соответствующие операторам Y_l и Z конформных преобразований. Инвариантность относительно преобразований (24.19), (24.20), (24.24) и (24.25) приводит к законам сохранения с векторами

$$C_1^k = i\tilde{\psi}\gamma^k\psi,$$
$$C_2^k = i\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi,$$
$$C_3^k = \frac{1}{2}(\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} - \psi^{\mathrm{T}}\gamma^4\gamma^2\gamma^k\psi),$$
$$C_4^k = \frac{i}{2}(\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} + \psi^{\mathrm{T}}\gamma^4\gamma^2\gamma^k\psi).$$

Дополнив равенства (24.4) и (24.7) коммутационными соотношениями между инфинитезимальными операторами преобразований (24.19), (24.20), (24.24) и (24.25), можно показать (см. Хамитова [1]), что при $m \neq 0$ базис законов сохранения определяют векторы M_{12}^k и C_1^k, а при $m = 0$ — векторы P_4^k, C_1^k и C_2^k.

§ 25. Группа Галилея

25.1. Свободное движение частицы. Взаимосвязь законов сохранения в классической механике определяется структурой группы Галилея. Рассмотрим сначала простейший пример — свободное движение материальной точки, т. е. уравнение

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = 0, \qquad (25.1)$$

где m — масса частицы, $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$, точкой обозначается дифференцирование по t. Операторы

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X_{\mu\nu} = x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$
$$X_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_\mu = t\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \qquad (25.2)$$

образуют базис алгебры Ли L группы Галилея, допускаемой уравнением (25.1).

При переходе от группы Лоренца к группе Галилея (формально $c \to \infty$) равенства (24.3), (24.4) переходят в следующие:

$$(L^A)^l (X_i) = \{X_\mu\}, \quad (L^A)^l (Y_1) = \{X_\mu, Y_\mu\}, \qquad (25.3)$$
$$(L^A)^l (X_{12}) = \{X_\mu, X_{\mu\nu}, Y_\mu\}, \qquad l \geqslant 2. \qquad (25.4)$$

Следовательно, алгебру L порождают два элемента, одним из которых является X_4, а в качестве второго можно взять X_{12}. Поэтому фундаментальными интегралами движения частицы в классической механике являются энергия

$$E = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 \qquad (25.5)$$

и момент импульса, причем достаточно взять одну компоненту

$$M^3 = m(x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1). \tag{25.6}$$

Равенство (25.4) показывает, что из M^3 последовательным действием присоединенной алгебры можно получить импульс

$$\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{25.7}$$

момент импульса

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{P} \tag{25.8}$$

и интеграл

$$\boldsymbol{Q} = m(\boldsymbol{x} - t\dot{\boldsymbol{x}}), \tag{25.9}$$

соответствующий операторам Y_μ; поскольку вектор $\boldsymbol{M}$ получается из M^3 очевидными вращениями, то достаточно рассмотреть $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Заметим, что в силу (25.3) импульс связан также с энергией и получается из нее действием $\operatorname{ad} Y_\mu$:

$$\operatorname{ad} Y_\mu(E) = \left(t\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}\right)\left(\frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2\right) = m\dot{x}^\mu = P^\mu.$$

К тому же результату приводит преобразование Галилея для Y_μ,

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3). \tag{25.10}$$

Действительно, это преобразование переводит любое решение уравнения (25.1) снова в решение, поэтому интеграл (25.2) переходит в интеграл

$$E' = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}'|^2 = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}|^2 = E + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{a}|^2.$$

Отсюда в силу произвольности группового параметра $\boldsymbol{a}$ следует, что $\boldsymbol{P}$ является интегралом движения. Аналогично можно получить векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ из момента импульса. При переносах $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{M}$ переходит в интеграл $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{a}$, откуда, как и выше, следует, что $\boldsymbol{P}$ — интеграл движения. Вектор $\boldsymbol{Q}$ получается из $\boldsymbol{M}$ преобразованием (25.10):

$$\boldsymbol{M}' = m\boldsymbol{x}' \times \dot{\boldsymbol{x}}' = m(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}) \times (\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{a}.$$

Этот простой пример выявляет следующее общее свойство механических систем, инвариантных относительно группы Галилея. В отличие от релятивистской механики, где момент импульса задает базис законов сохранения, в классической механике фундаментальными являются энергия и момент импульса*). Приве-

*) Интересно отметить, что еще в то время, когда устанавливались основные принципы механики, Даниил Бернулли высказывал мысль (в письме Эйлеру, февраль 1744; опубликовано в книге Fuss [1]) о возможной зависимости линейного и углового моментов: он предполагал, что сохранение момента импульса можно вывести из закона сохранения импульса. Эйлер, по-видимому, считал их независимыми законами сохранения (см. Truesdell [1] стр. 256).

