где $\mathbf{E}_0 \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$, $\mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$; $\mathbf{r}_0$ — координаты шарика, V_0 — его объем; подразумевается, что размеры шарика настолько малы, что изменением полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на них можно пренебречь.

Таким образом, с учетом (90,5), находим для искомого сдвига частоты:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\alpha_e |\mathbf{E}_0|^2 + \alpha_m |\mathbf{H}_0|^2}{\frac{1}{2\pi}\int |\mathbf{H}|^2\, dV} V_0.$$

Если поляризуемости комплексны, эта формула дает как сдвиг частоты собственных колебаний, так и их затухание.

4. Резонатор заполнен прозрачным диэлектриком без дисперсии с диэлектрической проницаемостью ε_0. Определить изменение собственной частоты при малом изменении $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ диэлектрической проницаемости.

Решение. Невозмущенное поле $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ в резонаторе удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = \frac{i\omega_0}{c}\mathbf{H}_0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -\frac{i\omega_0\varepsilon_0}{c}\mathbf{E}_0,$$

а возмущенное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i(\omega_0 + \delta\omega)}{c}\mathbf{H}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i}{c}(\omega_0\varepsilon_0 + \omega_0\delta\varepsilon + \varepsilon_0\delta\omega)\mathbf{E}$$

(членом с $\delta\omega\,\delta\varepsilon$ пренебрегаем). Поступив с этими четырьмя уравнениями, как в предыдущей задаче, получим

$$\operatorname{div}\left\{[\mathbf{E}\mathbf{H}_0^*] + [\mathbf{E}_0^*\mathbf{H}]\right\} = \frac{i}{c}(\omega_0\delta\varepsilon + \varepsilon_0\delta\omega)\,\mathbf{E}\mathbf{E}_0^* + \frac{i}{c}\delta\omega\,\mathbf{H}\mathbf{H}_0^* \approx$$

$$\approx \frac{i}{c}(\omega_0\delta\varepsilon + \varepsilon_0\delta\omega)\,\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* + \frac{i}{c}\delta\omega\,\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^*,$$

и затем:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\int |\mathbf{E}_0|^2 \delta\varepsilon\, dV}{2\varepsilon_0 \int |\mathbf{E}_0|^2 dV}.$$

При переходе к последней формуле учтено, что для заполненного диэлектриком резонатора соотношение (90,5) приобретает вид

$$\int |\mathbf{H}_0|^2\, dV = \varepsilon_0 \int |\mathbf{E}_0|^2\, dV,$$

как это ясно из (90,9).

§ 91. Распространение электромагнитных волн в волноводах

В отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе резонаторов, имеющих конечный объем, волновод представляет собой полость неограниченной длины — бесконечно длинную полую трубу [1]). В то время как собственные колебания в резонаторе пред-

[1]) Ниже мы пишем все формулы для пустого волновода. Переход к формулам для волновода, заполненного непоглощающим диэлектриком, осуществляется преобразованием (90,9).

ставляют собой стоячие волны, в волноводе волна является стоячей лишь в поперечных направлениях, а в направлении вдоль длины трубы возможно распространение бегущих волн.

Рассмотрим прямолинейный волновод с произвольной (односвязной) формой поперечного сечения, неизменной вдоль его длины. Будем считать сначала, что стенки волновода являются идеально проводящими. Направление длины волновода выберем в качестве оси z. В волне, бегущей вдоль оси z, зависимость всех величин от z дается множителем вида $\exp(ik_z z)$ с постоянным k_z.

Все возможные в таком волноводе электромагнитные волны можно разбить на два типа: в одном из них $H_z=0$, а в другом $E_z=0$ (*Rayleigh*, 1897). Волны первого типа, с чисто поперечным магнитным полем, называют *волнами электрического типа* или *E-волнами*. Волны же с чисто поперечным электрическим полем называют *волнами магнитного типа* или *H-волнами*[1]).

