В частности, по отношению к нашим задачам на линейные диференциальные уравнения имеет место следующая *альтернатива*: если относящаяся к однородному диференциальному выражению однородная же задача имеет единственное решение $u=0$, то неоднородная задача всегда имеет одно и только одно решение. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то неоднородная имеет решение лишь при наличии некоторых ограничительных линейных условий, и в последнем случае это решение неоднозначно. Как и в гл. I, особую роль будет играть случай, когда в однородное диференциальное выражение входит линейно параметр λ. Нас интересуют как раз те значения λ, *собственные значения* нашей задачи, при которых однородная задача имеет нетривиальное решение, *собственную* или *фундаментальную функцию*.

В задачах на линейные диференциальные уравнения физики непрерывных систем, которыми в последующем займемся, замене диференциальных уравнений уравнениями в конечных разностях соответствует замена непрерывной системы системой с конечным числом степеней свободы

§ 2. Системы с конечным числом степеней свободы.

Как и в гл. IV, § 10, будем рассматривать систему с n степенями свободы с обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, которой кинетическая и потенциальная энергии заданы квадратичными формами:

$$T=\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k; \quad U=\sum_{h,k=1}^{n} b_{hk}q_hq_k$$

с постоянными коэфициентами a_{hk}, b_{hk}.

Форма T — положительная определенная по своей природе, что же касается формы U, то мы *предполагаем*, что она положительная определенная, и в таком случае мы знаем, что при $q_1=q_2=\ldots=q_n=0$ имеет место устойчивое равновесие. Если некоторым из координат q_h дать различные постоянные отличные от нуля значения или наложить на q_h другие неоднородные связи, то установится новое состояние равновесия, отличное от первоначального равновесного положения $q_h=0$. (Эта последняя постановка вопроса, которая при конечном числе степеней свободы не представляет особого интереса с математической точки зрения, при предельном переходе $n\to\infty$ приводит к типичным краевым задачам диференциальных уравнений с частными производными.)

1. Собственные колебания. Нормальные координаты. Общая теория процесса. Общая задача о движении нашей системы формулируется с помощью следующих диференциальных уравнений.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{hk}\ddot{q}_k+b_{hk}q_k)=P_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

$$(a_{hk}=a_{kh},\ b_{hk}=b_{kh}),$$

где функции $P_h(t)$ обозначают компоненты внешней силы, причем ищется такое решение $q_h(t)$ этой системы диференциальных уравнений, для которого заранее заданы значения $q_h(0)$ и $\dot{q}_h(0)$ $(h=1, 2, \ldots, n)$ (начальное положение и начальная скорость). Если внешние силы $P_h(t)$ равны нулю, то говорят о *свободном движении* или *свободном колебании системы*.

Полное представление процесса движения легко получается с помощью теории квадратичных форм, как она изложена в гл. I. Рассмотрим две положительные определенные квадратичные формы;

$$G=\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}x_h x_k, \qquad F=\sum_{h,k=1}^{n} b_{hk}x_h x_k$$

и приведем их линейным преобразованием переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$x_h=\sum_{k=1}^{n} \tau_{hk}\xi_k, \qquad \xi_h=\sum_{k=1}^{n} \tau_{hk}x_k, \tag{7}$$

к следующему виду:

$$G=\sum_{h=1}^{n} \xi_h^2, \qquad F=\sum_{h=1}^{n} \lambda_h \xi_h^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — положительные числа, что вследствие определенности форм U и T всегда возможно. Введя, соответственно формулам (7), в уравнения (6) вместо координат $q_1, \ldots, q_n$ новые, так называемые *нормальные координаты* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ с помощью формул

$$q_h=\sum_{k=1}^{n} \tau_{hk}\eta_k, \qquad \eta_h=\sum_{k=1}^{n} \bar{\tau}_{hk}q_k, \tag{7'}$$

получим:

$$T=\sum_{h=1}^{n} \dot{\eta}_h^2, \qquad U=\sum_{k=1}^{n} \lambda_h \eta_h^2,$$

и уравнения движения преобразуются к следующему виду:

$$\ddot{\eta}_h+\lambda_h\eta_h=N_h(t),$$

где

$$N_h(t)=\sum_{l} P_l(t)\,\tau_{lh}$$

— „нормалвные координаты“ внешней силы. В этих уравнениях все координаты η_h, которые требуется определить как функции времени, друг от друга отделены.

Впрочем, часто целесообразно бывает дать понятию нормальных координат несколько более общее определение, понимая под ними такие координаты, в которых выражения энергий имеют следующий вид:

$$T = c \sum_{h=1}^{n} \dot{\eta}_h^2, \qquad U = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^* \eta_h^2,$$

причем в этом случае $\lambda_h = \frac{\lambda_h^*}{c} = \nu_h^2$.