денные вычисления показывают также, что лемма 22.4 и преобразование законов сохранения с помощью группы, допускаемой рассматриваемым дифференциальным уравнением, приводят к одним и тем же результатам. Однако для более сложных систем, рассматриваемых ниже, использование присоединенной алгебры проще и, кроме того, позволяет легко найти базис законов сохранения.

25.2. Идеальный газ. Рассмотрим уравнения движения идеального политропического газа:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho}\nabla p=0, \\ \rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \\ p_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+\gamma p\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \quad \gamma=\mathrm{const}, \end{gathered} \tag{25.11}$$

где t и $\boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^n)$ — независимые переменные, а дифференциальными переменными являются вектор скорости $\boldsymbol{v}=(v^1, \ldots, v^n)$, давление p и плотность ρ; n принимает значения 1, 2 или 3 соответственно для одномерного, плоского и пространственного течений. Система уравнений (25.11) инвариантна относительно векторного представления группы Галилея и 3-параметрической группы растяжений. Базис соответствующей алгебры Ли образуют операторы

$$\begin{gathered} X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j}+v^j\frac{\partial}{\partial v^i}-v^i\frac{\partial}{\partial v^j}, \\ X_{n+1}=\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_i=t\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial v^i}, \quad X_{n+2}=t\frac{\partial}{\partial t}+x^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \\ Z_1=2t\frac{\partial}{\partial t}+x^i\frac{\partial}{\partial x^i}-v^i\frac{\partial}{\partial v^i}+2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}, \qquad i,\ j=1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{25.12}$$

и

$$X_{n+3}=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+p\frac{\partial}{\partial p}. \tag{25.13}$$

Эта группа является максимальной в случае произвольного показателя адиабаты γ, а при

$$\gamma=\frac{n+2}{n} \tag{25.14}$$

происходит расширение группы: к (25.12), (25.13) добавляется оператор (Овсянников [2])

$$Z_2=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}+(x^i-tv^i)\frac{\partial}{\partial v^i}-nt\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-(n+2)tp\frac{\partial}{\partial p}. \tag{25.15}$$

Оператор (25.13) перестановочен со всеми остальными операторами и не участвует в образовании законов сохранения, поэтому он исключается из дальнейших рассмотрений. Структуру алгебры определяют равенства (25.3), (25.4) и следующие коммутационные соотношения (остальные не используются):

$$\operatorname{ad} Z_2(X_{n+1})=-Z_1 \ (\operatorname{mod} X_{n+3}), \quad \operatorname{ad} Z_2(Z_1)=-2Z_2. \tag{25.16}$$

Законы сохранения (22.6) в гидродинамике удобно записывать в виде

$$D_t(\tau)+\operatorname{div}(\tau \boldsymbol{v}+\xi)=0. \tag{25.17}$$

Пусть $\Omega(t)$—произвольная n-мерная область, движущаяся вместе с жидкостью, $S(t)$—граница $\Omega(t)$, $\boldsymbol{\nu}$—единичная внешняя нормаль к $S(t)$. Стандартным способом (интегрированием по $n+1$-мерному цилиндру $\Omega\times[t_1, t_2]$ с использованием формулы Гаусса — Остроградского) дифференциальный закон сохранения (25.17) переписывается в эквивалентной интегральной форме

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\tau\,d\boldsymbol{x}=-\int_{S(t)}\xi\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{25.18}$$

удобной для физической интерпретации. Классические законы сохранения массы, энергии, импульса и момента импульса для системы (25.11) имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\rho\,d\boldsymbol{x}=0,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+\frac{p}{\gamma-1}\right)d\boldsymbol{x}=-\int_{S(t)}p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\rho\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=-\int_{S(t)}p\boldsymbol{\nu}\,dS,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\rho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}=-\int_{S(t)}p(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nu})\,dS.
\end{gathered} \tag{25.19}$$

Кроме того, имеется закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\rho(t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=-\int_{S(t)}tp\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{25.20}$$

который с учетом сохранения массы может быть записан в виде теоремы о движении центра инерции:

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\boldsymbol{V},$$

где

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{M}\int_{\Omega(t)}\rho\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{V}=\frac{1}{M}\int_{\Omega(t)}\rho\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x},\quad M=\int_{\Omega(t)}\rho\,d\boldsymbol{x}.$$

