Это совершенно очевидно в случае однородной связи ($b=0$), при которой виртуальные перемещения подчинены тем же ограничениям, что и действительно возможные; так, это имеет место для твердого тела, катящегося по *неподвижной* твердой опоре. Но если связь неоднородна, т. е. если b не обращается тождественно в нуль, то все-таки остается в силе соотношение (17), так как мы должны ее взять для одного и того же момента, начального или конечного в нашем промежутке, а потому в уравнениях (8) нужно положить $dt=0$.

4. Системы с односторонними связями.

19. Связи положения. Из числа неголономных связей следует отдельно рассмотреть частный тип систем, наиболее простым примером которых является свободная точка, которая может двигаться без ограничений по одну сторону заданной поверхности, но не может проникнуть на другую сторону ее.

Если $\varphi(x, y, z)=0$ есть уравнение поверхности σ, то две области, на которые она разделяет пространство, характеризуются соответственно неравенствами $\varphi<0$ и $\varphi>0$; поэтому изменяя, когда это необходимо, знак функции на обратный, всегда возможно связь, которою ограничено движение нашей точки, выразить аналитически, если подчинить ее координаты условию:

$$\varphi(x, y, z)\leqslant 0.$$

Такая связь называется *односторонней*[1]; то же наименование сохраняется и в том случае, если часть пространства, в которой должна двигаться точка, ограничена несколькими поверхностями; так, например, условия

$$x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad z\geqslant 0$$

выражают, что точка не должна выходить за пределы положительного октанта координатного триэдра.

Вообще, система, имеющая n степеней свободы,

$$P_i=P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \quad (i=1, 2, 3, \ldots, N), \tag{2}$$

называется ограниченной *односторонними связями* (связями положения), если соответствующие лагранжевы координаты должны

[1] В русской литературе такого рода связи часто называют *неудерживающими*, в отличие от *удерживающих* связей, выражаемых уравнениями вида (4). (*Ред.*)

удовлетворять определенному числу соотношений (зависящих от времени или независящих от него) типа:

$$\varphi_\varkappa(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \leqslant 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \lambda). \tag{18}$$

В противоположность этому, голономные связи, которыми мы занимались в начале настоящей главы, называются двусторонними[1]).

20. В качестве первого простейшего примера системы, подверженной односторонней связи (положения), рассмотрим две точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, соединенные гибкой нерастяжимой нитью длиной l. В самом деле, координаты этих точек при такой связи должны удовлетворять неравенству (в пределе переходящему в равенство):

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leqslant l^2.$$

Во-вторых, рассмотрим шарик радиусом R, который должен оставаться внутри одной из полостей круглого конуса с углом при вершине 2α; поверхность конуса тоже доступна точкам движущегося шарика. Если вершина конуса взята за начало, а его ось за ось z, то точки, лежащие внутри полости конуса или на ее поверхности, характеризуются неравенствами:

$$\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{x^2 + y^2} - z \leqslant 0, \qquad -z \leqslant 0;$$

в нашем случае этим неравенствам должны удовлетворить все точки сферы.

Можно, однако, избегнуть необходимости рассматривать эти соотношения для всех точек шарика. В самом деле, за его лагранжевы координаты можно принять координаты x_0, y_0, z_0 центра C и еще три других параметра для ориентации сферы относительно центра C; этих последних параметров мы здесь не отмечаем, так как нам не придется ими пользоваться. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы шарик не выходил за пределы рассматриваемой полости конуса, сводятся к тому, чтобы его центр C лежал внутри параллельного конуса, расположенного внутри данного на расстоянии R от его поверхности. Мы, таким образом, получаем следующие выражения рассматриваемой односторонней связи:

$$\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leqslant z_0 - \frac{R}{\sin\alpha}, \qquad \frac{R}{\sin\alpha} - z_0 \leqslant 0.$$

21. Пограничные конфигурации и необратимые виртуальные перемещения. Из числа конфигураций, которые может принимать система (2) при односторонних связях, те, которые соответствуют соотношениям (18), когда они представляют собою действительные неравенства, называются *обыкновенными*: те же, которые соответствуют предельным положениям, когда хотя бы одно из

---

[1]) Или, как уже сказано выше, удерживающими. Связи (18) суть связи положения, потому что ограничивают самые положения (конфигурации) системы. Об односторонних связях подвижности речь будет ниже. (*Ред.*)

неравенств (18) обращается в равенство, называются *пограничными* конфигурациями. Так, в примерах, рассмотренных в предыдущих рубриках, система находится в пограничной конфигурации, когда соединяющая две точки гибкая, нерастяжимая нить натянута, т. е. расстояние между двумя точками равно l, или — соответственно — когда шарик касается поверхности конуса.