Рассмотрим сначала E-волны; x- и y-компоненты уравнений (90,1) дают

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-ik_zE_y=\frac{i\omega}{c}H_x, \qquad -\frac{\partial E_z}{\partial x}+ik_zE_x=\frac{i\omega}{c}H_y,$$
$$ik_zH_y=\frac{i\omega}{c}E_x, \qquad ik_zH_x=-\frac{i\omega}{c}E_y.$$

Отсюда

$$E_x=\frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \qquad E_y=\frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},$$
$$H_x=-\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \qquad H_y=\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{91,1}$$

где введено обозначение

$$\varkappa^2=\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2.$$

Таким образом, в E-волне все поперечные компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут быть выражены через продольную компоненту электрического поля. Последняя же должна быть определена путем решения волнового уравнения, сводящегося к двумерному уравнению

$$\Delta_2E_z+\varkappa^2E_z=0 \tag{91,2}$$

(Δ_2 — двумерный оператор Лапласа). Граничные условия к этому уравнению заключаются в обращении в нуль касательных составляющих $\mathbf{E}$ на стенке волновода. Для этого достаточно потребовать

$$E_z=0 \text{ на контуре сечения.} \tag{91,3}$$

Согласно формулам (91,1) двумерный вектор с составляющими E_x, E_y пропорционален двумерному градиенту величины E_z. По-

[1]) E- и H-волны называют также соответственно TM- и TE- (поперечно-магнитными и поперечно-электрическими) волнами.

этому при выполнении условия (91,3) автоматически обратится в нуль также и тангенциальная составляющая **E** в плоскости xy.

Аналогичным образом, в H-волне поперечные составляющие **E** и **H** могут быть выражены через продольную компоненту магнитного поля согласно формулам

$$H_x = \frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = \frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},$$
$$E_x = \frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}. \tag{91,4}$$

Продольное же поле H_z дается решениями уравнения

$$\Delta_2 H_z + \varkappa^2 H_z = 0 \tag{91,5}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ на контуре сечения.} \tag{91,6}$$

Это условие обеспечивает согласно формулам (91,4) обращение в нуль нормальной компоненты **H**.

Таким образом, задача об определении электромагнитного поля в волноводе сводится к нахождению решений двумерного волнового уравнения вида $\Delta_2 f + \varkappa^2 f = 0$ с граничным условием $f = 0$ или $\partial f/\partial n = 0$ на контуре сечения. Для заданного контура такие решения имеются лишь при вполне определенных собственных значениях параметра $\varkappa^2$.

Каждому собственному значению $\varkappa^2$ соответствует своя зависимость

$$\omega^2 = c^2 (k_z^2 + \varkappa^2) \tag{91,7}$$

между частотой ω и волновым вектором k_z. Скорость распространения волны вдоль длины волновода дается производной

$$u_z = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{k_z^2 + \varkappa^2}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}. \tag{91,8}$$

При заданном $\varkappa$ она пробегает значения от 0 до c, когда k_z меняется от 0 до ∞.

Средняя (по времени) плотность потока энергии вдоль длины волновода дается z-компонентой вектора Пойнтинга. Простое вычисление с помощью формул (91,1) дает для E-волны

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\{[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_z\} = \frac{\omega k_z}{8\pi\varkappa^4} |\nabla_2 E_z|^2.$$

Полный поток энергии q получается путем интегрирования $\overline{S}_z$ по площади сечения волновода. Имеем

$$\int |\nabla_2 E_z|^2 df = \oint E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int E_z^* \Delta_2 E_z df.$$

Первый интеграл берется по контуру сечения и обращается в нуль в силу граничного условия $E_z=0$. Во втором же интеграле заменяем $\Delta_2 E_z$ на $-\varkappa^2 E_z$ и окончательно получаем

$$q=\frac{\omega k_z}{8\pi\varkappa^2}\int |E_z|^2\,df. \tag{91,9}$$

Для H-волны получается такое же выражение с H_z вместо E_z.