П аналогии с механикой материальной точки можно ожидать, что в силу соотношений (25.3), (25.4) энергия и момент импульса образуют базис законов сохранения, хотя в данном случае условия теоремы 22.4 не выполнены (уравнения (25.11) не имеют лагранжиана). В справедливости этого предположения легко убедиться непосредственно, причем достаточно преобразовывать плотность законов сохранения. Возьмем, например, оператор Y_i, который по формуле (16.17) переписывается в каноническом виде:

$$\overline{Y}_i = t\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial v^i} - tD_i.$$

Имеем

$$\overline{Y}_i\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{p}{\gamma-1}\right) = \rho v^i - D_i\left[t\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{p}{\gamma-1}\right)\right] \approx \rho v^i.$$

Следовательно, под действием $\operatorname{ad} Y_i$ энергия переходит в импульс. Аналогично осуществляются другие преобразования. В частности,

$$\overline{Y}_i(\rho v^j) = \rho\delta_i^j - D_i(t\rho v^j) \approx \rho\delta_i^j, \tag{25.21}$$

т. е. $\operatorname{ad} Y_i$ переводит импульс в массу, хотя $[Y_i, X_j] = 0$; это формальное несоответствие с диаграммой (22.21) устраняется ниже путем рассмотрения потенциальных течений газа, допускающих вариационную формулировку.

В том случае, когда показатель адиабаты γ и размерность n связаны формулой (25.14), имеются два дополнительных закона сохранения. Первоначально они были получены (Ибрагимов [12]) с помощью теоремы Нётер как результат инвариантности относительно 2-параметрической группы с операторами Z_1, Z_2. Лемма 22.4 с учетом соотношений (25.16) дает простой способ вывода этих законов сохранения из энергии. Переписав Z_2 в канонической форме

$$\overline{Z}_2 = (t^2 v_t^i + t\boldsymbol{x}\cdot\nabla v^i + tv^i - x^i)\frac{\partial}{\partial v^i} + \\ + t(t\rho_t + \boldsymbol{x}\cdot\nabla\rho + n\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} + t\,(tp_t + \boldsymbol{x}\cdot\nabla p + (n+2)p)\frac{\partial}{\partial p},$$

имеем

$$\overline{Z}_2\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{n}{2}p\right) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2[t^2\rho_t + \operatorname{div}(t\rho\boldsymbol{x})] + \\ + \frac{n}{2}[t^2 p_t + 2tp + \operatorname{div}(tp\boldsymbol{x})] + \rho\boldsymbol{v}\cdot[t^2\boldsymbol{v}_t + t(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}] = \\ = t(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} + \operatorname{div}\left[t\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{n}{2}p\right)(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}) - t^2 p\boldsymbol{v}\right].$$

Отсюда видно, что закон сохранения энергии переходит в новый закон сохранения (25.18), плотность которого равна

$$\tau_1 = t(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{25.22}$$

а вектор ξ находится из равенства

$$\tau_1\boldsymbol{v} + \xi = \overline{Z}_2\left[\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(\frac{n}{2} + 1\right)p\right)\boldsymbol{v}\right] + D_t\left[\frac{t}{2}(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np)(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}) - t^2 p\boldsymbol{v}\right]$$

и оказывается равным

$$\xi_1 = p(2t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}).$$

Повторным действием оператора $\overline{Z}_2$ на полученные функции τ_1 и ξ_1 находится еще один закон сохранения с плотностью

$$\tau_2 = t^2(\rho\,|\,\boldsymbol{v}\,|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}) \tag{25.23}$$

и вектором

$$\xi_2 = 2tp\,(t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}).$$

Таким образом, при $\gamma=(n+2)/n$ к (25.19), (25.20) добавляются следующие законы сохранения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} [t(\rho\,|\,\boldsymbol{v}\,|^2+np)-\rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}]\,d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{S(t)} p\,(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{25.24}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} [t^2(\rho\,|\,\boldsymbol{v}\,|^2+np)-\rho\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{S(t)} 2tp\,(t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{25.25}$$

Существование законов сохранения в газовой динамике можно связать с теоремой Нётер, рассматривая потенциальное изэнтропическое течение. Пусть $\boldsymbol{v}=\nabla\Phi$, а энтропия $S=\mathrm{const}$, так что уравнение состояния $p=e^S\rho^\gamma$ принимает вид

$$p=c\rho^\gamma, \qquad c=\mathrm{const}, \tag{25.26}$$

можно считать, например, $c=1$. При этом интеграл Лагранжа — Коши записывается в виде

$$\Phi_t+\frac{1}{2}\,|\,\nabla\Phi\,|^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma-1}=0, \tag{25.27}$$

