

Н.Х.Ибрагимов

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Книга отражает современное развитие теоретико-групповых методов применительно к задачам математической физики. Она включает теорию инвариантов групп преобразований в римановых пространствах и групповой анализ уравнений Эйнштейна. Изучаются алгебро-геометрические аспекты принципа Гюйгенса и законов сохранения. Излагаются основы теории формальных групп преобразований Ли—Беклунда, инвариантных дифференциальных многообразий и проводится групповая классификация нелинейных дифференциальных уравнений.

Расчитана на математиков, физиков и механиков, интересующихся вопросами качественного анализа дифференциальных уравнений.

Содержание

Предисловие	6
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ	
ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	
Вводная глава. Группы и дифференциальные уравнения	7
§ 1 Непрерывные группы	7
1.1. Топологические группы	7
1.2. Группы Ли	7
1.3. Локальные группы	10
1.4. Локальные группы Ли	11
§ 2. Алгебры Ли	12
2.1. Определения	12
2.2. Алгебры Ли и локальные группы Ли	15
2.3. Внутренние автоморфизмы	16
2.4. Теорема Леви — Мальцева	18
§ 3. Группы преобразований	19
3.1. Локальные группы преобразований	19
3.2. Уравнение Ли	20
3.3. Инварианты	22
3.4. Инвариантные многообразия	23
§ 4. Инвариантные дифференциальные уравнения	2Б
4.1. Продолжение точечных преобразований	2Б
4.2. Определяющее уравнение	28
4.3. Инвариантные и частично инвариантные решения	30
4.4. Метод инвариантных мажорант	32
§ 5. Примеры	38
Глава 1. Движения в римановых пространствах	48
§ 6. Общая группа движений	48
6.1. Локальные римановы многообразия	48
6.2. Произвольные движения в V_n	51
6.3. Дефект группы движений в V_n	54

6.4. Инвариантное семейство пространств	55
§ 7. Примеры движений	58
7.1. Изометрии	58
7.2. Конформные движения	59
7.3. Движения с $\delta = 2$	61
7.4. Неконформные движения с $\delta = 1$	64
7.5. Движения с заданными инвариантами	65
§ 8. Римановы пространства с нетривиальной конформной группой	67
8.1. Конформные пространства	67
8.2. Пространства постоянной кривизны	70
8.3. Конформно-плоские пространства	72
8.4. Пространства с определенной метрикой	74
8.5. Лоренцевы пространства	75
§ 9. Групповой анализ уравнений Эйнштейна	78
9.1. Гармонические координаты	78
9.2. Группа, допускаемая уравнениями Эйнштейна	82
9.3. Разложение Ли — Вессио	83
9.4. Точные решения	85
§ 10. Конформно-инвариантные уравнения второго порядка	90
10.1. Предварительные рассуждения	90
10.2. Линейные уравнения в S_n	93
10.3. Полулинейные уравнения в S_n	95
10.4. Уравнения с группой изометрий максимального порядка	98
10.5. Волновое уравнение в лоренцевых пространствах	99
Глава 2. Принцип Гюйгенса с групповой точки зрения	102
§ 11. Общие рассуждения и история вопроса	102
11.1. Проблема Адамара	102
11.2. Критерий Адамара	103
11.3. Теорема Матиссона — Асгейрссона	104
11.4. Необходимые условия Гюнтера и Макленагана	107
11.5. Преобразование Лагнеза — Штельмахера	109
11.6. Современное состояние и обобщения проблемы Адамара	112
§ 12. Волновое уравнение в V_4	114
12.1. Вычисление геодезического расстояния в метрике плоской волны	114
12.2. Конформная инвариантность и принцип Гюйгенса	118
12.3. Решение задачи Коши	121
12.4. Случай тривиальной конформной группы	126
§ 13. Принцип Гюйгенса в S_{n+1}	127
13.1. Предварительный анализ решения	127
13.2. Преобразование Фурье функции Бесселя $J_0(a \mu)$	131
13.3. Метод спуска. Представление решения для произвольных n	132
13.4. Обсуждение принципа Гюйгенса	135

13.5. Нарушение связи принципа Гюйгенса с конформной инвариантностью	137
--	-----

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Глава 3. Введение в теорию групп Ли-Беклунда	139
§ 14. Касательные преобразования Ли и теорема Беклунда	139
14.1. Контактные преобразования	139
14.2. Касательные преобразования конечного порядка	143
14.3. Преобразование Бианки — Ли	147
14.4. Преобразования Беклунда. Примеры	149
14.5. Понятие касательных преобразований бесконечного порядка	154
§ 15. Формальные группы	155
15.1. Уравнение Ли для формальных однопараметрических групп	155
15.2. Инварианты и инвариантные многообразия	160
§ 16. Однопараметрические группы преобразований Ли — Беклунда	162
16.1. Определение и инфинитезимальный критерий	162
16.2. Операторы Ли — Беклунда. Канонический оператор	167
16.3. Примеры	169
§ 17. Инвариантные дифференциальные многообразия	171
17.1. Критерий инвариантности	171
17.2. Примеры решения определяющего уравнения	174
17.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения	176
17.4. Теорема об изоморфизме	179
17.5. Линеаризация преобразованиями Ли — Беклунда	181
Глава 4. Уравнения с бесконечной группой Ли — Беклунда	184
§ 18. Характерные примеры	184
18.1. Уравнение теплопроводности	184
18.2. Уравнение Кортевега — де Фриза	188
18.3. Уравнение пятого порядка	192
18.4. Волновое уравнение	194
§ 19. Эволюционные уравнения	194
19.1. Алгебра \mathcal{A}_F	194
19.2. Формула Фаа де Бруно	199
19.3. Алгебра \mathcal{L}_F	201
19.4. Преобразования эквивалентности	206
§ 20. Анализ эволюционных уравнений второго и третьего порядка	209
20.1. $m=2$	209
20.2. $m=3$	214
20.3. Две системы нелинейных уравнений	218
§ 21. Уравнение $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$	219
21.1. Анализ общего случая	219
21.2. Классификация уравнений $s=F(z)$	222
21.3. Система двух нелинейных уравнений	225

Глава 5. Законы сохранения	227
§ 22. Основные теоремы	227
22.1. Тождество Нётер	227
22.2. Теорема Нётер	228
22.3. Инвариантность на экстремальных	229
22.4. Действие присоединенной алгебры	230
22.5. Интегралы эволюционных уравнений	232
§ 23. Примеры	234
23.1. Движение в пространстве де Ситтера	234
23.2. Уравнение $u_{tt} + \Delta^2 u = 0$	236
23.3. Нестационарное околосзвуковое течение газа	236
23.4. Короткие волны	239
§ 24. Группа Лоренца	240
24.1. Законы сохранения в релятивистской механике	240
24.2. Нелинейное волновое уравнение	242
24.3. Уравнение Дирака	244
§ 25. Группа Галилея	247
25.1. Свободное движение частицы	247
25.2. Идеальный газ	249
25.3. Несжимаемая жидкость	256
25.4. Течение мелкой воды	259
25.5. Базис законов сохранения для уравнения КдФ	260
Добавление	262
Литература	267
Предметный указатель	279