Глава II.

Задача о разложении в ряд произвольных функций.

Многие из соотношений, рассмотренных в предыдущей главе, находят далеко идущую аналогию, если вместо векторов в n-мерном пространстве рассматривать функции от одной или многих переменных, определенные в данной *основной области* G. Так, например, тому факту, что в пространстве n измерений всякий вектор может быть линейно представлен с помощью n произвольно выбранных независимых векторов, соответствует задача о выражении более или менее произвольно взятой функции, определенной в основной области G, в виде линейной комбинации заданных функций. (Множество заданных функций должно быть бесконечным, в чем мы непосредственно убедимся в дальнейшем.) Мы говорим тогда *о задаче разложения произвольно взятой функции по заданной системе функций.*

В настоящей главе мы рассмотрим с общей точки зрения этот вопрос, встречающийся в самых разнообразных формах в задачах математической физики.

При этом мы ограничиваемся *кусочно-непрерывными функциями*, т. е. такими функциями, для которых основная область G может быть разбита на конечное число частичных областей так, чтобы функция внутри каждой из них была непрерывна и стремилась при произвольном приближении изнутри к границе частичной области к определенному конечному пределу. Для более удобной записи мы сначала будем предполагать, что мы имеем дело с функциями только от одного переменного x, основной областью G которых является конечный отрезок оси x.

Если речь будет итти о функциях от многих переменных, например от двух переменных x и y, то мы будем предполагать, что основная область G ограничена конечным числом дуг кривых, с непрерывно вращающейся касательной. Когда мы будем считать точки границы принадлежащими основной области, то мы будем говорить о „замкнутой области“, если только это не вытекает из самого текста.

Далее, мы часто будем предполагать относительно рассматриваемых функций, что они *кусочно-гладкие* т. е. что они кусочно-непрерывны и имеют кусочно-непрерывные первые производные. Мы предполагаем, что наши функции имеют действительные значения в том случае, когда не оговорено противоположное.

§ 1. Ортогональные системы функций.

1. Определения. Под *скалярным* или *внутренним произведением* (f, g) *или* (fg) *двух функций* $f(x)$ и $g(x)$ мы разумеем взятый по основной области интеграл[1]).

$$(f, g) = \int fg\,dx. \tag{1}$$

Это произведение удовлетворяет неравенству Шварца:

$$(f, g)^2 \leqslant (f, f)(g, g), \tag{2}$$

которое так же, как и в случае векторов, либо вытекает из определенного положительного характера квадратичной относительно λ функции

$$\int (\lambda f + g)^2 dx,$$

либо же следует непосредственно из тождества:

$$(f, g)^2 = (f, f)(g, g) - \frac{1}{2}\iint [f(x)g(\xi) - f(\xi)g(x)]^2 dx\,d\xi;$$

знак равенства имеет место в том и только в том случае, если f и g пропорциональны. Две функции, скалярное произведение которых равно нулю, будем называть *ортогональными*. Скалярное произведение функции $f(x)$ на самое себя будем называть *нормом* этой функции и писать так:

$$Nf = (f, f) = \int f^2 dx; \tag{3}$$

функцию, норм которой равен единице, назовем *нормированной* функцией. Систему нормированных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., в которой каждые две различные функции взаимно ортогональны, будем называть *ортогональной нормированной системой*, а характеризующие ее соотношения

$$(\varphi_\nu, \varphi_\mu) = e_{\nu\mu} \quad (e_{\nu\nu} = 1, \quad e_{\nu\mu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu)$$

назовем *соотношениями ортогональности*.

Пример ортогональной нормированной системы функций в интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ или вообще в любом интервале длины 2π представляют функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Для функций действительного переменного, принимающих комплексные значения, удобно ввести обобщение понятия ортогональности.

---

[1]) Мы в дальнейшем опускаем границы интегрирования там, где это не может привести к недоразумениям.

Две таких функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными, если имеют место соотношения:

$$(f, \bar{g}) = (\bar{f}, g) = 0,$$

причем $\bar{f}$ и $\bar{g}$ означают, как это обычно принято, сопряженные комплексные функции по отношению к f и g.

