ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ

§ 1. Электростатическое поле проводников

Предмет макроскопической электродинамики составляет изучение электромагнитных полей в пространстве, заполненном веществом. Как и всякая макроскопическая теория, электродинамика оперирует физическими величинами, усредненными по «физически бесконечно малым» элементам объема, не интересуясь микроскопическими колебаниями этих величин, связанными с молекулярным строением вещества. Так, вместо истинного «микроскопического» значения напряженности электрического поля **e** мы будем рассматривать ее усредненное значение, обозначив его как

$$\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}. \tag{1,1}$$

Основные уравнения электродинамики сплошных сред получаются посредством усреднения уравнений электромагнитного поля в пустоте. Такой переход от микро- к макроскопическим уравнениям был впервые произведен *Лоренцем* (*H. A. Lorentz*, 1902).

Вид уравнений макроскопической электродинамики и смысл входящих в них величин существенно зависят от физической природы материальной среды, а также от характера изменения поля со временем. Поэтому представляется рациональным производить вывод и исследование этих уравнений для каждой категории физических объектов в отдельности.

Как известно, в отношении электрических свойств все тела делятся на две категории — *проводники* и *диэлектрики*, причем первые отличаются от вторых тем, что всякое электрическое поле вызывает в них движение зарядов — электрический ток [1]).

Мы начнем с изучения постоянных электрических полей, создаваемых заряженными проводниками (*электростатика* проводников). Из основного свойства проводников, прежде всего, следует, что в электростатическом случае напряженность электрического поля внутри них должна быть равной нулю. Действительно, отличная от нуля напряженность **E** привела бы к возникновению тока; между тем распространение тока в про-

---

[1]) Проводник предполагается здесь однородным (по своему составу, температуре и т. п.). В неоднородном проводнике, как мы увидим в дальнейшем, могут существовать поля, не вызывающие движения зарядов.

воднике связано с диссипацией энергии и потому не может само по себе (без внешних источников энергии) поддерживаться в стационарном состоянии.

Отсюда в свою очередь следует, что все заряды в проводнике должны быть распределены по его поверхности: наличие зарядов в объеме проводника непременно привело бы к возникновению электрического поля в нем[1]); распределение же зарядов по поверхности может быть осуществлено таким образом, чтобы создаваемые ими внутри проводника поля взаимно компенсировались.

Тем самым задача электростатики проводников сводится к определению электрического поля в пустоте, вне проводников, и к определению распределения зарядов по поверхности проводников.

В точках, не слишком близких к поверхности тела, среднее поле **E** в пустоте фактически совпадает с истинным полем **e**. Эти две величины отличаются друг от друга лишь в непосредственной близости к телу, где еще сказывается влияние нерегулярных молекулярных полей. Последнее обстоятельство, однако, не отражается на виде усредненных уравнений поля. Точные микроскопические уравнения Максвелла в пустоте гласят:

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0, \tag{1,2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \tag{1,3}$$

($\mathbf{h}$ — микроскопическая напряженность магнитного поля). Поскольку среднее магнитное поле предполагается отсутствующим, то и производная $\partial \mathbf{h}/\partial t$ обращается в результате усреднения в нуль, и мы находим, что постоянное электрическое поле в пустоте удовлетворяет обычным уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{1,4}$$

т. е. является потенциальным полем с потенциалом φ, связанным с напряженностью соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{1,5}$$

и удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1,6}$$

Граничные условия для поля **E** на поверхности проводника следуют из самого уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, справедливого (как и исходное уравнение (1,3)) и вне, и внутри тела. Выберем ось z по направлению нормали $\mathbf{n}$ к поверхности проводника в некоторой его точке. Компонента E_z поля в непосредственной близости к поверхности тела достигает очень больших значений (ввиду наличия здесь конечной разности потенциалов на очень

[1]) Это ясно видно из приведенного ниже уравнения (1,8).