и вместо системы (25.11) получается следующее уравнение второго порядка для потенциала $\Phi(t,\ x)$:

$$\Phi_{tt}+2\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi_t+\nabla\Phi\cdot(\nabla\Phi\cdot\nabla)\nabla\Phi + (\gamma-1)\left(\Phi_t+\frac{1}{2}\,|\,\nabla\Phi\,|^2\right)\Delta\Phi=0. \tag{25.28}$$

Это уравнение имеет лагранжиан

$$\mathscr{L}=\left(\Phi_t+\frac{1}{2}\,|\,\nabla\Phi\,|^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

и наследует групповые свойства исходной системы (25.11). Для произвольного γ базис допускаемой алгебры образуют операторы

$$X_0=\frac{\partial}{\partial\Phi}, \quad X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{n+1}=\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$Y_i=t\frac{\partial}{\partial x^i}+x^i\frac{\partial}{\partial\Phi}, \quad X_{n+2}=t\frac{\partial}{\partial t}+x^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\Phi\frac{\partial}{\partial\Phi}, \tag{25.29}$$

$$Z_1=x^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{2\gamma+n(\gamma-1)}{\gamma+1}\,t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2-n(\gamma-1)}{\gamma+1}\,\Phi\frac{\partial}{\partial\Phi},$$

а при $\gamma=(n+2)/n$ к ним добавляется оператор

$$Z_2=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2\frac{\partial}{\partial\Phi}. \qquad (25.30)$$

Из них продолжением на первые производные Φ и с учетом интеграла Лагранжа—Коши можно получить операторы (25.12), (25.15). Все операторы (25.29) (за исключением X_{n+2}) и (25.30) удовлетворяют условиям теоремы Нётер, поэтому применима теорема 22.4. В частности, закон сохранения массы соответствует оператору X_0, а коммутационные соотношения $[X_i, Y_j]=\delta_i^j X_0$ объясняют равенства (25.21). Чтобы получить выписанные выше законы сохранения по теореме Нётер, можно построить их сначала для уравнения (25.28), затем исключить Φ с помощью равенств $\nabla\Phi=\boldsymbol{v}$ и (25.27), используя также (25.26). Это удается сделать для всех законов сохранения за исключением того, который соответствует оператору Z_1 и имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\left[\frac{2\gamma+n(\gamma-1)}{\gamma+1}t\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+\frac{p}{\gamma-1}\right)-\rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}-\right.$$
$$\left.-\frac{n(\gamma-1)-2}{\gamma+1}\rho\Phi\right]d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S(t)}p\left(\frac{2\gamma+n(\gamma-1)}{\gamma+1}t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS. \qquad (25.31)$$

Отсюда можно исключить потенциал только при условии (25.14); тогда равенство (25.31) переходит в (25.24). Это означает, что Z_1 приводит к дополнительному закону сохранения либо для произвольных течений газа с показателем адиабаты $\gamma=(n+2)/n$, либо для потенциальных течений произвольного политропического газа.

В связи с законами сохранения (25.24), (25.25) возникает вопрос, существует ли такое поле, в котором материальная точка имеет аналогичные интегралы движения. Так как при $n=3$ формула (25.14) дает для показателя адиабаты значение $\gamma=5/3$, т. е. характеризует одноатомный газ, то речь идет о поле, моделирующем одноатомный газ. Если взять кулоновское поле, в котором потенциальная энергия частицы равна

$$U=\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|}, \qquad \alpha=\mathrm{const}, \qquad (25.32)$$

то интегралами движения являются (m—масса частицы) энергия $E=\frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2+\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|}$, момент импульса $\boldsymbol{M}=m(\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{x}})$ и вектор

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{M}+\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|},$$

специфический для поля (25.32). Сравнение этих интегралов с формулами (25.22), (25.23) показывает, что кулоновское поле не подходит. Возьмем поэтому более общее центральное поле с произвольным степенным потенциалом

$$U=\alpha|\boldsymbol{x}|^k. \tag{25.33}$$

Можно показать, что группе растяжений (с некоторым оператором вида (5.1)) соответствует нетривиальный интеграл движения только при $k=-2$, т. е. в случае потенциала

$$U=\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2}, \qquad \alpha=\mathrm{const}. \tag{25.34}$$

