## § 57. Структура промежуточного состояния

Форма и размеры $n$- и $s$-слоев в промежуточном состоянии определяются условиями термодинамического равновесия тела в целом, аналогично тому, как определяется форма доменов в ферромагнетике (§ 44). Как и там, устанавливающаяся толщина слоев является результатом двух противоположных тенденций. Поверхностное натяжение на границах $n$- и $s$-фаз стремится уменьшить число слоев, т. е. увеличить их толщину. В обратном направлении действует энергия выхода слоев к свободной поверхности тела. Толщина слоев возрастает при увеличении размеров тела, в результате чего (по тем же причинам, что и для ферромагнитных доменов) в конце концов должно наступить их разветвление при подходе к поверхности тела[1]).

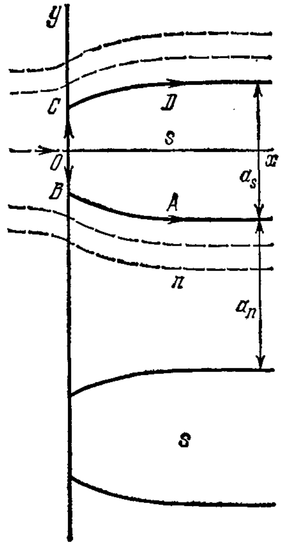


Рис. 35.

Задача об определении формы и размеров неразветвленных слоев в промежуточном состоянии в плоскопараллельной пластинке может быть решена точно; сделаем это, предполагая внешнее поле $\mathfrak{H}$ перпендикулярным пластинке (*Л. Д. Ландау*, 1937).

Слои расположены вдоль поля, и их плоскопараллельность нарушается лишь вблизи поверхности пластинки.

Силовые линии магнитного поля (пунктирные линии на рис. 35) проходят только через $n$-слои, причем границы $s$-слоев тоже являются силовыми линиями (в силу условия $B_n=0$ на них). Учитывая также, что на границе $n$- и $s$-фаз должно быть $H=H_c$, пишем следующие условия на границах $s$-слоя:

$$\left.\begin{array}{l}\text{на отрезке } BC\text{: } H_x=0,\\ \text{на } BA \text{ и } CD\text{: } H_x^2+H_y^2=H_c^2\end{array}\right\} \qquad (57,1)$$

(оси координат выбраны указанным на рис. 35 образом). Вдали от пластинки поле $\mathbf{H}$ должно совпадать с внешним полем, т. е.

$$\text{при } x\to-\infty \qquad H_x=\mathfrak{H},\ H_y=0. \qquad (57,2)$$

---

[1]) В определенных условиях (внешние поля, близкие к нулю или к $H_c$) термодинамически более выгодной может оказаться не слоистая, а нитевидная структура. См. *Andrew E. R.*— Proc. Roy. Soc., 1948, v. 194A, p. 98.

Введем скалярный и векторный потенциалы поля согласно формулам

$$H_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

и комплексный потенциал $w = \varphi - iA$ (ср. § 3).

Вдоль каждой силовой линии $A = \text{const}$. Положим $A = 0$ на силовой линии, подходящей к точке $O$ и затем разветвляющейся на линии $OCD$ и $OBA$, образуя границу одного из $s$-слоев. Разность значений $A$ на границах двух последовательных $s$-слоев равна потоку магнитного поля через отрезок $a = a_s + a_n$, т. е. равна $\mathfrak{H}a$. Поэтому значения $A$ на границах всех $s$-слоев будут целыми кратными $\mathfrak{H}a$. Вводя также «комплексную напряженность»

$$\eta = H_x - iH_y = -\frac{dw}{dz}, \quad z = x + iy,$$

напишем условия (57,1) в виде:

$$\begin{aligned} &\text{на } BC\colon\ \operatorname{Re}\eta = 0, \\ &\text{на } BA \text{ и } CD\colon\ |\eta| = H_c. \end{aligned} \tag{57,3}$$