малых расстояниях). Это большое поле является свойством самой поверхности и зависит от ее физических свойств, но не имеет отношения к рассматриваемой нами электростатической задаче, так как быстро спадает уже на расстояниях, сравнимых с атомными. Существенно, однако, что если поверхность однородна, производные $\partial E_z/\partial x$, $\partial E_z/\partial y$ вдоль поверхности остаются конечными, несмотря на обращение самого E_z в бесконечность. Поэтому из

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

следует, что $\partial E_y/\partial z$ конечно. Это значит, что E_y непрерывно на поверхности (так как скачок E_y означал бы обращение производной $\partial E_y/\partial z$ в бесконечность). То же самое относится и к E_x, а поскольку внутри проводника вообще $\mathbf{E}=0$, то мы приходим к выводу, что касательные компоненты внешнего поля на его поверхности должны обращаться в нуль:

$$\mathbf{E}_t = 0. \tag{1,7}$$

Таким образом, электростатическое поле должно быть нормальным к поверхности проводника в каждой ее точке. Поскольку $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, то это значит, что потенциал поля должен быть постоянным вдоль всей поверхности каждого данного проводника. Другими словами, поверхность однородного проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность электростатического поля.

Нормальная же к поверхности компонента поля весьма просто связана с плотностью распределенного по поверхности заряда. Эта связь получается из общего электродинамического уравнения $\operatorname{div}\mathbf{e} = 4\pi\rho$, которое после усреднения принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}, \tag{1,8}$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность заряда. В интегральном виде это уравнение означает, как известно, что поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в ограниченном этой поверхностью объеме (умноженному на 4π). Применив эту теорему к элементу объема, заключенному между двумя бесконечно близкими единичными площадками, примыкающими с обеих сторон к поверхности проводника, и учитывая, что на внутренней площадке $\mathbf{E}=0$, найдем, что $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда, т. е. заряд на единице площади поверхности проводника. Таким образом, распределение зарядов по поверхности проводника дается формулой

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}E_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{1,9}$$

(производная от потенциала берется в направлении внешней нормали **n** к поверхности). Полный заряд проводника

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,df, \tag{1,10}$$

где интеграл берется по всей его поверхности.

Распределение потенциала во всяком электростатическом поле обладает следующим замечательным свойством: функция $\varphi(x, y, z)$ может достигать максимального или минимального значения лишь на границах области поля. Эту теорему можно сформулировать и как утверждение о невозможности устойчивого равновесия внесенного в поле пробного заряда e, так как нет такой точки, в которой бы его потенциальная энергия $e\varphi$ имела минимум.

Доказательство теоремы весьма просто. Допустим, например, что в некоторой точке A (не находящейся на границе поля) потенциал имеет максимум. Тогда можно окружить точку A такой малой замкнутой поверхностью, на которой везде производная по нормали $\partial\varphi/\partial n < 0$. Следовательно, и интеграл по этой поверхности $\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,df < 0$. Но в силу уравнения Лапласа

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,df = \int \Delta\varphi\,dV = 0,$$

в противоречии с предположением.

§ 2. Энергия электростатического поля проводников

Вычислим полную энергию $\mathcal{U}$ электростатического поля заряженных проводников[1]):

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2\,dV, \tag{2,1}$$

где интеграл берется по всему объему пространства вне проводников. Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dV = -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{div}\,(\varphi\mathbf{E})\,dV + \frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}\,dV.$$

Второй интеграл обращается в нуль в силу (1,4), а первый преобразуется в интеграл по ограничивающим поле поверхностям проводников и по бесконечно удаленной поверхности. Но последний интеграл обращается в нуль в силу достаточно быстрого убывания поля на бесконечности (предполагается, что произвольная постоянная в φ выбрана таким образом, что $\varphi = 0$ на беско-

[1]) Квадрат $\mathbf{E}^2$ не совпадает со средним квадратом $\overline{\mathbf{e}^2}$ истинного поля вблизи поверхности проводника, а также и в объеме последнего (где $\mathbf{E} = 0$, но, разумеется, $\overline{\mathbf{e}^2} \neq 0$). Вычисляя интеграл (2,1), мы тем самым отвлекаемся от не интересующей нас здесь внутренней энергии проводника как такового и от энергии сродства зарядов к его поверхности.