При этих условиях мы можем распространить на системы с односторонними связями определение виртуальных перемещений, данное в рубр. **14** для голономных систем. Для системы (2), подчиненной связям (18), всякое виртуальное перемещение, исходящее от конфигурации с лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, выражается формулой:

$$\delta P_i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где вариации δq_h лагранжевых координат должны удовлетворять соотношениям:

$$\varphi_\varkappa (q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_3 + \delta q_3 + \ldots + q_n + \delta q_n \mid t) \leqslant 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \lambda);$$

с точностью до бесконечно-малых первого порядка это соотношение можно написать в виде:

$$\varphi_\varkappa (q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) + \delta\varphi_\varkappa \leqslant 0. \tag{19}$$

Если исходная конфигурация (соответствующая лагранжевым координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$) обыкновенная, то все функции $\varphi_\varkappa (q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t)$ имеют отрицательные значения; в силу непрерывности отрицательное значение имеют и суммы $\varphi_\varkappa + \delta\varphi_\varkappa$, поскольку вариации получают достаточно малые значения. Таким образом условия (19) неизбежно удовлетворены; мы отсюда заключаем, что при обыкновенной исходной конфигурации односторонние связи не налагают на виртуальные перемещения никаких ограничений.

Напротив, если исходим от пограничной конфигурации, т. е. от положения, при котором по крайней мере одна из функций $\varphi_\varkappa$, например φ_j, обращается в нуль, то соответствующее условие (19) дает:

$$\delta\varphi_j = \sum_1^n {}_h \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_h} \delta q_h \leqslant 0; \tag{20}$$

это есть действительное ограничение перемещений системы.

Таким образом *односторонние связи только в том случае налагают ограничения на виртуальные перемещения, если они исходят от пограничных конфигураций.*

Все эти соображения становятся вполне наглядными, если обратимся к примерам, рассмотренным выше. Начнем с точки, которая связана тем, что не может проникнуть с одной стороны поверхности σ на другую; пока такая точка движется вне поверхности, ее виртуальные перемещения совершенно произвольны, как и для свободной точки; но как только точка поступает на поверхность, ее виртуальные перемещения уже ограничиваются тем, что точка не может проникнуть в другую сторону поверхности: виртуальные перемещения могут передвинуть ее только вдоль поверхности или могут возвратить ее в ту часть пространства, которая остается для нее при этой связи доступной. Аналогично обстоит дело в случае системы двух точек, связанных гибкой нерастяжимой нитью; пока нить не натянута, точки, в сущности, свободны, и их виртуальные перемещения ничем не ограничены; но как только нить получает натяжение, становятся возможными только такие виртуальные перемещения, которые не раздвигают точек на расстояние, превышающее длину нити. Наконец, в случае шарика, помещенного внутри конуса, виртуальные перемещения ограничены только тогда, когда шарик находится в соприкосновении с поверхностью конуса; в этом положении шарик может подвергнуться только таким виртуальным перемещениям, при которых он сохраняет соприкосновение с поверхностью конуса или отходит внутрь его.

22. Ко всему изложенному присоединим еще одно последнее замечание. Как мы видели (рубр. 15), для голономных систем все виртуальные перемещения обратимы. Если связи системы носят односторонний характер, то при обыкновенных конфигурациях они также не налагают на виртуальные перемещения никаких ограничений. Таким образом ясно, что при односторонней связи виртуальные перемещения также обратимы, пока связь не приходит „в напряжение“, т. е. пока система находится в обыкновенной конфигурации. Не так обстоит дело, когда связь „пришла в напряжение“, т. е. система достигла пограничной конфигурации. В самом деле, обратимся вновь к системе (2), ограниченной связями (18). Предположим, что мы исходим от конфигурации, при которой обращается в нуль хотя бы одна из функций φ_x, скажем, φ_j; тогда виртуальные перемещения должны удовлетворять условию:

$$\delta\varphi_j \leqslant 0; \tag{20'}$$

противоположное смещение получается изменением знаков вариаций всех лагранжевых координат на обратные, поэтому меняет знак и φ_j. Таким образом виртуальное перемещение, исходящее от рассматриваемой пограничной конфигурации, будет обратимым в том и только в том случае, когда совместно с условием (20′) будет также

$$-\delta\varphi_j \leqslant 0;$$

это влечет за собой $\delta\varphi_j = 0$; мы заключаем поэтому, что *виртуальные перемещения, исходящие от пограничной конфигурации,* *вообще необратимы*; обратимы лишь те из них, при которых совместно с каждым соотношением (18), удовлетворяющимся в порядке равенства, обращается также в нуль соответствующая вариация $\delta\varphi_\chi$.

В этом легко отдать себе отчет на рассмотренных уже нами примерах. Если точка, подчиненная связи, в силу которой она не может перейти с одной стороны поверхности σ на другую, в некоторый момент находится на самой поверхности, то необратимыми являются все перемещения, которые должны сдвинуть точку с поверхности; все же ∞^2 перемещений, происходящие по касательным к поверхности, обратимы. Для двух точек, связанных гибкой нерастяжимой нитью, в момент натяжения нити необратимыми являются перемещения, которые стремятся сблизить точки; обратимыми остаются те, которые оставляют расстояние между точками без изменения. Наконец, шарик, вынужденный оставаться внутри данного конуса, в момент соприкосновения с его поверхностью имеет обратимые перемещения, передвигающие его по поверхности, и необратимые, сдвигающие его с поверхности.