Функция $f(x)$ называется *нормированной*, если

$$Nf = \int |f|^2 dx = 1.$$

Простейший пример комплексной ортогональной системы представляют в интервале $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ показательные функции:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}}, \ldots,$$

что непосредственно видно из „*соотношений ортогональности*":

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\mu-\nu)x} dx = e_{\mu\nu} \quad (e_{\nu\nu} = 1, \quad e_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu). \tag{4}$$

Функции $f_1, \ldots, f_r$ называются *линейно зависимыми*, если они удовлетворяют тождественно относительно x однородному линейному соотношению

$$\sum_{i=1}^{r} c_i f_i = 0$$

с постоянными коэфициентами c_i $(i = 1, \ldots, r)$, которые не все равны нулю. В противном случае эти r функций называются *линейно независимыми*. Важно заметить, что функции ортогональной системы всегда линейно независимы. В самом деле, из соотношения

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = 0$$

следовало бы, если его умножить на φ_ν и интегрировать, что $c_\nu = 0$.

2. Ортогонализация функций. Из заданной бесконечной системы функций $v_1, v_2, \ldots,$ обладающей тем свойством, что при любом r каждые r произвольно выбранных функций линейно независимы, можно при помощи „процесса ортогонализации" получить ортогональную нормированную систему функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ выбирая φ_n как соответствующую линейную комбинацию функций $v_1, \ldots, v_n$. Сначала полагаем

$$\varphi_1 = \frac{v_1}{\sqrt{Nv_1}}.$$

Затем определяем любые два не обращающихся одновременно в нуль числа c_1 и c_2 так, чтобы функция $\varphi_2' = c_1\varphi_1 + c_2 v_2$ была ортогональной к φ_1, т. е. чтобы имело место равенство:

$$c_1 + c_2(\varphi_1, v_2) = 0.$$

Функция φ_2' в силу линейной независимости v_1 и v_2, а следовательно, и функций φ_1 и v_2 не может тождественно равняться нулю.

Таким образом

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2'}{\sqrt{N\varphi_2'}}$$

представляет нормированную функцию, ортогональную к φ_1.

Далее, образуем функцию

$$\varphi_3' = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + c_3^* v_3,$$

выбирая три не равных одновременно нулю числа c_1^*, c_2^*, c_3^*, удовлетворяющие двум линейным однородным уравнениям:

$$(\varphi_3'\varphi_1) = c_1^* + c_3^*(\varphi_1 v_3) = 0, \quad (\varphi_3'\varphi_2) = c_2^* + c_3^*(\varphi_2 v_3) = 0.$$

В силу линейной независимости v_1, v_2, v_3, а вместе с тем и $\varphi_1, \varphi_2, v_3$ функция φ_3' не может равняться нулю тождественно, и потому

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_3'}{\sqrt{N\varphi_3'}}$$

представляет нормированную функцию, ортогональную к φ_1 и φ_2.

Продолжая неограниченно этот процесс, мы получаем искомую ортогональную систему функций с помощью рекуррентной формулы:

$$\varphi_{n+1} = \frac{\varphi'_{n+1}}{\sqrt{N\varphi'_{n+1}}}, \quad \varphi'_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{h=1}^{n} \varphi_h(\varphi_h v_{n+1}).$$

Когда мы в дальнейшем будем говорить об ортогонализации, то мы всегда будем разуметь только что указанный процесс, который одновременно с ортогонализацией дает и нормирование, если только не будет явно указано нечто другое.

3. Неравенство Бесселя. Условие полноты системы. Аппроксимирование в среднем. Если дана ортогональная нормированная система функций φ_1, φ_2, ... и любая функция f, то числа

$$c_\nu = (f\varphi_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

называются *коэфициентами разложения* или *компонентами* функции f относительно заданной ортогональной системы[1]).

Из непосредственно очевидного соотношения

$$\int \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right)^2 dx \geqslant 0 \tag{6}$$

---

[1]) В связи с теорией рядов Фурье иногда употребляют также выражение „коэфициенты Фурье".

путем возведения в квадрат и почленного интегрирования получаем:

$$0 \leqslant \int f^2 dx - 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int \varphi_\nu f\, dx + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 = Nf - 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2,$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \leqslant Nf; \tag{7}$$

так как в правой части находится постоянное, не зависящее от n число, то

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \leqslant Nf. \tag{8}$$

Это основное неравенство, *неравенство Бесселя*, справедливо для любой ортогональной нормированной системы. Это неравенство доказывает сходимость ряда с неотрицательными членами, составленного из квадратов коэфициентов разложения, находящегося в левой части соотношения (8).