Аналогичным образом можно вычислить плотность электромагнитной энергии W (отнесенную к единице длины волновода). Проще, однако, получить W непосредственно из q, поскольку должно быть $q=Wu_z$. Так, из (91,8) и (91,9) получим

$$W=\frac{\omega^2}{8\pi\varkappa^2 c^2}\int |E_z|^2\,df. \tag{91,10}$$

Из (91,7) следует, что для каждого типа волн (соответствующих определенному значению $\varkappa^2$) существует минимальное возможное значение частоты, равное $c\varkappa$. При меньших частотах распространение данного типа волн становится невозможным. Но среди всех собственных значений $\varkappa$ есть наименьшее, $\varkappa_{\min}$, тоже отличное от нуля (см. ниже). Поэтому мы приходим к выводу, что существует нижняя граница частот, $\omega_{\min}=c\varkappa_{\min}$, за которой вообще невозможно распространение вдоль волновода каких бы то ни было волн. По порядку величины $\omega_{\min}\sim c/a$, где a — поперечные размеры трубы.

Это утверждение, однако, справедливо лишь для волноводов с односвязной формой сечения, которые мы до сих пор и имели в виду. Положение совершенно меняется при многосвязной форме сечения[1]). В таких волноводах, наряду с описанными выше E- и H-волнами, оказывается возможным распространение еще одного типа волн, частота которых не ограничена никакими условиями.

Этот тип волн — так называемая *главная волна* — характеризуется тем, что $k_z=\pm k$ (т. е. $\varkappa=0$); скорость ее распространения совпадает со скоростью света c. Выясним основные свойства этой волны; одновременно мы увидим, почему этот тип волн невозможен при односвязной форме сечения волновода.

Все компоненты поля в главной волне удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа $\Delta_2 f=0$. При граничном условии $f=0$ единственное решение этого уравнения, регулярное во всей области (одно- или многосвязной), есть $f\equiv 0$. Поэтому в главной волне $E_z=0$.

При граничном же условии $\partial f/\partial n=0$ регулярное решение $f=\mathrm{const}$. Легко, однако, видеть, что для $f=H_z$ эта const может быть только нулем (напомним, что const означает величину, не

---

[1]) Речь может идти как о пространстве между двумя вставленными одна в другую трубами, так и о пространстве вне двух параллельных проводов.

зависящую от x, y). Действительно, проинтегрировав уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{i\omega}{c}H_z=0$$

по площади сечения, получаем

$$\oint H_n dl+\frac{i\omega}{c}\int H_z df=0;$$

ввиду равенства $H_n=0$ на контуре сечения и постоянства H_z по его площади отсюда следует, что $H_z=0$.

Таким образом, главная волна чисто поперечна. При $E_z=H_z=0$ x- и y-компоненты уравнений (90,1) дают

$$H_x=-E_y,\quad H_y=E_x, \tag{91,11}$$

т. е. поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и равны друг другу по величине. Для определения этих полей имеем уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0,\quad (\operatorname{rot}\mathbf{E})_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0$$

с граничным условием $\mathbf{E}_t=0$.

Мы видим, что зависимость $\mathbf{E}$ (а с ним и $\mathbf{H}$) от x, y дается решением двумерной электростатической задачи: $\mathbf{E}=-\nabla_2\varphi$, где потенциал φ удовлетворяет уравнению $\Delta_2\varphi=0$ с граничным условием $\varphi=\mathrm{const}$. В односвязной области это граничное условие приводит к $\varphi=\mathrm{const}$ (а потому $\mathbf{E}=0$) как единственному решению, регулярному во всей области. Тем самым доказывается невозможность распространения этого типа волн по волноводам с односвязным сечением. В многосвязной же области значение const в граничном условии не обязано быть одним и тем же на различных граничных контурах, и тогда уравнение Лапласа имеет нетривиальные решения. При этом распределение электрического поля в поперечном сечении волновода соответствует плоскому электростатическому полю между обкладками конденсатора, находящимися при заданной разности потенциалов.