Для уравнения движения частицы в этом поле,

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}=2\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^4}, \tag{25.35}$$

группа Галилея представлена операторами X_4 и $X_{\mu\nu}$ из (25.2); отсутствие X_μ и Y_μ связано с выбором неподвижного центра — начала координат. Кроме того, уравнение (25.35) инвариантно относительно 2-параметрической группы, состоящей из растяжений с оператором

$$Z_1=2t\frac{\partial}{\partial t}+x^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{25.36}$$

и проективных преобразований с оператором

$$Z_2=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{25.37}$$

Продолжение этих операторов на $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}$ совпадает с Z_1 и Z_2 из (25.12) и (25.15), если исключить переменные ρ и p. Согласно (25.16) для построения интегралов движения, соответствующих Z_1 и Z_2, достаточно преобразовать энергию

$$E=\frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2+\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2} \tag{25.38}$$

с помощью $\operatorname{ad}Z_2$. Имеем

$$\overline{Z}_2=(tx^\mu-t^2\dot{x}^\mu)\frac{\partial}{\partial x^\mu}+(x^\mu-t\dot{x}^\mu-t^2\ddot{x}^\mu)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}, \tag{25.37'}$$

поэтому

$$\overline{Z}_2(E)=m\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x}-t\left(m|\dot{\boldsymbol{x}}|^2+2\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2}\right)-t^2\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\left(m\ddot{\boldsymbol{x}}-2\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^4}\right).$$

Это означает, что оператору Z_1 соответствует интеграл

$$I_1=2tE-m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}. \tag{25.39}$$

Действием оператора (25.37′) на функцию I_1 получается второй интеграл

$$I_2=2t^2E-m\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}), \tag{25.40}$$

который соответствует оператору Z_2. Таким образом, уравнение (25.35) имеет 6 первых интегралов, определяемых формулами (25.38)—(25.40) и моментом импульса $\boldsymbol{M}=m(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})$. Интегралы (25.39), (25.40) совпадают с плотностями (25.22), (25.23), так что поле с потенциалом (25.34) обладает требуемыми свойствами. Потенциал (25.34) принадлежит классу так называемых интегрируемых степенных потенциалов. А именно, уравнение орбиты частицы, движущейся в центральном поле с потенциалом вида (25.33), интегрируется в элементарных (круговых) функциях в следующих трех случаях (см., например, Голдстейн [1], § 3.5):

$$k=2,\ -1,\ -2,$$

т. е. для гармонического осциллятора, кулоновского поля (или ньютоновского поля тяготения) и для (25.34). В последнем случае решения уравнения движения (25.35) находятся с помощью указанных выше шести первых интегралов без дополнительных квадратур.

Замечание. Построение алгебры Ли—Беклунда для лагранжевых уравнений движения частицы сводится (§ 17.1) к решению определяющего уравнения (17.3) для оператора $X=\eta^i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\frac{\partial}{\partial x^i}+\ldots$, где $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}=D_t(\boldsymbol{x})$. Рассмотрим, например, движение в кулоновском поле (25.32). В этом случае определяющее уравнение имеет вид

$$m\left(\frac{d}{dt}\right)^2\eta^i=\frac{\alpha}{r^3}\left(\eta^i-3\frac{x^i}{r^2}\sum_{k=1}^{3}x^k\eta^k\right),$$

где

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\alpha}{mr^3}x^i\frac{\partial}{\partial v^i},\quad r=|\boldsymbol{x}|.$$

Инфинитезимальным операторам группы точечных преобразований соответствует линейное по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{v}$ решение этого уравнения:

$$\eta^i=(3at+b)v^i+(c^i_k-2a\delta^i_k)x^k,$$

a, b, $c^i_k=\mathrm{const}$, $c^i_k+c^k_i=0$. Подстановкой в определяющее уравнение функций η^i более общего вида

$$\eta^i=a^i_{jk}(t)x^jv^k+b^i_k(t)v^k+c^i_k(t)x^k$$

находятся еще три оператора Ли—Беклунда

$$X_k=(2x^kv^i-x^iv^k-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\delta^i_k)\frac{\partial}{\partial x^i}+\ldots,\quad k=1,2,3,$$

допускаемые уравнением

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}=\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}.$$

Для операторов X_k и лагранжиана $\mathscr{L}=\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2-\frac{\alpha}{r}$ имеем

$$X_k(\mathscr{L})=m[2(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})x^k-(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})v^k-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\dot{v}^k]-D_t\left(\alpha\frac{x^k}{r}\right).$$

Так как эти равенства на траекториях движения частицы принимают вид $X_k(\mathscr{L})=D_t\left(-2\alpha\frac{x^k}{r}\right)$, то теорема 22.3 и замечание 22.2 дают интегралы $A_k=m(|\boldsymbol{v}|^2x^k-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})v^k)+\alpha\frac{x^k}{r}$, образующие вектор Рунге—Ленца $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}+\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{r}$. По теореме 22.4 вектор $\boldsymbol{A}$ можно получить также действием операторов X_k на $\boldsymbol{M}$.