Для системы функций, принимающих комплексные значения, справедливо соответствующее соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 \leqslant Nf = (f, \bar{f}), \tag{8'}$$

если под c_ν разуметь коэфициент разложения $c_\nu = (f, \bar{\varphi}_\nu)$.

Оно вытекает аналогично случаю действительных функций из неравенства:

$$\int \left| f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu \right|^2 dx = Nf - \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2 \geqslant 0.$$

Интегральное выражение, стоящее в левой части формулы (6) получается совершенно естественно, если поставить себе задачу *аппроксимировать в смысле метода наименьших квадратов, данную функцию $f(x)$ с помощью линейного агрегата*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu$$

с постоянными коэфициентами γ_ν и фиксированным числом слагаемых и так, чтобы „средняя квадратичная ошибка“

$$M = \int (f - \sum \gamma_\nu \varphi_\nu)^2 dx$$

была возможно меньше. Действительно, путем простого преобразования интеграла получаем тождество:

$$M = \int \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx = \int f^2 dx + \sum_{1}^{n} (\gamma_\nu - c_\nu)^2 - \sum_{1}^{n} c_\nu^2,$$

из которого непосредственно следует, что минимум M достигается при $\gamma_\nu = c_\nu$.

Если для любой кусочно-непрерывной функции f можно сделать наименьшую среднюю квадратичную ошибку

$$\int \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_n\right)^2 dx$$

путем соответствующего выбора n меньше сколь угодно малого положительного числа, т. е. если можно каждую такую функцию аппроксимировать в смысле способа наименьших квадратов или, как мы будем говорить, *в „среднем“* с произвольной точностью, с помощью линейного аггрегата $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu$ с достаточно большим числом членов, то систему функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ мы будем называть *„полной ортогональной системой функций“*.

На основании предыдущих рассуждений коэфициенты разложения $c_\nu = (f\varphi_\nu)$ любой функции f удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 = Nf, \tag{9}$$

которое мы будем называть *„условием полноты“*.

Это условие можно записать в более общем виде:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu d_\nu = (f, g), \tag{9'}$$

где

$$c_\nu = (f\varphi_\nu), \quad d_\nu = (g\varphi_\nu),$$

который получается, если применить формулу (9) к функции $f + g$:

$$N(f+g) = Nf + Ng + 2(f, g) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu + d_\nu)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu^2 + d_\nu^2 + 2c_\nu d_\nu)$$

и затем вычесть соответствующие равенства для f и g.

Впрочем, для полноты системы функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ достаточно, чтобы условие полноты (9) было выполнено для всех непрерывных функций f. В самом деле, всякая кусочно-непрерывная функция g может быть аппроксимирована с помощью непрерывной функции f так, чтобы интеграл $\int (f-g)^2 dx$ имел сколь угодно малое значение. Такую функцию f можно, например, построить следующим образом: представим себе кривую, изображающую функцию g; около каждой точки разрыва x_i этой функции отметим на кривой две точки с абсциссами $x_i - \delta$ и $x_i + \delta$, где δ можно выбирать сколь угодно малым; эту пару точек соединим прямолинейным отрезком и этим отрезком заменяем нашу кривую в каждом таком интервале [1]). Если $a_1, a_2, \ldots$ представляют коэфициенты разложения функции g, а $c_1, c_2 \ldots$ — коэфициенты разложения функции f, то из того, что интеграл $\int\left(f-\sum c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx$ может быть сделан путем соответствующего выбора n сколь угодно малым, следует на основании неравенства Шварца справедливость аналогичного утверждения для интеграла:

$$M' = \int\left(g-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx = \int\left[(g-f)+\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)\right]^2 dx.$$

В самом деле,

$$M' = N(g-f)+N\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)+2\left(g-f, f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right),$$

следовательно,

$$M' \leqslant N(g-f)+N\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)+2\sqrt{N(g-f)\,N\left(f-\sum c_\nu \varphi_\nu\right)}.$$

Но

$$M=\int\left(g-\sum a_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx \leqslant M',$$

так как коэфициенты разложения a_ν для g дают наименьшую квадратичную ошибку. Таким образом условие полноты доказано и для функции f.