До сих пор мы предполагали стенки волновода идеально проводящими[1]). Наличие же у стенки малого, но все же конечного импеданса приводит к появлению потерь и тем самым к затуханию волны при ее распространении вдоль волновода. Коэффициент затухания может быть вычислен аналогично тому, как в предыдущем параграфе было вычислено затухание со временем электромагнитных колебаний в резонаторе.

Количество энергии, диссипируемой в 1 с в стенках волновода (отнесенное к единице его длины), дается интегралом

$$\frac{c}{8\pi}\zeta'\oint|\mathbf{H}|^2\,dl,$$

[1]) В частности, лишь при этом условии вообще возможно строгое разделение на волны с $E_z=0$ и волны с $H_z=0$.

взятым по контуру сечения; **H** есть магнитное поле, вычисленное в предположении $\zeta=0$. Разделив эту величину на удвоенный поток энергии q вдоль волновода, мы получим искомый коэффициент затухания α. При таком определении α дает скорость затухания амплитуды волны, убывающей вдоль длины волновода, как $e^{-\alpha z}$.

Выражая все величины через E_z или H_z согласно формулам (91,1) или (91,4), получим следующие формулы для коэффициента поглощения E-волны:

$$\alpha=\frac{\omega\zeta'}{2\varkappa^2 k_z c}\frac{\oint |\nabla_2 E_z|^2\,dl}{\int |E_z|^2\,df}, \tag{91,12}$$

и для H-волны:

$$\alpha=\frac{c\varkappa^2\zeta'}{2k_z\omega}\frac{\oint \{|H_z|^2+(k_z^2/\varkappa^4)|\nabla_2 H_z|^2\}\,dl}{\int |H_z|^2\,df}. \tag{91,13}$$

Для фактического вычисления может оказаться удобным преобразовать стоящие в знаменателях поверхностные интегралы в интегралы по контуру. Приведем получающиеся таким образом формулы, вывод которых аналогичен выводу формулы (90,8):

$$\begin{aligned}\int |E_z|^2\,df&=\frac{1}{2\varkappa^2}\oint(\mathbf{nr})\,|\nabla_2 E_z|^2\,dl,\\ \int |H_z|^2\,df&=\frac{1}{2\varkappa^2}\oint(\mathbf{nr})\,\{\varkappa^2|H_z|^2-|\nabla_2 H_z|^2\}\,dl.\end{aligned} \tag{91,14}$$

Когда $k_z\to 0$ (т. е. частота $\omega\to c\varkappa$), выражения (91,12—13) стремятся к бесконечности. При этом, однако, эти формулы перестают быть применимыми, так как их вывод предполагает малость $\varkappa$ по сравнению с k_z.

Формулы (91,12—13) не относятся к главной волне (в волноводе с многосвязным сечением), в которой равны нулю все величины E_z, H_z и $\varkappa$. В этом случае можно выразить все компоненты поля через скалярный потенциал φ. Учитывая взаимную перпендикулярность и равенство по величине полей **H** и $\mathbf{E}=-\nabla_2\varphi$ в главной волне, получим для ее коэффициента поглощения следующее выражение:

$$\alpha=\frac{\zeta'\oint |\nabla_2\varphi|^2\,dl}{2\int |\nabla_2\varphi|^2\,df}. \tag{91,15}$$

Распространение главной волны вдоль волновода может быть сравнительно просто рассмотрено и в тех случаях, когда ее коэффициент поглощения не мал (так что формула (91,15) неприменима), если при этом длина волны c/ω велика по сравнению с поперечными размерами волновода.

Как было указано выше, поперечное электрическое поле в главной волне (в каждый момент времени) соответствует электростатическому полю в конденсаторе, образованном стенками волновода, заряженными равными и противоположными зарядами. Обозначим эти заряды, отнесенные к единице длины волновода, посредством $\pm e(z)$. Они связаны с токами $\pm J(z)$, текущими по стенкам волновода, уравнением непрерывности