В случае свободного движения $N_h(t) = 0$, и решение тотчас же получается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta_h &= y_h \cos \nu_h (t - \varphi_h) & (y_h = \sqrt{\lambda_h}) \\ &= a_h \cos \nu_h t + b_h \sin \nu_h t & (h = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{8}$$

Величины a_h, b_h или y_h, φ_h являются здесь произвольными постоянными интеграции. То свободное колебание, в котором все нормальные координаты, кроме h-й, — нули, между тем как движение h-й нормальной координаты дается уравнением $\eta_h = y_h \cos \nu_h (t - \varphi_h)$, называют h-м *главным* или *собственным колебанием* системы с *амплитудой* y_h и *фазой* φ_h. Если говорят просто о h-м главном колебании, то имеют в виду функцию $\eta_h = \cos \nu_h t$, т. е. берут для амплитуды значение 1, а для фазы значение 0. Значения ν_l называются *числами собственных колебаний* или *собственными частотами* или, пользуясь выражением, заимствованным из акустики, *высотами тонов* системы. Выражение h-го главного колебания в первоначальных координатах q_k' можно получить с помощью формул преобразования (7'), подставляя в них вместо η_h значение $\cos \nu_h t$, а вместо всех остальных η значение нуль.

Всякое свободное движение системы есть наложение различных собственных колебаний с различными фазами и амплитудами. В $2n$ постоянных интеграции $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ мы имеем в нашем распоряжении ровно столько произвольных параметров, сколько требуется для того, чтобы приспособить решение к произвольно заданному начальному состоянию, т. е. к заданным начальным значениям координат и скоростей.

Для того чтобы формально представить решение этой задачи, объединим величины $q_1, \ldots, q_n$ в n-мерный вектор $\mathfrak{q}$. Обозначим через $\mathfrak{e}_l$ вектор с компонентами $\tau_{1l}, \tau_{2l}, \ldots, \tau_{nl}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; тогда в силу формул (7') и (8) получим:

$$\mathfrak{q}(t) = \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{e}_l y_l \cos \nu_l (t - \varphi_l).$$

Если начальное состояние охарактеризовать векторами $\mathfrak{q}(0)$ и $\dot{\mathfrak{q}}(0)$, то эта форма общего решения для свободного движения немедленно приводит к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}(0) &= \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{e}_l y_l \cos(\nu_l \varphi_l), \\ \dot{\mathfrak{q}}(0) &= \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{e}_l y_l \nu_l \sin(\nu_l \varphi_l). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если для простоты принять, что форма G уже является единичной формой $G = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, то *„собственные векторы"* $\mathfrak{e}_i$ образуют полную ортогональную систему векторов (ср. гл. I, § 1), и из (9) умножением на $\mathfrak{e}_h$ получаем следующие соотношения:

$$\mathfrak{e}_h \mathfrak{q}(0) = y_h \cos(\nu_h \varphi_h),$$
$$\mathfrak{e}_h \dot{\mathfrak{q}}(0) = \nu_h y_h \sin(\nu_h \varphi_h);$$

с их помощью можно определить амплитуды y_h и фазы φ_h.

Сделаем еще следующее замечание: собственные колебания могут быть определены как такие движения системы, при которых отношения координат q_k друг к другу не зависят от времени, у которых, следовательно, q_k имеет вид: $q_k = v_k g(t)$, где v_k не зависит от времени. С помощью этой подстановки немедленно приходим от уравнений (6) при $P_i = 0$ к следующим уравнениям:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} b_{ik} v_k}{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k} = -\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}.$$

Замечая, что здесь в правой части стоит независящая от i и от t постоянная, которую обозначим через λ, получим немедленно для квадратичных форм G и F задачу о собственных значениях, выраженную уравнениями:

$$\sum_{k=1}^{n} (b_{ik} - \lambda a_{ik}) v_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

чем установлена связь с изложенным выше методом, покоящимся на преобразовании координат.

Для того чтобы затем решить также задачу о *вынужденном движении*, в которой внешние силы $P_h(t)$ одновременно не исчезают, достаточно найти одно единственное решение диференциальных уравнений $\ddot{\eta}_h + \lambda_h \eta_h = N_h(t)$. Таким решением, для которого к тому же $\eta_h(0) = 0$ и $\dot{\eta}_h(0) = 0$, является[1])

$$\eta_h(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \int_0^t N_h(\tau) \sin \sqrt{\lambda_h}(t - \tau)\, d\tau, \tag{10}$$

а общее вынужденное движение получится тогда наложением этого частного движения на самое общее свободное движение.

Если внешняя сила $N_h(t)$ чисто периодическая с частотой ω_h, например $N_h(t) = a_h \cos \omega_h (t - \delta)$, то формула (10) показывает, что коль скоро

[1]) Это решение можно получить, заменяя непрерывно действующую внешнюю силу прерывными толчками, отделенными промежутками Δt, и совершая затем предельный переход $\Delta t \to 0$.

