скаляр (104,15) в данном случае тоже обращается в нуль, так что и здесь эффекты вдоль оптических осей отсутствуют. Единственным кристаллическим классом, допускающим явление вращения плоскости поляризации вдоль оптической оси и в то же время не допускающим энантиоморфизм, является моноклинный класс C_s.

§ 105. Пространственная дисперсия в оптически неактивных средах

В кристаллах, симметрия которых не допускает естественной оптической активности, первые (после нулевого) члены разложения проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ по степеням $\mathbf{k}$ оказываются квадратичными.

Как обычно в кристаллооптике, для дальнейшего использования удобнее писать это разложение для обратного тензора $\eta_{ik}=\varepsilon_{ik}^{-1}$. Напишем его в виде

$$\eta_{ik}=\eta_{ik}^{(0)}(\omega)+\beta_{iklm}(\omega)\,k_l k_m. \qquad (105,1)$$

Тензор β_{iklm} можно считать симметричным по второй паре индексов, поскольку он умножается на симметричное произведение $k_l k_m$. В силу же (103,10) (с $\mathfrak{H}=0$) тензор β_{iklm} симметричен и по первой паре индексов:

$$\beta_{iklm}=\beta_{kilm}=\beta_{ikml}. \qquad (105,2)$$

Он, однако, не должен быть симметричным по отношению к перестановке обеих пар. В отсутствие поглощения из эрмитовости тензора η_{ik} и его симметричности следует, что тензор β_{iklm} веществен, что и предполагается ниже.

В изотропной среде тензор β_{iklm} должен выражаться только через единичный тензор, т. е. имеет вид

$$\beta_{iklm}=\beta_1\delta_{ik}\delta_{lm}+\frac{\beta_2}{2}(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{kl}\delta_{im});$$

он содержит только две независимые компоненты. В изотропном теле также и $\eta_{ik}^{(0)}=\eta^{(0)}\delta_{ik}$ и, таким образом, тензор (105,1) принимает вид

$$\eta_{ik}=(\eta^{(0)}+\beta_1 k^2)\,\delta_{ik}+\beta_2 k_i k_k, \qquad (105,3)$$

в соответствии с общим выражением (103,12) диэлектрического тензора в изотропной среде с пространственной дисперсией. Распространение волн в среде определяется уравнениями (97,21). Но при подстановке (105,3) в эти уравнения анизотропный член с β_2 выпадает ввиду ортогональности векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{k}$ в плоской волне, т. е. среда остается, как и должно быть, оптически изотропной.

Но уже в кубических кристаллах тензор β_{iklm} не сводится к единичному тензору; в зависимости от кристаллического класса он имеет для этих кристаллов 3 или 4 независимые компоненты. Без учета пространственной дисперсии кубические кристаллы оптически изотропны; учет квадратичной по $\mathbf{k}$ дисперсии приводит к появлению в них нового свойства—оптической анизотропии (*H. A. Lorentz*, 1878).

В кубическом кристалле $\eta_{ik}^{(0)}=\delta_{ik}/\varepsilon^{(0)}$ и разложение (105,1) принимает вид

$$\eta_{ik}=\frac{1}{\varepsilon^{(0)}}\delta_{ik}+\beta_{iklm}k_l k_m. \qquad (105,4)$$

Подставив это выражение в уравнения (97,21), получим

$$\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_0^2}\right)\delta_{\alpha\beta}-\frac{\omega^2 n^2}{c^2}\beta_{\alpha\beta 33}\right]D_\beta=0, \qquad (105,5)$$

где $n_0^2=\varepsilon^{(0)}$, а ось x_3 декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 направлена вдоль волнового вектора. По смыслу разложения (105,4), второй член в квадратных скобках в этих уравнениях надо рассматривать как малую поправку (об особом случае обращения $1/n_0^2$ в нуль см. § 106). Тогда в нем можно заменить n^2 на n_0^2:

$$\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_0^2}\right)\delta_{\alpha\beta}-\frac{\omega^2 n_0^2}{c^2}\beta_{\alpha\beta 33}\right]D_\beta=0. \qquad (105,6)$$

Эти уравнения—такого же вида, как и для волн в некубическом кристалле без учета пространственной дисперсии. Их определитель представляет собой квадратное по n^{-2} уравнение, определяющее показатели преломления двух волн с одинаковым направлением $\mathbf{k}$ и различными поляризациями. Таким образом, пространственная дисперсия в кубическом кристалле снимает «вырождение по поляризации»—скорости двух волн становятся различными и зависящими от направления.