Введем новую величину

$$\zeta = \exp(-2\pi w/\mathfrak{H}a) - 1 \tag{57,4}$$

и будем рассматривать $\eta$ как функцию от $\zeta$. На всех граничных силовых линиях (вместе с их продолжениями вне пластинки) величина $\zeta$ вещественна:

$$\zeta = \exp(-2\pi\varphi/\mathfrak{H}a) - 1.$$

Поскольку $\varphi$ определено с точностью до постоянной, то можно произвольно выбрать значение $\varphi$ в одной точке. Пусть $\varphi = 0$ в точке $O$. Тогда в этой точке и $\zeta = 0$. На рассматриваемой граничной силовой линии вдали от пластинки $\zeta = -1$ (так как при $x \to -\infty$ имеем $\varphi \to -\mathfrak{H}x \to +\infty$). Значение $\zeta$ в точке $B$ (или $C$), где силовая линия входит внутрь пластинки, обозначим как $\zeta_0$. На ветвях $CD$ и $BA$ $\zeta$ меняется от $\zeta_0$ до $\infty$. Тогда условия (57,1) и (57,3) можно написать в виде:

$$\text{при } \zeta = -1 \qquad \eta = \mathfrak{H}, \tag{57,5}$$

$$\begin{aligned} &\text{при } 0 < \zeta < \zeta_0 \qquad \operatorname{Re}\eta = 0, \\ &\text{при } \zeta_0 < \zeta \qquad |\eta| = H_c. \end{aligned} \tag{57,6}$$

Кроме того, функция $\eta(\zeta)$ должна быть везде конечной.

Условиям (57,6) удовлетворяет функция

$$\eta = H_c\left[\sqrt{1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\right]. \tag{57,7}$$

При вещественных отрицательных значениях $\zeta$ оба корня вещественны и берутся с написанными здесь знаками. При $0<\zeta<\zeta_0$ оба корня мнимы, причем берутся корни

$$\eta=\mp H_c i\left[\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}-\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}-1}\right]$$

со знаками — или + соответственно на отрезках $OC$ и $OB$. При $\zeta>\zeta_0$ надо писать

$$\eta=H_c\left[\sqrt{1-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\mp i\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}\right]$$

со знаками — и + соответственно на $CD$ и $BA$. Значение $\zeta_0$ определяется из условия (57,5) и равно

$$\zeta_0=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{h}-h\right)^2, \tag{57,8}$$

где введено обозначение $h=\mathfrak{H}/H_c$.

Форма слоя, т. е. уравнение граничной силовой линии, получается интегрированием соотношения $dz=-dw/\eta$ по вещественным $\zeta$:

$$z=-\int\frac{dw}{\eta}=\frac{ah}{2\pi}\int\frac{d\zeta}{\eta(\zeta+1)}.$$

Подставив сюда $\eta(\zeta)$, отделив вещественную и мнимую части и выбрав соответствующим образом постоянные интегрирования, получим следующее параметрическое уравнение линии $CD$:

$$x=\frac{ha}{2\pi}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\sqrt{1-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta+1}=$$
$$=\frac{ha}{\pi}\left[\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}}-\sqrt{\zeta_0+1}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\zeta(\zeta_0+1)}{\zeta_0(\zeta+1)}}\right], \tag{57,9}$$
$$y=Y-\frac{ha}{2\pi}\int\limits_{\zeta}^{\infty}\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta+1}=Y-\frac{ha}{\pi}\sqrt{\zeta_0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta}\right)$$

($Y=a_s/2$ — значение координаты $y$ при $x\to\infty$; см. рис. 35).

Период слоистой структуры $a$ связан с толщинами $a_s$ и $a_n$ $s$- и $n$-слоев равенствами $a=a_s+a_n$, $a\mathfrak{H}=a_nH_c$. Второе из них является следствием непрерывности магнитного потока, проходящего целиком в $n$-слоях. Отсюда

$$a_s=a(1-h),\quad a_n=ha.$$

Период $a$ определяется условием минимальности полного термодинамического потенциала пластинки. Наличие поверхностного натяжения на границе $n$- и $s$-фаз приводит к члену

$$\mathcal{F}_1=\frac{2l}{a}\frac{H_c^2}{8\pi}\Delta \tag{57,10}$$

в термодинамическом потенциале, отнесенном к 1 см² поверхности пластинки. Здесь $l$ — толщина пластинки, а коэффициент поверхностного натяжения обозначен как $H_c^2\Delta/8\pi$ ($\Delta$ имеет размерность длины). При вычислении этой части энергии закруглением слоев вблизи поверхности пластинки можно, конечно, пренебречь.

Энергию выхода слоев к поверхности пластинки можно представить в виде суммы двух частей. Во-первых, само по себе увеличение объема $n$-слоев по сравнению с объемом, который они имели бы при сохранении плоскопараллельности на всем протяжении, приводит к дополнительной энергии

$$\mathscr{F}_2 = \frac{4}{a}\int_0^\infty (Y-y)\,dx\,\frac{H_c^2}{8\pi} \qquad (57{,}11)$$

(множитель 4 учитывает наличие четырех углов — таких, как $B$ и $C$ на рис. 35 — с обеих сторон каждого из $1/a$ $s$-слоев).

