ДОБАВЛЕНИЕ

(В этом добавлении приводятся результаты групповой классификации эволюционных уравнений, полученные к концу 1982 г.)

А. Задача групповой классификации эволюционных уравнений второго и третьего порядков, решенная в § 20 для полулинейных уравнений второго порядка (20.10) и для уравнений третьего порядка с постоянной сепарантой, имеющих вид (20.24), в последнее время была исследована в более общих случаях.

Для общих эволюционных уравнений второго порядка (20.1) Свинолупов С. И. и Соколов В. В. (Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями.— РЖ Мат., 1982, 11Б477 ДЕП.— Рукопись депонирована в ВИНИТИ 21 июля 1982 г., № 3927—82 Деп., 17 с.) уточнили формулы (20.8), (20.9) и (20.9′) путем анализа еще трех необходимых условий разрешимости уравнения (19.23). В результате выделились функции F, равные

$$\frac{u_2}{u_1^2}-\frac{a''}{a'}+bu_1,\qquad \frac{u_2}{u_1^2}+\frac{1}{u_1}+bu_1+c,$$

$$\frac{u_2}{(u_1+1)^2}-\frac{b'-k^2}{b+k}\,\frac{1}{u_1+1}+\frac{b^2-b'}{b+k}\,(u_1+1)+2\,\frac{b'+kb}{b+k},$$

$$\frac{u_2}{(u_1+1)^2}+\frac{a''}{a'}\,\frac{1}{u_1+1}+\left(\frac{a''}{a'}+ka\right)u_1-\frac{a''}{a'},$$

$$\frac{u_2+a'u_1}{(u_1+1)^2}+\frac{a''a}{a'\,(u_1+a)}-\left(\frac{a''}{a'}-\frac{a'}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)u_1,$$

которые исчерпывают случай (20.9), (20.9′); здесь $k=\mathrm{const}$, a, b, c — произвольные функции от u, причем $a(u)$ является плотностью закона сохранения соответствующего уравнения. В случае (20.8) требуется дополнительный анализ.

Из условия (19.37) легко следует, что уравнение третьего порядка с постоянной сепарантой, обладающее нетривиальной алгеброй Ли — Беклунда, должно иметь вид

$$u_t=u_3+a(u,\,u_1)\,u_2^2+b(u,\,u_1)\,u_2+c(u,\,u_1). \tag{1}$$

Кроме уравнений с $a=b=0$, рассмотренных в § 20.2, и уравнений, приводящихся к этому случаю простыми преобразованиями, были известны следующие два интегрируемых уравнения вида (1)

$$u_t=u_3-\frac{3}{2}\,\frac{u_1}{u_1^2+\alpha}\,u_2^2-\frac{3}{2}\,\frac{\alpha'u_1}{u_1^2+\alpha}\,u_2-\frac{3}{8}\,\alpha'^2\,\frac{u_1}{u_1^2+\alpha}+\frac{1}{2}\,\alpha''u_1, \tag{2}$$

где $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{4}k_i\,(u+k)^i$ — произвольный полином четвертой степени от u с вещественными коэффициентами (Calogero, Degasperis [1]) и

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{u_1} - \frac{3}{2}\wp(u)\, u_1^3 + \frac{k}{u_1}, \qquad k \neq 0, \tag{3}$$

где $k = \mathrm{const}$, $\wp(u)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса,

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \equiv 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3),$$
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

(Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.— УМН, 1980, т. 35, вып. 6, с. 47—68, уравнение (54)).

После того как были перечислены (Свинолупов С. И., Соколов В. В. О законах сохранения для уравнений, обладающих нетривиальной алгеброй Ли — Беклунда.— В сб.: Интегрируемые системы.— Уфа: БФ АН СССР, 1982) все возможные уравнения (1) с нетривиальной алгеброй (в предположении, что элементы алгебры не зависят от t, x), стало ясно, что среди них исключительными являются уравнения (2) и (3), а остальные приводятся к уравнению КдФ или к линейному уравнению довольно простыми преобразованиями. Недавно Хабиров С. В. (см. п. Б) и независимо Свинолупов С. И., Соколов В. В. (см. п. В) нашли преобразования вида

$$v = \Phi(u, u_1, \ldots, u_n), \tag{4}$$

связывающие (2) с уравнением КдФ, и доказали, что для уравнения (3) таких преобразований не существует, за исключением вырожденных случаев. Таким образом, результатом классификации уравнений третьего порядка с постоянной сепарантой, имеющих нетривиальную алгебру, являются линейное уравнение, уравнение КдФ и (3). Этим решается также задача классификации полулинейных уравнений $u_t = a(u)u_3 + \varphi(u, u_1, u_2)$; действительно, при $a' \neq 0$ можно считать $a(u) = u^3$ (подстановка $a(u) = v^3$), а такие уравнения с нетривиальной алгеброй приводятся к случаю постоянной сепаранты заменой (20.44).