23. Односторонние связи подвижности. Связи подвижности также могут быть односторонними. В качестве примера можно опять взять шар, катящийся по неподвижной плоскости; нужно только предположить, что скольжение не возбранено совершенно и может происходить в каком-либо направлении, например — вдоль положительной оси ξ. Тогда первое из уравнений (10), выражающих, что тангенциальные компоненты скорости точки C обращаются в нуль, должно быть заменено условием:

$$R\chi - \dot{\alpha} \leqslant 0 .$$

Из этого ясно, что в наиболее общем положении рядом с двусторонними связями подвижности, выражаемыми уравнениями типа

$$\sum_{1}^{n}{}_{h}\, a_h dq_h + b\, dt = 0 \tag{8}$$

могут появиться связи подвижности вида:

$$\sum_{1}^{n}{}_{h}\, \alpha_h dq_h + \beta\, dt \leqslant 0 .$$

Виртуальные перемещения в этом случае подчинены условиям типа

$$\sum_{1}^{n}{}_{h}\, \alpha_h \delta q_h \leqslant 0 . \tag{21}$$

24. Заключительные соображения. Объединяя предыдущие результаты с теми, которые получены в рубр. 21, мы приходим к заключению, что всякая односторонняя связь, ограничивает ли она положение системы или ее подвижность, является ли она однородной или неоднородной, может налагать на виртуальные перемещения только ограничения типа

$$\sum_{1}^{n}{}_{h} \alpha_h \delta q_h \leqslant 0, \tag{21}$$

так как условия (20) рубр. 21, которые односторонняя связь положения налагает на виртуальные перемещения, исходящие из пограничной конфигурации, имеют в первом члене линейные однородные выражения от вариаций δq_h с той лишь особенностью, что коэфициенты не являются уже произвольными функциями от параметров q_h (иногда даже от времени), но представляют собой частные производные относительно q_h одной и той же функции от параметров q_h (а в подлежащем случае и от t).

Таким образом, по существу, поскольку речь идет о данной конфигурации и о данном моменте, односторонние связи выражаются неравенствами (включая предельный случай равенства), линейными и однородными относительно вариаций δq_h с вполне определенными численными коэфициентами

Сопоставляя аналогично этому соображения рубр. 18 с теми, которые изложены в рубр. 13, можно сказать, что двусторонние связи как положения, так и подвижности, однородные или неоднородные, налагают на виртуальные перемещения условия, выражаемые однородными линейными уравнениями относительно вариаций δq_h, которые все имеют вид:

$$\sum_{1}^{n}{}_{h} a_h \delta q_h = 0\,. \tag{17}$$

Мы приходим, таким образом, к следующему заключению. *Виртуальные перемещения системы S с лагранжевыми координатами $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$, подчиненные дальнейшим связям, односторонним или двусторонним, однородным или неоднородным, от какого бы момента и положения они ни исходили, выражаются линейными и однородными соотношениями от вариаций δq_h; эти соотношения представляют собой равенства вида* (17) *в случае двусторонних связей и неравенства (со включением предельных равенств) вида* (21) *в случае односторонних связей, действующих от рассматриваемой конфигурации $(q_1, q_2, \ldots, q_h)$ и момента t.*

В частном случае, когда для определения системы в качестве лагранжевых координат взяты декартовы координаты отдельных ее точек, виртуальные перемещения в данный момент от данной конфигурации выражаются системой типа:

$$\sum_{1}^{N}{}_{i} (a'_{ki}\delta x_i + a''_{ki}\delta y_i + a'''_{ki}\delta z_i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{22}$$

$$\sum_{1}^{N}{}_{i} (\alpha'_{ji}\delta x_i + \alpha''_{ji}\delta y_i + \alpha'''_{ji}\delta z_i) \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{23}$$

Если введем Nr векторов $\boldsymbol{a}_{ki}$ с компонентами a'_{ki}, a''_{ki}, a'''_{ki} и Ns векторов $\bar{\alpha}_{ji}$ с компонентами α'_{ji}, α''_{ji}, α'''_{ji}, то этим соотношениям можно придать более сжатую форму:

$$\sum_1^N \mathbf{a}_{ki}\,\delta P_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{22'}$$

а

$$\sum_1^N \bar{\alpha}_{ji}\,\delta P_i \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{23'}$$

В этом отношении полезно сделать еще один шаг и ввести обозначения, способные охватить линейность и однородность (относительно $3N$ компонент) условий, которые характеризуют виртуальные перемещения δP_i. С этой целью мы впредь будем пользоваться (как мы это уже делали выше, см., например, рубр. **11**) подходящим символом для обозначения левых частей уравнений (22) и (23) или (22′) и (23′), именно, мы положим:

$$B_k(\delta P) = \sum_1^N{}_i\, \boldsymbol{a}_{ki}\delta P_i \quad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{24}$$

$$U_j(\delta P) \leqslant \sum_1^N{}_i\, \bar{\alpha}_{ji}\delta P_i \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{25}$$

после чего самые уравнения примут вид:

$$B_k(\delta P) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{22''}$$

$$U_j(\delta P) \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{24'}$$