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial z},$$

или, для монохроматического поля,

$$i\omega e = \frac{\partial J}{\partial z}.$$

Пусть, далее, C — емкость единицы длины волновода. «Разность потенциалов» между его стенками $\varphi_2 - \varphi_1 = e/C$; дифференцируя ее по z, мы получим э. д. с., поддерживающую протекание тока по стенкам (напомним, что при наличии поглощения поле не является чисто поперечным). Приравняв его ZJ (Z — импеданс единицы длины волновода), получим

$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{e}{C} = ZJ,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial J}{\partial z}\right) + i\omega ZJ = 0. \qquad (91,16)$$

Подставив сюда $Z = R - i\omega L/c^2$ (где R и L — сопротивление и самоиндукция единицы длины волновода), мы можем перейти от монохроматических компонент тока обратно к произвольной функции времени. Предполагая также емкость C постоянной вдоль длины волновода, получим так называемое *телеграфное уравнение*:

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0. \qquad (91,17)$$

В отсутствие поглощения ($R = 0$) это уравнение, как и должно быть, сводится к волновому уравнению со скоростью распространения волн, равной $c/\sqrt{LC} = c$. Равенство $LC = 1$ следует из математической эквивалентности задач об определении $1/C$ и L при заданной форме контуров. Электрическое и магнитное поля между поверхностями идеальных проводников перпендикулярны по направлению и равны по величине (см. (91,11)), причем значение последней на самих поверхностях определяет в первом случае плотность зарядов, а во втором случае — плотность токов. Поэтому совпадают и коэффициенты пропорциональности ($1/C$ и L) между энергией поля и квадратами соответственно заряда или тока.

Задачи

1. Найти значения $\varkappa$ для волн, распространяющихся по волноводу прямоугольного сечения (длины сторон a, b). Найти коэффициенты затухания этих волн.

Решение. В E-волнах[1])

$$E_z = \text{const} \cdot \sin k_x x \sin k_y y,$$

где

$$k_x = n_1\pi/a, \qquad k_y = n_2\pi/b,$$

а n_1, n_2 — целые числа, начиная от единицы. В H-волнах

$$H_z = \text{const} \cdot \cos k_x x \cos k_y y,$$

причем одно из чисел n_1, n_2 может быть равно нулю. В обоих типах волн

$$\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right).$$

Наименьшее значение $\varkappa$ соответствует волне H_{10} (индексы указывают значения n_1, n_2) и равно $\varkappa_{\min} = \pi/a$ (полагаем, что $a > b$).

Коэффициенты затухания вычисляются по формулам (91,12—13) и равны: для E-волн

$$\alpha = \frac{2\omega\zeta'}{c\varkappa^2 k_z ab}\left(k_x^2 b + k_y^2 a\right),$$

для волн $H_{n_1 0}$

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{c k_z ab}\left(a + \frac{2\varkappa^2}{k^2} b\right)$$

и для волн $H_{n_1 n_2}$ $(n_1,\ n_2 \neq 0)$

$$\alpha = \frac{2c\varkappa^2\zeta'}{\omega k_z ab}\left[a + b + \frac{k_z^2}{\varkappa^4}\left(ak_x^2 + bk_y^2\right)\right].$$

2. То же для волновода кругового сечения (радиуса a).

Решение. Решая волновое уравнение в полярных координатах r, φ, получим в E-волнах

$$E_z = \text{const} \cdot J_n(\varkappa r) \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\, n\varphi,$$

с условием $J_n(\varkappa a) = 0$, определяющим значения $\varkappa$. В H-волнах такая же формула дает H_z, а значения $\varkappa$ определяются условием $J'_n(\varkappa a) = 0$. Наименьшим значением $\varkappa$ обладает первая из волн H_1; оно равно $\varkappa_{\min} = 1{,}84/a$.

Коэффициент затухания вычисляется по формулам (91,12—14) и равен для E-волн

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{c a k_z},$$

а для H-волн

$$\alpha = \frac{c\varkappa^2\zeta'}{\omega k_z a}\left[1 + \frac{n^2\omega^2}{c^2\varkappa^2\left(a^2\varkappa^2 - n^2\right)}\right].$$

---

[1]) Множитель $\exp\{i(k_z z - \omega t)\}$ везде опускаем.