Для уравнения вида (3) с $k = 0$ (в этом случае вместо $\wp(u)$ можно взять произвольную функцию от u) легко находится оператор рекурренции, так как точечной заменой $y = x$, $w = \Phi(u)$ оно сводится к уравнению (20.43), для которого оператор рекурренции

$$L = D^2 - 2\frac{w_2}{w_1}D + w_1 D^{-1}\cdot\left(\frac{w_3}{w_1^2} - \frac{w_2^2}{w_1^3}\right)D$$

получается по формулам (19.46), (19.50′) и (20.42).

Б. (Хабиров С. В.) Изучаются преобразования эквивалентности вида (4) для уравнений

$$u_t = u_3 + f(u, u_1, u_2), \tag{5}$$
$$v_t = v_3 + h(v, v_1, v_2). \tag{6}$$

При этом не требуется, чтобы (5) и (6) допускали нетривиальную алгебру. Все уравнения рассматриваются с точностью до точечных замен, так что речь идет о преобразованиях (4) с $n \geq 1$.

Оказалось, что существование преобразований эквивалентности накладывает сильные ограничения на функции f и h. Например, если в качестве (6) берется уравнение КдФ ($h = vv_1$), то выясняется, что (5) должно быть вида (1), а преобразование (4) в этом случае имеет порядок $n \leq 3$; затем удается перечислить уравнения (1), приводимые к уравнению КдФ преобразованиями первого, второго и третьего порядков, и найти сами преобразования. В частности, (2) связано с уравнением

$$v_t = v_3 + vv_1 \tag{7}$$

следующим преобразованием третьего порядка:

$$v = pu_3 + qu_2^2 + ru_2 + s,$$

где

$$p = 3\frac{z}{u_1}, \quad q = -\frac{3}{2\alpha}(1-z^2)(1+2z),$$

$$r = \frac{6(1-z)}{u+k} + \alpha' q,$$

$$s = \frac{\alpha''}{2} + 6\frac{\alpha}{(u+k)^2} + 3z\left(\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha}{u+k}\right) + \frac{\alpha'^2}{4}q,$$

$$z = \pm\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+\alpha}}.$$

Следующие уравнения связаны с (7) преобразованиями второго порядка (после уравнения указано соответствующее преобразование):

$$u_t = u_3 - \frac{3}{4}\frac{u_2^2}{u_1} - \frac{1}{3}u_1^2 - \frac{2}{3}ku_1^{3/2}, \qquad v = \frac{u_2}{\sqrt{u_1}} - \frac{2}{3}u_1 + k\sqrt{u_1};$$

$$u_t = u_3 - \frac{1}{18}u_1^3 + \frac{1}{2}ku_1^2, \qquad v = u_2 - \frac{1}{6}u_1^2 + ku_1;$$

$$u_t = u_3 + 3\frac{a'}{a}u_1u_2 + \left(\frac{a''}{a} - \frac{a^2}{18}\right)u_1^3, \qquad v = au_2 + \left(a' - \frac{a^2}{6}\right)u_1^2;$$

здесь $k = \text{const}$, $a = a(u)$ — произвольная функция.

Уравнение (3) в общем случае не связано неточечными преобразованиями вида (4) ни с каким уравнением (6). Имеются исключительные случаи, когда оно приводится к уравнению КдФ. А именно, уравнение (3) (которое запишем здесь с $k=6$) связано с (7) преобразованием

$$v = 3\left(\frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2} + 4\varepsilon\frac{u_2}{u_1^2} - \frac{3}{2}\wp u_1^2 - \frac{2}{u_1^2}\right), \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{8}$$

если $\wp = \text{const}$, и преобразованием

$$v = -3\left(\frac{u_3}{u_1} - \frac{1}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2} + \varepsilon(u)u_2 + \varepsilon'(u)u_1^2 + \frac{3}{2}\wp(u)u_1^2 + \frac{2}{u_1^2}\right), \tag{9}$$

если

$$\wp = \frac{1}{u^2}, \qquad \text{тогда } \varepsilon = \frac{2}{u}, \tag{9a}$$

$$\text{или } \wp = \frac{\alpha^2}{4}\left(-\frac{2}{3} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha u}{2}\right), \qquad \text{тогда } \varepsilon = \alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha u}{2}, \tag{9b}$$

$$\text{или } \wp = \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{2}{3} + \operatorname{th}^2\frac{\alpha u}{2}\right), \qquad \text{тогда } \varepsilon = \alpha\operatorname{th}\frac{\alpha u}{2}, \tag{9c}$$

где $\alpha = \text{const}$.