В гамильтоновой механике с каждым первым интегралом $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ уравнений движения связывается однопараметрическая группа канонических преобразований с инфинитезимальным оператором

$$Y=\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i},$$

сохраняющая гамильтониан (см. Голдстейн [1], § 8.6). По этой формуле вектору Рунге—Ленца соответствуют операторы $\left(v^i=\frac{p_i}{m}\right)$

$$Y_k=(2x^kv^i-x^iv^k-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\,\delta^i_k)\frac{\partial}{\partial x^i}+$$
$$+\left(v^iv^k+\frac{\alpha}{mr^3}x^ix^k-\left(|\boldsymbol{v}|^2+\frac{\alpha}{mr}\right)\delta^i_k\right)\frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Уравнение Ли для однопараметрической группы канонических преобразований с оператором Y_k (т. е. гамильтонова система с гамильтонианом A_k) имеет три попарно коммутирующих интеграла A_k, E, M_{ij} $(i, j\neq k)$, и поэтому интегрируется в квадратурах. С точки зрения лагранжевой механики Y_k не являются операторами Ли—Беклунда, так как не сохраняют равенство $\boldsymbol{v}=D_t(\boldsymbol{x})$. Но ввиду того, что на траекториях движения частицы $Y_k=X_k$, канонические преобразования с инфинитезимальными операторами Y_k определены на траекториях движения и образуют группу преобразований Беклунда, сохраняющих уравнение $m\ddot{\boldsymbol{x}}=\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$.

25.3. Несжимаемая жидкость. Для течений несжимаемой жидкости принцип относительности Галилея заменяется более общим свойством инвариантности относительно перехода в любую систему координат, движущуюся поступательно. Для уравнений

$$\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla p=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \tag{25.41}$$

описывающих течение идеальной несжимаемой жидкости (ее плотность считается равной единице), этот обобщенный принцип относительности характеризуется оператором

$$X_f = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f'^i \frac{\partial}{\partial v^i} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}'') \frac{\partial}{\partial p}, \tag{25.42}$$

обобщающим операторы X_i и Y_i из (25.12); здесь $\boldsymbol{f} = (f^1(t), \ldots$ $\ldots, f^n(t))$ — произвольная вектор-функция от t, $\boldsymbol{f}' = \frac{d\boldsymbol{f}}{dt}$. Очевидно, что система (25.41) допускает также оператор $X_g = g(t) \frac{\partial}{\partial p}$ с произвольной функцией $g(t)$. Операторы X_f, X_g вместе с X_{ij}, X_{n+1}, X_{n+2} и $Z_1 - 2X_{n+3}$ из (25.12), (25.13) порождают максимальную группу, допускаемую уравнениями (25.41).

Обобщенный принцип относительности приводит к закону сохранения

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega(t)} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} = - \int\limits_{S(t)} [p\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}') \gamma] \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS, \tag{25.43}$$

объединяющему закон сохранения импульса и теорему о движении центра инерции. Из равенства $[X_{n+1}, X_f] = X_{f'}$ видно, что он может быть получен из сохранения энергии,

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega(t)} |\boldsymbol{v}|^2 \, d\boldsymbol{x} = - \int\limits_{S(t)} 2p\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS, \tag{25.44}$$

преобразованием $\operatorname{ad} X_f$. Действительно,

$$\overline{X}_f(|\boldsymbol{v}|^2) = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{f} \cdot \nabla |\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{v} - \operatorname{div}(\boldsymbol{f} |\boldsymbol{v}|^2) \approx \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{v}.$$

Так как $\boldsymbol{f}(t)$ — произвольная функция, то это означает, что (25.44) переходит в (25.43). Справедливость равенства (25.43) легко проверяется непосредственно. При этом удобно пользоваться формулой

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{S} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{x} \, dS, \tag{25.45}$$

которая выполняется для любого соленоидального векторного поля $\boldsymbol{v}$. Действительно, из условия $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ вытекают равенства

$$\operatorname{div}(x^i \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla x^i = v^i.$$

Отсюда по формуле Гаусса—Остроградского имеем

$$\int\limits_{\Omega} v^i \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(x^i \boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{S} x^i \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS.$$

Равенства (25.43), (25.44) вместе с законом сохранения момента импульса исчерпывают все законы сохранения в случае произвольных течений.

