Задача

Определить интенсивность теплового излучения (заданной частоты) от плоской поверхности с малым импедансом.

Решение. Согласно закону Кирхгофа, интенсивность dI теплового излучения (в элемент телесного угла do) от произвольной поверхности связана с интенсивностью излучения от поверхности абсолютно черного тела dI_0 соотношением $dI = (1-R)\,dI_0$, где R — коэффициент отражения от данной поверхности для естественного света. Вычисляя $R = {}^1/_2 (R_\perp + R_\parallel)$ с помощью формул (87,13) и (87,14) и учитывая изотропию излучения с поверхности абсолютно черного тела ($dI_0 = I_0 do/2\pi$), получим

$$I = 2I_0\zeta' \int\limits_0^{\pi/2} \left\{1 + \frac{1}{\cos^2\theta + 2\zeta'\cos\theta + \zeta'^2 + \zeta''^2}\right\} \cos\theta \sin\theta \, d\theta.$$

Произведя интегрирование и опустив члены высшего порядка по ζ, находим

$$\frac{I}{I_0} = \zeta' \left(\ln\frac{1}{\zeta'^2 + \zeta''^2} + 1 - \frac{2\zeta'}{\zeta''} \operatorname{arctg}\frac{\zeta''}{\zeta'}\right).$$

В частности, для металла с импедансом, определяемым формулой (87,3), имеем ($\mu = 1$)

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \left(\ln\frac{4\pi\sigma}{\omega} + 1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 88. Распространение волн в неоднородной среде

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в электрически неоднородной (но изотропной) среде. В уравнениях Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathbf{E}$$

(полагаем везде $\mu = 1$) ε есть функция координат точки. Подставив $\mathbf{H}$ из первого уравнения во второе, получим для $\mathbf{E}$ уравнение

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{88,1}$$

Исключение же $\mathbf{E}$ дает для $\mathbf{H}$ уравнение

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon}[\nabla\varepsilon \cdot \operatorname{rot}\mathbf{H}] = 0. \tag{88,2}$$

Эти уравнения существенно упрощаются в одномерном случае, когда ε меняется лишь в одном направлении в пространстве. Выберем это направление в качестве оси z и рассмотрим волну, направление распространения которой лежит в плоскости xz. В такой волне все величины не зависят вовсе от координаты y, а ввиду однородности пространства вдоль оси x можно рассматривать зависимость от x, даваемую множителем $e^{i\varkappa x}$ с постоянным $\varkappa$. При $\varkappa = 0$ поле зависит только от z, т. е. речь идет о *нормальном* прохождении волны через слой вещества с $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Если же $\varkappa \neq 0$, то говорят о *наклонном* прохождении волны.

При этом надо различать (при $\varkappa \neq 0$) два независимых случая поляризации. В одном из них вектор **E** перпендикулярен к плоскости распространения волны (т. е. направлен вдоль оси y), а магнитное поле **H** соответственно лежит в этой плоскости. Уравнение (88,1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2\right) E = 0. \tag{88,3}$$

В другом случае вдоль оси y направлено поле **H**, а **E** лежит в плоскости распространения. В этом случае удобнее исходить из уравнения (88,2), которое дает

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial z}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\right) H = 0. \tag{88,4}$$

Будем условно называть эти два типа волн соответственно *E*- и *H-волнами.*

Уравнения могут быть решены в общем виде в важном случае, когда условия распространения близки к условиям геометрической оптики; функцию $\varepsilon(z)$ предполагаем ниже вещественной [1]). В уравнении (88,3) величина $2\pi/\sqrt{f}$, где

$$f(z) = \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2,$$

играет роль длины волны в направлении оси z. Приближению геометрической оптики соответствует неравенство

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{f}} \ll 1, \tag{88,5}$$

а два независимых решения уравнения (88,3) имеют вид

$$\frac{\text{const}}{f^{1/4}} \exp\left(\pm i \int \sqrt{f}\, dz\right). \tag{88,6}$$

Условие (88,5) заведомо нарушается вблизи *точки отражения* (если таковая имеется), в которой $f = 0$. Пусть это есть точка $z = 0$, причем $f > 0$ при $z < 0$ и $f < 0$ при $z > 0$. На достаточно больших расстояниях по обе стороны от точки $z = 0$ решение уравнения (88,3) имеет вид (88,6), но для того чтобы установить соответствие между коэффициентами в этом решении в областях $z > 0$ и $z < 0$, надо исследовать точное решение уравнения (88,3) вблизи $z = 0$. В окрестности этой точки функцию $f(z)$ можно

[1]) Уравнение (88,3) имеет формальное сходство с уравнением Шредингера для одномерного движения частицы в квантовой механике, а приближению геометрической оптики соответствует квазиклассический случай. Ниже мы приводим окончательные результаты, отсылая за выводом их к другому тому этого курса — см. III, гл. VII.

