u,\quad \rho_0=u_t^2+|\nabla u|^2+\frac{a}{2}u^4, \tag{24.10}
$$

определяющий закон сохранения энергии. Остальные законы сохранения можно получать по лемме 22.4, однако в данном случае проще пользоваться формулой (24.9). Рассмотрим, например, операторы Z и Y_4. Элементарное действие инвариантно относительно группы растяжений с оператором Z, и по формуле (24.9) находится плотность

$$
\rho_1=t\rho_0+2u_t(u+\boldsymbol{x}\cdot\nabla u)
$$

соответствующего закона сохранения, где ρ_0 — плотность энергии, определенная в (24.10). Преобразования с оператором Y_4 не сохраняют элементарное действие, но в данном случае выполняется условие (22.13). По формулам (22.13) и (24.9) находится следующая плотность закона сохранения:

$$\rho_2 = 2t\rho_1 + (|\boldsymbol{x}|^2 - t^2)\rho_0 - 2u^2,$$

где ρ_0 и ρ_1 — определенные выше плотности.

Другим классическим представителем конформо-инвариантных уравнений являются уравнения Максвелла. Соответствующие законы сохранения для них построил Bessel-Hagen [1].

24.3. Уравнение Дирака. Уравнение Дирака

$$\gamma^k \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m\psi = 0 \tag{24.11}$$

вместе с сопряженным уравнением

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\tilde{\psi} = 0 \tag{24.11'}$$

можно получить из вариационного принципа с лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left\{\tilde{\psi}\left(\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m\psi\right) - \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\tilde{\psi}\right)\psi\right\}. \tag{24.12}$$

Здесь ψ — комплексный четырехмерный вектор-столбец, γ^k — матрицы Дирака

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а $\tilde{\psi}$ — вектор-строка, определенная формулой

$$\tilde{\psi} = \bar{\psi}^{\mathrm{T}}\gamma^4, \tag{24.13}$$

где $\bar{\psi}$ — комплексно сопряженный вектор для ψ, символ $^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование. Независимыми переменными являются пространственные переменные x^μ, $\mu = 1, 2, 3$, и $x^4 = ict$.

Уравнение Дирака может служить примером к теореме 22.3. Рассмотрим для этого простое преобразование, состоящее в прибавлении к функции ψ произвольного решения уравнения Дирака. Такие преобразования (выражающие принцип суперпозиции) образуют бесконечную группу с инфинитезимальным оператором

$$X_\varphi = \varphi^k(x)\frac{\partial}{\partial\psi^k} + \tilde{\varphi}_k(x)\frac{\partial}{\partial\tilde{\psi}_k}, \tag{24.14}$$

где векторы $\varphi(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ с компонентами $\varphi^k(x)$ и $\tilde{\varphi}_k(x)$ связаны формулой (24.13) и удовлетворяют уравнениям (24.11) и (24.11′). Условия теоремы 22.3 выполнены, и оператору (24.14) соответствует закон сохранения с вектором C_φ, имеющим компоненты

$$C_\varphi^k = \tilde{\psi}\gamma^k\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)\gamma^k\psi. \tag{24.15}$$

Легко видеть, что элементарное действие (22.8) с лагранжианом (24.12) не инвариантно относительно преобразований

$$\psi' = \psi + a\varphi(x), \quad \tilde{\psi}' = \tilde{\psi} + a\varphi(x),$$

соответствующих оператору (24.14). Аналогичное утверждение о свойствах инвариантности элементарного действия справедливо также для группы растяжений с оператором

$$X = \psi^k\frac{\partial}{\partial\psi^k} + \tilde{\psi}_k\frac{\partial}{\partial\tilde{\psi}_k}, \tag{24.16}$$

но для этого оператора формула (22.9) дает нулевой вектор C.

Бесконечная группа с операторами (24.14) и (24.16) образует инвариантную подгруппу полной группы, допускаемой уравнением Дирака. В дальнейшем, говоря о группе, допускаемой уравнениями (24.11), (24.11′), будем иметь в виду факторгруппу по этой инвариантной подгруппе. Кроме того, условимся указывать преобразования только для переменных x и ψ, подразумевая, что $\tilde{\psi}$ преобразуется в соответствии с формулой (24.13), т. е. $\tilde{\psi}' = \bar{\psi}'^{\mathrm{T}}\gamma^4$.

Уравнение (24.11) инвариантно относительно группы Лоренца, а если масса m равна нулю, то оно конформно-инвариантно (Dirac [1], см. также Pauli [1]). Соответствующий инфинитезимальный оператор можно записать в виде

$$X = X^0 + (S\psi)^k\frac{\partial}{\partial\psi^k}, \tag{24.17}$$

где $X^0 = \xi^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}$ пробегает множество операторов (8.25), если $m = 0$, и совпадает с операторами X_l, X_{jl} группы Лоренца, если $m \neq 0$, а

$$S = \frac{1}{8}\sum_{k,\,l=1}^{4}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}(\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k - 3\delta^{kl}). \tag{24.18}$$