Алгебра Ли — Беклунда для уравнения (3) с произвольной функцией Вейерштрасса нетривиальна и содержит следующий элемент пятого порядка:

$$u_5 - 5\frac{u_2u_4}{u_1} - \frac{5}{2}\frac{u_3^2}{u_1} + \left(\frac{25}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2} - \frac{5}{2}\frac{k}{u_1^2} - \frac{15}{2}\wp u_1^2\right)u_3 - \frac{45}{8}\frac{u_2^4}{u_1^3} + \frac{25}{4}k\frac{u_2^2}{u_1^3} +$$

$$+ \frac{15}{4}\wp u_1u_2^2 - \frac{15}{2}\wp' u_1^3u_2 - \frac{3}{2}\wp'' u_1^5 + \frac{27}{8}\wp^2u_1^5 - \frac{5}{8}\frac{k^2}{u_1^3} + \frac{5}{4}k\wp u_1.$$

В. (Свинолупов С. И., Соколов В. В.) Уравнение (2) можно связать с (20.32) преобразованием (4) первого порядка. Для этого сначала (2) приводится к виду

$$u_t=u_3-\frac{3}{2}\frac{u_1}{u_1^2+1}u_2^2-\frac{3}{2}\wp(u)\left(u_1^3+u_1\right) \tag{2'}$$

точечной заменой, а затем делается преобразование

$$v=2\ln\left(u_1+\sqrt{u_1^2+1}\right)+\ln\psi(u)$$

с функцией $\psi(u)$, определяемой из уравнения

$$A\psi^2+\left(\frac{3}{2}\wp(u)+C\right)\psi+B=0.$$

Если коэффициенты A, B, C выражаются через иррациональные инварианты функции $\wp(u)$ формулами

$$AB=\frac{9}{64}\left(e_1^2-4e_2e_3\right),\qquad C=\frac{3}{4}e_1,$$

то указанное преобразование переводит (2′) в

$$v_t=v_3-\frac{1}{8}v_1^3+\left(Ae^v+Be^{-v}+C\right)v_1.$$

Теперь по лемме 20.2.2 можно построить преобразование третьего порядка, связывающее (2′) с (7).

Для уравнения (3) предлагается следующая цепочка преобразований, позволяющая изучить его с разных точек зрения. После подстановки $v=\wp\left(\frac{u}{2}\right)$ (3) принимает вид

$$v_t=v_3-\frac{3}{2}\frac{v_2^2}{v_1}+\frac{av^3+bv+c}{v_1} \tag{3'}$$

с постоянными a, b, c. Это уравнение эквивалентно (7), когда полином третьей степени av^3+bv+c имеет кратные нули. В общем случае преобразованием

$$w=-3\frac{v_3}{v_1}+\frac{3}{2}\frac{v_2^2}{v_1^2}-\frac{av^3+bv+c}{v_1^2}$$

оно приводится к системе

$$v_t=-2v_3-wv_1,\qquad w_t=w_3+ww_1-12av_1$$

с известной (L, A)-парой (Д р и н ф е л ь д В. Г., С о к о л о в В. В. Новые эволюционные уравнения, обладающие (L, A)-парой.— Дифференциальные уравнения с частными производными/Труды семинара С. Л. Соболева, № 2.— Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1981, с. 5—9).

Г. Вместо преобразований (4), разрешенных относительно v, рассмотрим более общее преобразование между дифференциальными переменными u, v, задаваемое дифференциальным уравнением

$$\Phi(u, u_1, \ldots, u_n; v, v_1, \ldots, v_n)=0. \tag{10}$$

Пусть $[\Phi]$ — дифференциальное многообразие в пространстве переменных $(u, v; u_1, v_1; \ldots)$, заданное уравнением (10). Эволюционные уравнения

$$u_t=F(u, u_1, \ldots, u_m), \tag{11}$$

$$v_t=H(v, v_1, \ldots, v_m) \tag{12}$$

будем рассматривать как уравнения Ли—Беклунда (см. замечание 17.1.1), определяющие группу G с каноническим оператором $X=F\frac{\partial}{\partial u}+H\frac{\partial}{\partial v}+\ldots$ Уравнения (11) и (12) эквивалентны, если существует многообразие $[\Phi]$, инвариантное относительно группы G; при этом само преобразование эквивалентности между уравнениями (11) и (12) задается дифференциальным уравнением (10). Таким образом, вопрос об эквивалентности эволюционных уравнений сводится к исследованию критерия инвариантности $X\Phi|_{[\Phi]}=0$. Путем аналогичного обобщения преобразования (19.44), включающего замену переменной x, получается общее преобразование Беклунда для эволюционных уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

На стр. 213 при анализе уравнения $v_t=v^2(v_2+h(v)v_1+k)$ пропущен случай $h\equiv 0$, $k\neq 0$. Поэтому в лемме 20.1.2 и теореме 20.1 уравнение (20.19) нужно заменить на

$$v_t=v^2(v_2+k),\quad k=\text{const}. \tag{20.19bis}$$

Как заметили В. А. Дородницын и С. Р. Свирщевский, преобразование (20.20″), линеаризующее уравнение (20.19), связывает (20.19bis) с уравнением Бюргерса $u_t=u_2+kuu_1$, $u=u(t, x)$.