Следует обратить внимание на то, что из полноты системы функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, т. е. из равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx = 0$$

ни в коем случае нельзя делать заключение, что $f=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu$, т. е. что функция f разлагается в ряд по функциям φ_ν. Однако, *если ряд* $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu$ *равномерно сходится и мы можем поэтому сделать переход к предельной функции под знаком интеграла, то разложимость функции* f *очевидна*. Полнота данной системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ является при этом, конечно, необходимым условием; действительно, выделив, например, из полной системы одну функцию, мы видим, что все компоненты ее относительно остающейся неполной системы равны нулю. Но и для полной системы

[1]) В самом деле, пусть M означает верхнюю грань $|g(x)|$, а q — число точек разрыва функции $g(x)$ в промежутке интегрирования, тогда в неравенстве

$$\int (f-g)^2\, dx < 8\, M^2 \delta\, q$$

правую часть можно сделать сколь угодно малой при соответствующем выборе δ.

функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ вопрос о разложимости функции f требует более подробного исследования, которое мы в дальнейшем (гл. V и VI) будем еще проводить в различных случаях.

Содержание предыдущего предельного равенства мы будем также выражать следующим образом: *последовательность функций* $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu$ *сходится в среднем к функции* f.

Далее, приводим теорему: *кусочно-непрерывная функция однозначно определяется своими коэфициентами разложения по заданной полной ортогональной системе, т. е. две кусочно-непрерывные функции тождественны между собой, если их коэфициенты разложения соответственно равны.* Действительно, разность двух таких функций с равными коэфициентами имеет коэфициенты, равные нулю, и следовательно, в силу условия полноты и норм ее равен нулю; следовательно, эта разность сама должна тождественно равняться нулю. Таким образом функция однозначно характеризуется своим разложением по полной ортогональной системе функций и в том случае, когда разложение сходится не в обычном смысле, а только в среднем. Во многих рассуждениях достаточно бывает этой сходимости в среднем.

Понятие полноты системы функций сохраняет смысл и в том случае, когда система не ортогональна и не нормирована. Вообще мы будем называть систему функций полной системой, если любая кусочно-непрерывная функция может быть аппроксимирована в среднем с любой точностью при помощи линейного агрегата этих функций. Полнота такой системы переносится также на ортогональную систему, получающуюся из нее путем ортогонализации.

4. Ортогональные и унитарные преобразования бесконечно большого числа переменных. Ортогональные нормированные системы функций аналогичны во многих отношениях ортогональным системам нормированных векторов в n-мерном пространстве; компоненты $c_\nu = (f\varphi_\nu)$ функции f можно рассматривать как прямоугольные координаты функции f в системе координат, определенной при помощи „координатных функций" $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ в пространстве бесконечно большого числа измерений.

Если $\psi_1, \psi_2, \ldots$ — другая ортогональная нормированная система, в которой компонентами функции f служат $d_\nu = (f\psi_\nu)$, и если обе системы являются полными, то применение условия полноты (9') к функции f и функциям φ_i по отношению к системе $\psi_1, \psi_2, \ldots$, непосредственно дает бесконечную систему равенств:

$$c_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} d_k, \quad a_{ik} = (\varphi_i \psi_k) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Соответственным образом получаем обратную систему равенств:

$$d_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} c_k, \quad a_{ki} = (\psi_i \varphi_k) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{10'}$$

Коэфициенты удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}a_{jk}=(\varphi_i\varphi_j)=\begin{cases}0 \text{ при } i\neq j\\ 1 \text{ при } i=j\end{cases} \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}a_{kj}=(\psi_i\psi_j)=\begin{cases}0 \text{ при } j\neq i\\ 1 \text{ при } j=i\end{cases} \tag{11'}$$

представляющим обобщение условий ортогональности в пространстве n измерений (гл. I, § 1) на пространство бесконечно большого числа измерений. Поэтому преобразование (10), удовлетворяющее условиям (11) и (11'), называют *ортогональным преобразованием бесконечно большого числа переменных.*