Для потенциальных течений жидкости имеются дополнительные законы сохранения. Сначала отметим следующее свойство безвихревых соленоидальных векторных полей.

Предложение. *Пусть* $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}=0$ *и* $\operatorname{div} \boldsymbol{v}=0$. *Тогда*

$$(r-2) \int_{\Omega} |\boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x} = \int_{S} [|\boldsymbol{v}|^2 \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}]\cdot \boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{25.46}$$

Доказательство. При указанных условиях справедливы равенства

$$\operatorname{div}[|\boldsymbol{v}|^2 \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}] = \\ = n|\boldsymbol{v}|^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - 2|\boldsymbol{v}|^2 - 2\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = (n-2)|\boldsymbol{v}|^2$$

С помощью формулы (25.46) проверяется, что для потенциальных течений несжимаемой жидкости (пусть $n=3$) выполняется обобщенный закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} h(t)|\boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x} = -\int_{S} [2h(t)p\boldsymbol{v} + h'(t)(2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} - |\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{x})]\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS, \tag{25.47}$$

где $h(t)$ — произвольная функция. Кроме того имеются законы сохранения, явно зависящие от потенциала Φ, где $\nabla\Phi=\boldsymbol{v}$. Их можно получить по теореме Нётер, переписав систему (25.41) в виде уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi=0 \tag{25.48}$$

и интеграла Бернулли (постоянную интегрирования можно положить равной нулю)

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + p = 0.$$

В качестве лагранжиана для (25.48) возьмем

$$\mathscr{L} = \Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2. \tag{25.49}$$

Если теорему Нётер применить к операторам

$$T_0 = x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{n-2}{2}\Phi\frac{\partial}{\partial\Phi}, \quad T_i = (2x^i x^j - |\boldsymbol{x}|^2\delta^{ij})\frac{\partial}{\partial x^j} - (n-2)\Phi x^i\frac{\partial}{\partial\Phi}$$

группы конформных преобразований для уравнения Лапласа, и в полученных выражениях заменить $\nabla\Phi$ на $\boldsymbol{v}$, а Φ_t исключить с помощью интеграла Бернулли, то мы придем к следующим законам сохранения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}+n\Phi)\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S}\left(p\boldsymbol{x}-\frac{n+2}{2}\Phi\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,dS,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}[|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{v}-2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}+n\Phi)\,\boldsymbol{x}]\,d\boldsymbol{x}=$$

$$=-\int\limits_{S}\left[\left(p|\boldsymbol{x}|^2+\frac{n-2}{2}\Phi^2\right)\boldsymbol{v}+2\left(\frac{n+2}{2}\Phi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-p\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{x}\right]dS.$$

Замечание 1. Можно также воспользоваться тем, что для уравнения (25.48) лагранжиан определен не однозначно, и для операторов X, допускаемых этим уравнением, искать лагранжиан, удовлетворяющий условию инвариантности (22.11). Например, для рассмотренного выше оператора растяжения T_0 таким путем находится

$$\mathscr{L}=|\boldsymbol{x}|^{-\frac{n+2}{2}}\Phi_t+|\nabla\Phi|^2. \tag{25.49'}$$

Операторы Нётер переводят этот лагранжиан в закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{x}|^{-\frac{n+2}{2}}\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{n-2}{2}\Phi\right)d\boldsymbol{x}=$$

$$=-\int\limits_{S}|\boldsymbol{x}|^{-\frac{n+2}{2}}\left[\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+p\right)\boldsymbol{x}-\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{n-2}{2}\Phi\right)\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{v}\,dS.$$

Замечание 2. В случае лагранжиана (25.49) операторы T_0 и T_i не удовлетворяют условию (22.11), но выполняется (22.13).

Замечание 3. Закон сохранения (25.47) получается на основе инвариантности уравнения (25.48) относительно растяжения переменных x^i $(x^i\mapsto ax^i)$ и произвольных преобразований t. Соответствующий инфинитезимальный оператор равен

$$X=x^i\frac{\partial}{\partial x^i}+g(t)\frac{\partial}{\partial t},$$

и для него находится следующий инвариантный лагранжиан:

$$\mathscr{L}=-h'(t)\,|\nabla\Phi|^2, \tag{25.49''}$$

где $h(t)=e^{-\int\frac{dt}{g(t)}}$. Отсюда по теореме Нётер получается (25.47).