разложить по степеням z и представить в виде $f=-\alpha z$. Решение уравнения

$$\frac{d^2E}{dz^2}-\alpha zE=0,$$

конечное при всех z, есть

$$E=\frac{A}{\alpha^{1/6}}\Phi(\alpha^{1/3}z), \tag{88,7}$$

где

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{u^3}{3}+u\xi\right)du$$

— функция Эйри (множитель $\exp(-i\omega t+i\varkappa x)$ в E везде опускаем)[1]). Асимптотический же вид решения уравнения (88,3) при больших $|z|$ есть

$$\begin{aligned} E&=\frac{A}{f^{1/4}}\cos\left(\int\limits_0^z\sqrt{f}\,dz+\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{при} \quad z<0,\\ E&=\frac{A}{2|f|^{1/4}}\exp\left(-\int\limits_0^z\sqrt{|f|}\,dz\right) \quad \text{при} \quad z>0, \end{aligned} \tag{88,8}$$

с тем же коэффициентом A, что и в (88,7). Первое из этих выражений представляет собой стоячую волну, получающуюся в результате наложения падающей (в положительном направлении оси z) волны и волны, отраженной от плоскости $z=0$. Амплитуды этих волн одинаковы (и равны $A/2f^{1/4}$), т. е. коэффициент отражения равен единице. В область $z>0$ проникает лишь экспоненциально затухающее поле.

При приближении к точке отражения амплитуда волны возрастает, как это видно уже из наличия $f^{1/4}$ в знаменателе в (88,8). Для определения величины поля в непосредственной близости этой точки надо, однако, воспользоваться выражением (88,7). Эта функция монотонно убывает в глубь области $z>0$ и имеет осциллирующий характер в области $z<0$, причем величина максимумов $|E|$ постепенно убывает. Первый, наибольший из максимумов достигается при $\alpha^{1/3}z=-1{,}02$ и равен

$$E=0{,}949\cdot A\alpha^{-1/6}.$$

До сих пор мы писали решения для E-волн. Легко видеть, что в приближении геометрической оптики вполне аналогичные

[1]) Мы пользуемся здесь тем же определением функции Эйри, что и в других томах этого курса. В настоящее время, однако, более употребительно определение

$$\operatorname{Ai}\xi=\Phi(\xi)/\sqrt{\pi}.$$

формулы могут быть написаны и для H-волн. Если сделать в уравнении (88,4) подстановку $H=u\sqrt{\varepsilon}$, то производные от ε войдут умноженными только на u (но не на u'); пренебрегая затем членами, содержащими эти производные (малыми в силу условия (88,5)), получим для функции $u(z)$ уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}-\varkappa^2\right)u=0,$$

совпадающее с уравнением (88,3). Поэтому все формулы для H отличаются от формул (88,6—8) лишь множителем $\sqrt{\varepsilon}$.

Своеобразное отличие в поведении обоих типов волн возникает при отражении наклонно ($\varkappa\neq 0$) падающей волны от слоя вещества, в котором $\varepsilon(z)$ проходит через нуль. Отражение происходит при этом от плоскости, на которой $f(z)=\varepsilon\omega^2/c^2-\varkappa^2=0$, т. е. «не доходя» до точки $\varepsilon=0$. E-волна проникает за эту плоскость лишь в виде экспоненциально затухающего поля. При отражении же H-волны на общем фоне такого затухающего поля возникает вблизи точки $\varepsilon=0$ резкое усиление поля (*K. Försterling*, 1949) [1]). Рассмотрим это явление.

Пусть $\varepsilon=0$ в точке $z=0$. Вблизи этой точки пишем

$$\varepsilon=-az, \qquad a>0, \tag{88,9}$$

и уравнение (88,4) принимает вид

$$\frac{d^2H}{dz^2}-\frac{1}{z}\frac{dH}{dz}-\left(\frac{a\omega^2}{c^2}z+\varkappa^2\right)H=0. \tag{88,10}$$

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, одно из решений этого уравнения (назовем его H_1) не имеет особенности при $z=0$, а его разложение при малых z начинается с z^2:

$$H_1(z)=z^2+\ldots$$

Второе независимое решение обладает логарифмической особенностью и его разложение имеет вид

$$H_2(z)=H_1(z)\ln\varkappa z+\frac{2}{\varkappa^2}+\ldots$$

(параметр a появляется лишь в более высоких членах разложения). Для определения поля вблизи точки $z=0$ нет необходимости анализировать вопрос о выборе линейной комбинации из H_1 и H_2, удовлетворяющей условиям на бесконечности. Достаточно заметить, что она стремится при $z\to 0$ к постоянной

---

[1]) Отметим, что эта точка является особой для уравнения (88,4), и потому вблизи нее приближение геометрической оптики становится неприменимым, несмотря на то, что $f(z)$ не обращается в нуль и условие (88,5) может не нарушаться.