$\omega_k^2 \neq \lambda_k$, движение координаты η_h получается наложением чисто периодического колебания частоты ω_h и собственного колебания частоты $\sqrt{\lambda_h}$. Если же $\omega_h^2 = \lambda_h$ или, как говорят, возникает *резонанс*, то вынужденное движение координаты η_h уже не следует ритму возбуждения $N_h(t)$, но, как это легко вытекает из формулы (10),

$$\eta_h(t) = \frac{a_h t}{2\omega_h} \sin\omega_h(t-\delta) + \frac{a_h \sin\omega_h\delta}{2\omega_h^2} \sin\omega_h t,$$

и $|\eta_h|$ остается не ограниченной при возрастании t.

2. Общие свойства колебательных систем. Если расположить квадраты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ чисел колебаний в порядке возрастающей величины: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, то число λ_p, согласно гл. I, § 4, можно определить как наибольшее значение, которое может принять минимум квадратичной формы $F = \sum\limits_{h,k=1}^{n} b_{hk} x_h x_k$, когда переменные подчинены, во-первых, условию $G = \sum\limits_{h,k=1}^{n} a_{hk} x_h x_k = 1$, и, во-вторых, еще $p-1$ добавочному условию вида:

$$\sum_{h=1}^{n} a_{hj} x_h = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p-1) \tag{11}$$

с произвольно выбранными a_{hj}. Отсюда немедленно получаются некоторые общие теоремы об этих частотах и о соответствующих им высотах тонов. Эти теоремы были уже приведены и доказаны в гл. I. § 4 без указания их физического значения.

ТЕОРЕМА I. *p-й обертон колеблющейся системы является наивысшим из основных тонов всех систем, получающихся из данной наложением каких угодно $p-1$ связей вида* (11).

ТЕОРЕМА II. *Если система S благодаря наложению r ограничительных условий вида* (11) *переходит в систему S' с r связями, то частоты $\nu_1', \ldots, \nu_{n-r}'$ связанной системы не меньше соответствующих частот $\nu_1, \ldots, \nu_{n-r}$ свободной системы и вместе с тем не больше частот $\nu_{r+1}, \ldots, \nu_n$ свободной системы, т. е. имеют место следующие соотношения: $\lambda_p \leqslant \lambda_p' \leqslant \lambda_{p+r}$ и соответственно*

$$\nu_p \leqslant \nu_p' \leqslant \nu_{p+r} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-r).$$

ТЕОРЕМА III. *При увеличении инертности основной тон и все обертоны падают или, по меньшей мере, не повышаются.*

При этом под увеличением инертности мы понимаем переход к системе с такой кинетической энергией T', что $T' - T$ никогда не принимает отрицательных значений: потенциальная энергия пусть остается при этом неизменной.

ТЕОРЕМА IV. *При увеличении жесткости системы основной тон и все обертоны повышаются или, во всяком случае, не понижаются.*

При этом мы понимаем под увеличением жесткости переход к системе с той же кинетической энергией, но потенциальная энергия которой получается из данной прибавлением неотрицательной формы.

Едва ли нуждается в особом упоминании, что основной тон и обертоны изменяются в противоположном смысле, чем по теоремам II — IV, когда связи снимают, массы уменьшают или же систему расшатывают, т. е. уменьшают ее жесткость.

§ 3. Колебания струны.

Мы видели, что при конечном числе степеней свободы можно овладеть всей совокупностью движений, если знать только синхронные колебания. То же относится и к непрерывным колебательным системам. Мы у них будем искать такие свободные колебания, при которых отклонение u может быть представлено как произведение множителя $g(t)$, зависящего только от времени, на зависящий только от положения множитель $v(x)$, называемый *формой колебания* или множителем формы (*стоячие колебания*). Любой колебательный процесс можно тогда представить как наложение таких синхронных колебаний.

Мы выясним эти свойства на ряде важных примеров.

1. Свободные колебания однородной струны. Прежде всего рассмотрим простейший пример, а именно диференциальное уравнение:

$$cu_{xx}=\rho u_{tt} \quad \text{или} \quad u_{xx}=\mu^2 u_{tt} \qquad \left(\mu=\sqrt{\frac{\rho}{c}}\right) \tag{12}$$

закрепленной однородной струны с краевыми условиями

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0$$

(ср. гл. IV, § 10, стр. 235, 236). В целях упрощения письма представим себе, что единица времени так выбрана, что $\mu=1$. Сообразно с нашим общим планом будем искать такие функции, удовлетворяющие уравнению (12), которые расщепляются на множитель, зависящий только от времени, и множитель, зависящий только от места, т. е. могут быть представлены в таком виде:

$$u=v(x)\,g(t).$$

Диференциальное уравнение (12) можно в таком случае привести к следующему виду:

$$\frac{v''(x)}{v(x)}=\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)},$$

откуда вытекает, что обе стороны должны равняться одной и той же постоянной $-\lambda$, ибо одна сторона не зависит от x, а другая — от t. Из краевого условия $v(0)g(t)=v(\pi)g(t)=0$ следует, что

$$v(0)=v(\pi)=0.$$

Стало быть, функцию $v(x)$ следует определить из диференциального уравнения:

$$v''+\lambda v=0 \tag{13}$$