В конце § 84 была упомянута возможность существования продольных электромагнитных волн в прозрачной изотропной среде. Последовательная формулировка условия, определяющего связь между частотой и волновым вектором (закон дисперсии) этих волн, требует учета пространственной дисперсии; оно гласит

$$\varepsilon_l(\omega, k)=0. \qquad (105,7)$$

При малых k решение этого уравнения имеет вид

$$\omega(k)=\omega_{l0}+\frac{1}{2}\alpha k^2, \qquad (105,8)$$

где α—постоянная, а ω_{l0}—значение частоты, обращающее в нуль проницаемость $\varepsilon(\omega)=\varepsilon_l(\omega, 0)$. При этом скорость распространения волны

$$\mathbf{u}=\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}=\alpha\mathbf{k} \qquad (105,9)$$

пропорциональна первой степени волнового вектора.

Задача

Найти соотношения между компонентами тензора β_{iklm} в негиротропных кристаллах кубической системы.

Решение. Естественная гиротропия отсутствует в кристаллических классах T_d, T_h, O_h.

В классах T_d и T_h выбираем оси x, y, z по трем осям симметрии 2-го порядка. Отличные от нуля компоненты тензора:

$$\beta_1 \equiv \beta_{xxxx} = \beta_{yyyy} = \beta_{zzzz}, \quad \beta_2 \equiv \beta_{xxzz} = \beta_{yyxx} = \beta_{zzyy},$$
$$\beta_3 \equiv \beta_{xyxy} = \beta_{yzyz} = \beta_{zxzx}, \quad \beta_4 \equiv \beta_{zzxx} = \beta_{xxyy} = \beta_{yyzz}.$$

В классе O_h три оси C_2 становятся осями C_4, в результате чего дополнительно становится $\beta_2 = \beta_4$.

§ 106. Пространственная дисперсия вблизи линии поглощения

В двух предыдущих параграфах эффекты пространственной дисперсии рассматривались как малые поправки, как это обычно и имеет место. Ситуация меняется, однако, вблизи узкой линии поглощения в кристалле, где согласно (84,7) $\varepsilon^{(0)}(\omega)$ резко возрастает. В этой области учет пространственной дисперсии меняет картину даже качественно.

Дело в том, что добавление в диэлектрическую проницаемость членов со степенями k повышает порядок алгебраического дисперсионного уравнения, определяющего зависимость $k(\omega)$. Поэтому при формальном его решении возникают дополнительные корни. Вдали от линии поглощения эти корни лежат в области больших k, т. е. вне области применимости теории, и потому должны быть отброшены. Но вблизи линии поглощения проницаемость меняется существенно уже при малых k и могут возникнуть дополнительные корни, имеющие реальный физический смысл, т. е. возникают новые поперечные волны.

Мы ограничимся, для простоты, рассмотрением изотропных сред и начнем со случая, когда среда не гиротропна — не обладает естественной оптической активностью (*С. И. Пекар*, 1957; *В. Л. Гинзбург*, 1958).

Как уже было указано в предыдущем параграфе, изотропная среда остается оптически изотропной и при учете пространственной дисперсии. Это значит, что закон дисперсии поперечных электромагнитных волн в такой среде дается обычным уравнением $n^2 = \varepsilon$, причем под ε надо понимать поперечную проницаемость ε_t:

$$n^2 = \varepsilon_t(\omega, k). \tag{106,1}$$

В § 103 было указано, что как функции частоты $\varepsilon_t(\omega, k)$ и $\varepsilon_l(\omega, k)$ удовлетворяют тем же соотношениям Крамерса—Кронига, что и функция $\varepsilon(\omega)$ без пространственной дисперсии. Поэтому можно утверждать, что вблизи линии поглощения функция $\varepsilon_t(\omega, k)$ имеет такой же вид, как и в (84,7), но с постоянными,