(обозначим ее H_0) и имеет логарифмическую особенность:

$$H \approx H_0 \left(1 + \frac{\varkappa^2}{2} z^2 \ln \varkappa z\right);$$

наряду с постоянной здесь выписан также главный член с особенностью. Электрическое поле определяется по полю $H_y = H$ уравнениями Максвелла

$$E_x = -\frac{ic}{\varepsilon\omega}\frac{\partial H}{\partial z}, \quad E_z = \frac{ic}{\varepsilon\omega}\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Вспомнив, что зависимость H от x дается множителем $e^{i\varkappa x}$, находим главные члены в E_x и E_z:

$$E_x \approx H_0 \frac{i\varkappa^2 c}{a\omega} \ln \varkappa z, \quad E_z \approx H_0 \frac{\varkappa c}{a\omega}\frac{1}{z}. \tag{88,11}$$

Они обращаются при $z \to 0$ в бесконечность.

В действительности, разумеется, благодаря непременному наличию в среде хотя бы малого поглощения поле достигает лишь относительно (по сравнению с окружающим слабым фоном) больших, но конечных значений. Интересно, однако, что уже сколь угодно малая мнимая часть в ε приводит к конечной диссипации энергии. Положим $\varepsilon = -az + i\delta$, $\delta \to +0$. Тогда аналитическое продолжение логарифма в (88,11) с правой полуоси z на левую должно производиться в комплексной плоскости z снизу, и при $z < 0$ будет

$$E_x = H_0 \frac{i\varkappa^2 c}{a\omega} (\ln|\varkappa z| - i\pi).$$

Средний (по времени) поток энергии вдоль оси z,

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(E_x H_y^*)$$

(см. (59,9а)), равен нулю при $z > 0$, а при $z < 0$ появление в E_x вещественной части приводит к отличному от нуля потоку энергии по направлению к плоскости $z = 0$, где эта энергия диссипируется[1]):

$$\bar{S}_z = \frac{\varkappa^2 c^2}{8\omega a} H_0^2 \tag{88,12}$$

(*В. Б. Гильденбург*, 1963).

---

[1]) Этот результат можно получить и исходя из выражения (80,4) для энергии, диссипируемой в единице объема:

$$Q = \frac{\omega\varepsilon'' |\mathbf{E}|^2}{8\pi} \approx \frac{\varkappa^2 c^2 H_0^2}{8\pi\omega} \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{a^2 z^2 + \delta^2} = \frac{\varkappa^2 c^2 H_0^2}{8a\omega} \delta(z);$$

интегрирование по z приводит к (88,12).

Задача

По границе раздела между двумя средами соответственно с положительной и отрицательной диэлектрическими проницаемостями (ε_1 и $-|\varepsilon_2|$) может распространяться поверхностная H-волна, затухающая в глубь обеих сред. Определить связь между ее частотой и волновым вектором.

Решение. Выберем границу раздела в качестве плоскости xy, причем волна распространяется вдоль оси x, а поле $\mathbf{H}$ параллельно оси y. Пусть полупространство $z>0$ заполнено средой с положительной (ε_1), а полупространство $z<0$—средой с отрицательной (ε_2) проницаемостью. Ищем поле в затухающей при $z \longrightarrow \pm\infty$ волне в виде

$$H_1 = H_0 e^{ikx - \varkappa_1 z}, \quad \varkappa_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1} \quad \text{при } z>0,$$

$$H_2 = H_0 e^{ikx + \varkappa_2 z}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}|\varepsilon_2|} \quad \text{при } z<0,$$

причем k, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ вещественны. Граничное условие непрерывности $H_y = H$ уже удовлетворено, а условие непрерывности E_x дает

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_1}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial H_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=0,$$

или $\varkappa_1/\varepsilon_1 = \varkappa_2/|\varepsilon_2|$. Это равенство может быть выполнено лишь при условии

$$\varepsilon_1 < |\varepsilon_2|$$

(и подразумевающемся $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$). При этом связь между k и ω дается уравнением

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_1 |\varepsilon_2|}{c^2(|\varepsilon_2| - \varepsilon_1)}.$$

Распространение же поверхностных E-волн, как легко убедиться, вообще невозможно.

§ 89. Принцип взаимности

Излучение монохроматических электромагнитных волн от источника, представляющего собой тонкий провод, расположенный в произвольной среде, описывается уравнениями

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{D} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ст}}, \tag{89,1}$$

где $\mathbf{j}_{\text{ст}}$—плотность протекающих по проводу «сторонних» (по отношению к среде) периодических токов.

Пусть в среде расположены два различных источника (одинаковой частоты); будем отмечать индексами 1 и 2 поля, создаваемые каждым из этих источников в отдельности. Среда может быть произвольным образом неоднородна и анизотропна. Единственное, что предполагается ниже о ее свойствах, это—линейные соотношения $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$, $B_i = \mu_{ik}H_k$ с симметричными тензорами ε_{ik} и μ_{ik}. В этих условиях оказывается возможным получить определенное соотношение, связывающее между собой поля обоих источников и сторонние токи в них.