25.4. Течение мелкой воды. Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}+g\nabla H=0,\\&H_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla H+H\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\end{aligned} \tag{25.50}$$

моделирующее течение мелкой воды над ровным дном. Здесь H — глубина воды, $\boldsymbol{v}$ — двумерный вектор скорости, g — ускорение свободного падения. (25.50) совпадает с системой уравнений двумерного изэнтропического течения газа с показателем адиабаты $\gamma=2$, если в условии изэнтропичности (25.26) положить $c=1/2$ и заменить ρ на gH. Так как значения $\gamma=2$ и $n=2$ удовлетворяют условию (25.14), уравнения (25.50) обладают дополнительной симметрией, приводящей к законам сохранения (25.24), (25.25). Эти дополнительные законы сохранения после указанных преобразований принимают вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} H[t(|\boldsymbol{v}|^2+gH)-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}]\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S}\frac{1}{2}gH^2(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} H[t^2(|\boldsymbol{v}|^2+gH)-\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S} gtH^2(t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS.$$

25.5. Базис законов сохранения для уравнения КдФ. Алгебру Ли—Беклунда, допускаемую уравнением Кортевега—де Фриза

$$u_t=u_3+uu_1, \qquad (25.51)$$

порождает оператор Галилея (обозначения из (18.27))

$$X_3=t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}.$$

Это следует из леммы 18.2 и формулы (18.30) для коммутатора X_3 с операторами Ли—Беклунда. Поэтому закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{u^2}{2}+xu\right)+D\left[t\left(\frac{u_1^2}{2}-uu_2-\frac{u^3}{3}\right)+u_1-xu_2-x\frac{u^2}{2}\right]=0, \qquad (25.52)$$

соответствующий оператору X_3, является фундаментальным для уравнения Кортевега—де Фриза: из него преобразованием (22.18) выводится вся бесконечная серия законов сохранения. Например, равенство $X_1=[X_2, X_3]$ говорит о том, что закон сохранения, соответствующий оператору $X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, получается из (25.52) действием оператора *) $X_2=\frac{\partial}{\partial t}$; это дает

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)+D\left(\frac{u_1^2}{2}-uu_2-\frac{u^3}{3}\right)=0.$$

Таким образом, равенство (25.52) и оператор рекурренции (18.32) решают задачу построения всех законов сохранения. В частности, плотность закона сохранения произвольного порядка согласно (22.28), (25.52) равна

$$h=(tu+x)f, \qquad (25.53)$$

*) В лемме 22.4 вместо канонического оператора $\overline{X}$ можно брать операторы Ли—Беклунда (16.14) с $\xi^i=\mathrm{const}$, так как они тоже коммутируют с D_i (см. (16.15)).

где f дается рекурренцией (18.35) (из получаемых функций h исключаются слагаемые вида $D\psi$, $\psi \in \mathcal{A}$).

Для применения теоремы Нётер и, следовательно, теоремы 22.4 достаточно сделать замену $u = w_1$ и переписать (25.51) в виде

$$w_{1t} = w_4 + w_1 w_2. \tag{25.51'}$$

Лагранжианом для этого уравнения является функция

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} w_1^3 - \frac{1}{2} w_2^2 - \frac{1}{2} w_1 w_t. \tag{25.54}$$

На самом деле рассматривается эволюционное уравнение

$$w_t = w_3 + \frac{1}{2} w_1^2, \tag{25.55}$$

дифференциальным следствием которого является (25.51′). Поэтому $\mathcal{L}$ — слабый лагранжиан для уравнения (25.55), и в данном случае используется модификация теоремы Нётер, сформулированная в замечании 22.3. Оператор Галилея для уравнения (25.55) имеет вид

$$X_3' = t\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial w}.$$

Продолжив этот оператор на производные w_t, w_1 и w_2, легко проверить выполнение условия (22.13) (здесь $D_i(\xi^i) = 0$):

$$X_3'\mathcal{L} = D_t\left(-\frac{x}{2} w_1\right) + D_x\left(\frac{x}{2} w_t\right).$$

Отсюда в соответствии с замечанием 22.2 получается закон сохранения, который переводится в (25.52) заменой $w_1 = u$.