К этим преобразованиям нужно добавить фазовые преобразования

$$\psi' = \psi e^{-ia} \tag{24.19}$$

при произвольной массе и еще две однопараметрические группы,

$$\psi' = \psi e^{ia\gamma^5}, \quad \gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \tag{24.20}$$

$$\psi' = \psi e^{-a\gamma^5} \tag{24.21}$$

при $m=0$. Указанные преобразования образуют максимальную группу точечных преобразований для уравнения Дирака. Если же вместо (24.11) рассматривать систему уравнений (24.11), (24.11′), то допускаемая группа может расшириться за счет преобразований, в которых преобразованные переменные x', ψ' зависят от $\tilde{\psi}$. Pauli [2] нашел две однопараметрические группы таких преобразований,

$$\psi' = \psi \cos a + \gamma^3\gamma^1\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} \sin a \tag{24.22}$$

и

$$\psi' = \psi \cos a + i\gamma^3\gamma^1\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} \sin a, \tag{24.23}$$

которые оставляют систему (24.11), (24.11′) инвариантной, если $m=0$. 4-параметрическая группа преобразований (24.20)—(24.23) называется *группой Паули*. Если к группе Паули добавить однопараметрические группы преобразований

$$\psi' = \psi \operatorname{ch} a + \gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} \operatorname{sh} a \tag{24.24}$$

и

$$\psi' = \psi \operatorname{ch} a + i\gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} \operatorname{sh} a, \tag{24.25}$$

которые допускаются при произвольном значении массы m, то указанные преобразования образуют максимальную группу точечных преобразований, допускаемую системой (24.11), (24.11′) (Ибрагимов [5]). Итак, максимальная группа при $m=0$ задается формулами (24.17)—(24.25), а при $m \neq 0$ ее образуют группа Лоренца и преобразования (24.19), (24.24), (24.25).

Все перечисленные преобразования удовлетворяют условию инвариантности значений элементарного действия на экстремалях, так что применима теорема 22.3. Однако для преобразований (24.21)—(24.23) группы Паули соответствующие векторы (22.9) равны нулю, и остаются перечисленные ниже нетривиальные законы сохранения для уравнения Дирака. При записи этих законов сохранения тривиальные слагаемые, кратные $\mathscr{L}$, опускаются.

Операторам (24.17) с X^0, равным X_l и X_{jl}, соответствуют тензор энергии-импульса P_l^k и тензор момента импульса M_{jl}^k:

$$P_l^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x^l}\gamma^k\psi - \tilde{\psi}\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^l}\right),$$

$$M_{jl}^k = x^l P_j^k - x^j P_l^k + \frac{1}{4}\left[\tilde{\psi}\left(\gamma^k\gamma^j\gamma^l + \gamma^j\gamma^l\gamma^k\right)\psi\right].$$

При $m=0$ к ним добавляются тензоры

$$A_l^k = |x|^2 P_l^k + 2x^j M_{jl}^k, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^{4} (x^j)^2,$$

$$B^k = x^l P_l^k,$$

соответствующие операторам Y_l и Z конформных преобразований. Инвариантность относительно преобразований (24.19), (24.20), (24.24) и (24.25) приводит к законам сохранения с векторами

$$C_1^k = i\tilde{\psi}\gamma^k\psi,$$
$$C_2^k = i\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi,$$
$$C_3^k = \frac{1}{2}(\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} - \psi^{\mathrm{T}}\gamma^4\gamma^2\gamma^k\psi),$$
$$C_4^k = \frac{i}{2}(\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} + \psi^{\mathrm{T}}\gamma^4\gamma^2\gamma^k\psi).$$

Дополнив равенства (24.4) и (24.7) коммутационными соотношениями между инфинитезимальными операторами преобразований (24.19), (24.20), (24.24) и (24.25), можно показать (см. Хамитова [1]), что при $m \neq 0$ базис законов сохранения определяют векторы M_{12}^k и C_1^k, а при $m = 0$ — векторы P_4^k, C_1^k и C_2^k.

§ 25. Группа Галилея

25.1. Свободное движение частицы. Взаимосвязь законов сохранения в классической механике определяется структурой группы Галилея. Рассмотрим сначала простейший пример — свободное движение материальной точки, т. е. уравнение

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = 0, \tag{25.1}$$

где m — масса частицы, $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$, точкой обозначается дифференцирование по t. Операторы

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X_{\mu\nu} = x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$
$$X_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_\mu = t\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \tag{25.2}$$

образуют базис алгебры Ли L группы Галилея, допускаемой уравнением (25.1).

При переходе от группы Лоренца к группе Галилея (формально $c \to \infty$) равенства (24.3), (24.4) переходят в следующие:

$$(L^A)^l(X_i) = \{X_\mu\}, \quad (L^A)^l(Y_1) = \{X_\mu, Y_\mu\}, \tag{25.3}$$
$$(L^A)^l(X_{12}) = \{X_\mu, X_{\mu\nu}, Y_\mu\}, \qquad l \geqslant 2. \tag{25.4}$$

Следовательно, алгебру L порождают два элемента, одним из которых является X_4, а в качестве второго можно взять X_{12}. Поэтому фундаментальными интегралами движения частицы в классической механике являются энергия

$$E = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 \tag{25.5}$$