Во-вторых, выход слоев к поверхности пластинки меняет энергию системы во внешнем поле, т. е. энергию $-\mathscr{M}\mathfrak{H}/2$. Магнитный момент пластинки обусловлен токами на поверхностях $s$-слоев. При скачке тангенциальной компоненты индукции от $H$ до 0 поверхностная плотность токов $g = \pm cH/4\pi$. Поэтому на единицу длины оси $z$ на каждую граничную поверхность $s$-слоя приходится магнитный момент

$$-\int_{OCD} \frac{H}{4\pi}\,y\,ds \qquad (ds = \sqrt{dx^2+dy^2}).$$

Если бы слой не выходил к поверхности, отрезок $OC$ отсутствовал бы, а на $CD$ было бы везде $y = Y$. Поэтому избыток магнитного момента для каждого из четырех углов равен

$$-\int_{OCD} \frac{H}{4\pi}\,y\,ds + \int_0^\infty \frac{H_c}{4\pi}\,Y\,dx.$$

Соответственно, избыточная энергия

$$\mathscr{F}_3 = -\frac{\mathfrak{H}}{2}\,\frac{4}{a}\left[\int_0^\infty \frac{H_c}{4\pi}\,Y\,dx - \int_{OCD}\frac{H}{4\pi}\,y\,ds\right] =$$
$$= \frac{\mathfrak{H}}{2a\pi}\left[H_c\int_{CD}(-Y\,dx + y\,ds) + \int_{OC} Hy\,dy\right]. \qquad (57{,}12)$$

Координаты $x$ и $y$, выраженные через $\zeta$, пропорциональны $a$. Поэтому все интегралы в $\mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2$ пропорциональны $a^2$, так что эта часть термодинамического потенциала пропорциональна $a$.

Сумма же $\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2+\mathcal{F}_3$ имеет, следовательно, вид

$$\mathcal{F}=\frac{H_c^2}{4\pi}\left[\frac{l\Delta}{a}+af(h)\right]. \tag{57,13}$$

Условие ее минимальности дает

$$a=\sqrt{\frac{l\Delta}{f(h)}}. \tag{57,14}$$

Интегралы в (57,11—12) могут быть вычислены до конца[1]), и для функции $f(h)$ получается следующее выражение:

$$f(h)=\frac{1}{4\pi}\{(1+h)^4\ln(1+h)+(1-h)^4\ln(1-h)- \\ -(1+h^2)^2\ln(1+h^2)-4h^2\ln 8h\}. \tag{57,15}$$

Предельные выражения этой функции:

$$\begin{aligned} f(h)&=\frac{h^2}{\pi}\ln\frac{0{,}56}{h} \quad \text{при} \quad h\ll 1; \\ f(h)&=\frac{\ln 2}{\pi}(1-h)^2 \quad \text{при} \quad 1-h\ll 1. \end{aligned} \tag{57,16}$$

На рис. 36 изображен график функции $f(h)$.

Отметим, что в $n$-слоях вблизи поверхности пластинки магнитное поле может быть существенно меньшим, чем $H_c$, т. е. здесь имеет место ситуация, соответствующая изображенной на рис. 33, $a$[2]). Ее термодинамическая невыгодность компенсируется в данном случае энергией поверхностного натяжения, препятствующей дальнейшему уменьшению толщины слоев.

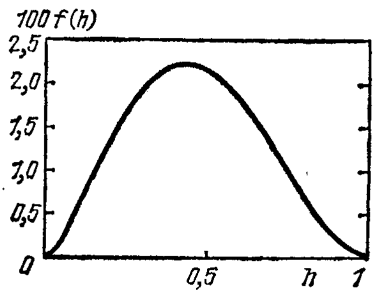

Рис. 36.

Как уже указывалось, при увеличении толщины пластинки должно наступить разветвление слоев. Это приводит, в свою очередь, к изменению зависимости периода структуры $a$ от $l$; в предельном случае многократного разветвления $a\propto l^{2/3}$. Фактические численные соотношения показывают, однако, что разветвление должно начаться сравнительно поздно[3]).

[1]) См. *Fortini A., Paumier E.*— Phys. Rev. B, 1972, v. 5, p. 1850.

[2]) Так, при $h=1/2$ поле на поверхности в средней точке $n$-слоя составляет всего $0{,}73\,H_c$, а при $h\to 0$ стремится к $0{,}65\,H_c$.

[3]) Расчет модели с многократным разветвлением слоев — см. *Ландау Л. Д.*— ЖЭТФ, 1943, т. 13, с. 377 (Собрание трудов, статья 47, «Наука», 1969).