Аналогично устанавливается связь между коэфициентами двух комплексных ортогональных систем при помощи *унитарного преобразования бесконечно·большого числа переменных.*

5. Справедливость результатов в случае нескольких независимых переменных. Расширение предпосылок. Все установленные нами понятия и рассуждения остаются справедливыми, если вместо функций от одной переменной x рассматривать функции от нескольких переменных, например от x и y, причем переменные изменяются в заданной конечной области G, элемент площади которой обозначим через dG. Внутреннее произведение (f, g) двух функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, определенных в этой области G, мы определяем равенством $(f, g)=\int\limits_G fg\,dG$, и тогда в обозначениях и доказательствах этого параграфа не приходится делать никаких существенных изменений.

Далее, все установленные понятия и факты сохраняются и в том случае, если считать основную область бесконечной и допустить, что все встречающиеся функции вместе с их квадратами интегрируемы во всей основной области.

Наконец, заметим, что наши понятия сохраняют смысл, если функция f обращается в бесконечность в основной области так, что квадрат ее интегрируем во всей основной области.

6. Построение полных систем функций от многих переменных. Если известны полные системы функций от одной переменной, то можно построить полные системы функций от двух и большего числа переменных на основании следующей теоремы: если система функций

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ldots$$

представляет полную ортогональную нормированную систему функций в интервале $a\leqslant s\leqslant b$ и если для любого $i=1, 2\ldots$ в интервале $c\leqslant t\leqslant d$ функции

$$\psi_{1i}(t),\ \psi_{2i}(t);\ldots$$

образуют такую же систему, то функции

$$\omega_{ik}(s, t)=\varphi_i(s)\,\psi_{ki}(t)$$

образуют полную ортогональную систему функций от s и t в прямоугольнике $a \leqslant s \leqslant b$, $c \leqslant t \leqslant d$. В частности система функций $\varphi_i(s)\varphi_h(t)$ является ортогональной и полной системой в области квадрата $a \leqslant s \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Если $f(s, t)$ является непрерывной функцией от s и t в этом прямоугольнике, то имеет место условие полноты:

$$\iint f^2(s, t)\,ds\,dt = \sum_{i,k=1}^{n}\left(\iint f(s, t)\,\omega_{ik}(s, t)\,ds\,dt\right)^2.$$

Для доказательства исходим из соотношения:

$$\int f^2(s, t)\,ds = \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2(t),$$

где $g_i(t) = \int f(s,t)\,\varphi_i(s)\,ds$, выражающего полноту системы функций φ_i. Так как ряд в правой части сходится равномерно[1]), то мы имеем право почленно интегрировать по t и получаем:

$$\iint f^2(s,t)\,ds\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}\int g_i^2(t)\,dt.$$

К i-му члену в правой части применяем условие полноты по отношению к системе функций $\psi_{ki}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и непосредственно получаем искомое соотношение.

§ 2. Принцип предельных точек в функциональном пространстве.

1. **Сходимость в функциональном пространстве.** Аналогия между функциями и векторами в n-мерном пространстве часто

---

[1]) Это следует из теоремы Дини (Dini): если ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(t)$ *положительных* непрерывных функций, сходящихся в замкнутой области G, представляет непрерывную функцию $S(t)$, то этот ряд сходится равномерно. Наметим здесь доказательство в самых общих чертах. Полагаем $S_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(t)$, $S(t) = S_n(t) + R_n(t)$. Если бы утверждение было неправильным, то существовали бы положительное число a, неограниченно возрастающая последовательность чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots$ и соответствующие значения $t_1, t_2, t_3, \ldots$ в области G такие, что $R_{n_i}(t_i) \geqslant a$, и следовательно, $S_{n_i}(t_i) \leqslant S(t_i) - a$. При этом мы можем допустить, что значения t_i стремятся к некоторому пределу t из области G. Пусть теперь N означает определенно выбранное число, тогда при $n_i \geqslant N$ и $S_{n_i}(t_i) \geqslant S_N(t_i)$, следовательно, $S_N(t_i) \leqslant S(t_i) - a$. Здесь мы неограниченно увеличиваем i и получаем в силу наших предположений о непрерывности:

$$S_N(t) \leqslant S(t) - a,$$

что при достаточно большом N, конечно, невозможно.