что на них действует одна и та же сила F, то для соответствующих ускорений a_1 и a_2 будем иметь:

$$F = m_1 a_1 \quad \text{и} \quad F = m_2 a_2;$$

переходя к скалярным значениям правых частей, получим:

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1;$$

это значит, что при равных воздействиях скалярные ускорения, испытываемые различными материальными точками, обратно пропорциональны их массам. Таким образом масса указывает различную степень сопротивляемости материальных точек действию динамических агентов — сил; иными словами, она характеризует их *динамическую инерцию*. Этим оправдывается название, которое иногда дают массе — *коэфициент инерции*. Отметим, наконец, что на основе соотношения (6) масса 1 принадлежит каждой частице, в которой в данном месте вес имеет то же значение, что и ускорение g силы тяжести. С другой стороны, если примем для g значения 9,8 (*м/сек*), то мы получаем по формуле (6) приближенное соотношение:

$$m = 0{,}102p,$$

которым пользуются на практике для вычисления массы тела по данному его весу.

8. Спецификация системы отсчета; коррегирующее влияние небесной механики. Неподвижные оси и абсолютное движение. Галилеевы триэдры.

17. До сих пор мы все время руководились более или менее непосредственной индукцией, которую мы всегда основывали на простых, хорошо нам знакомых, явлениях, непосредственно принадлежащих области наших ощущений.

Во всех рассуждениях, касавшихся этих явлений, и в индукции, которую мы из них выводили, речь всегда шла о силах и о движениях. Но при этом не было отчетливо высказано, что речь шла всегда о движениях (а вместе с тем о скоростях, о состоянии покоя, об изменениях скорости и ускорениях) относительно наблюдателя, находящегося в покое в данном месте, или, что то же, относительно осей координат, как-либо закрепленных в данной точке на поверхности земли; об этом не было речи потому, что по ходу наших рассуждений это могло казаться излишним.

Однако Ньютон пришел к широкому обобщению принципов механики, признав их применимыми не только к земным явлениям, но и к движениям небесных тел. Но при такого рода расширения принципов динамики необходимо принять во внимание одно существенное обстоятельство, а именно выбор системы отсчета. После того как благодаря трудам Коперника, Кеплера и Галилея была установлена несостоятельность геоцентрической системы и было обнаружено, что движение различных планет приобретает более простой и однородный характер, когда мы его относим не к земле, а к солнцу, то, совершенно естественно, возникла мысль, что законы динамики, если они все же остаются справедливыми, должны быть отнесены к какому-то телу менее частного характера, нежели наша земля. В соответствии с этим Ньютон прямо допустил, что основное соотношение (5) должно оставаться в силе для изменений движения небесных тел (в частности для членов солнечной системы), если эти движения будут отнесены к так называемым неподвижным звездам [1]).

Как известно, под этим названием, по крайней мере до середины XVIII столетия, разумели светящиеся точки, относительное расположение которых считалось совершенно неизменным. Число их чрезвычайно велико. Новейшие исследования звездной астрономии, сделавшей за последние годы очень большие успехи, установили, что и звезды имеют собственное движение; обнаружены даже целые потоки их. При всем том эти смещения настолько незначительны, что можно считать вполне оправданным термин *система отсчета, установленная по неподвижным звездам;* в случаях, требующих исключительной точности, приходится руководиться статистическими средними [2]). Однако здесь возникает серьезная трудность. Понятию о силе, при антропоморфическом его происхождении, заимствованном от мускульных ощущений, мы склонны приписывать абсолютное значение, т. е. представляем себе, что сила не зависит от состояния движения или покоя наблюдателя. Дело обстоит противоположным образом по отношению к вектору a; последний разделяет относительный характер соответствующего движения, а потому вообще меняется при переходе от одной системы отсчета к другой (конечно, если только речь не идет о системах, находящихся в покое одна относительно другой). Таким образом, для произвольной материальной точки ускорение относительно неподвижных звезд это не то же a, которое представлялось бы наблюдателю на земле, ибо последняя, как хорошо известно, имеет двойное движение: вращательное вокруг собственной оси и поступательное относительно солнца; солнце же, в свою очередь, находится в движении относительно неподвижных звезд, именно — несется к созвездию Геркулеса.

---

[1]) Строго говоря, Ньютон принимает за среду референции не неподвижные звезды, а *пространство*. Однако производить измерения, необходимые для того, чтобы определить положение тела относительно некоторой среды референции, мы имеем возможность, только ориентируясь на материальные тела. Такими телами в вычислениях Ньютона фактически служили неподвижные звезды. (*Ред.*)

[2]) Читатель, интересующийся углубленными исследованиями этого вопроса, найдет соответствующий материал в прекрасном трактате по звездной астрономии проф. Армеллини (*Armellini*, Trattato di Astronomia Siderale, Bologna 1928; см. в частности т. I, стр. 348).

Если бы разница между этими двумя ускорениями была настолько значительной, что ею нельзя было бы пренебречь, то ньютонова индукция, очевидно, была бы лишена надежного основания, потому что она распространяла бы на динамику мироздания принципы, экспериментально установленные и пригодные только для земной механики. Однако, в действительности, можно констатировать, основываясь на теории относительного движения, что разница этих двух ускорений той же точки относительно земной и звездной систем отсчета невелика, и обычно для явлений, которые могут интересовать техника, ею можно вовсе пренебречь.

18. Чтобы это обнаружить, обратимся к теореме Кориолиса IV, рубр. 3):

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{a}_c.$$

За абсолютное мы здесь примем движение точки P относительно звездной системы референции, а за относительное — движение той же точки относительно земли; переносным движением, таким образом, будет движение земли, которое, как выше было указано, нужно рассматривать как поступательно вращательное[1]). Нам нужно вычислить порядок величины абсолютного значения разности между $\boldsymbol{a}_a$ и $\boldsymbol{a}_r$, т. е. вектора

$$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}_c.$$

В переносном ускорении $\boldsymbol{a}_\tau$ рассмотрим отдельно слагающую, обусловливаемую годичным движением земли, и другую слагающую, обусловливаемую суточным ее вращением. В первом движении, имеющем поступательный характер, все точки земли обладают одним и тем же ускорением; его абсолютное значение выражается через (II, рубр. 54):

$$\frac{c^2}{p}\,\frac{1}{\rho^2},$$

где c есть удвоенная секториальная скорость, p — параметр земной орбиты, а ρ — расстояние земли от солнца. Но по третьему закону Кеплера (II, рубр. 54):

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2\,\frac{a^3}{T^2},$$

где a означает большую полуось орбиты, а T — время полного оборота земли; вследствие этого, подставляя вместо a и ρ среднее расстояние земли от солнца, составляющее около 150 млн. *км*,

---

[1]) Заметим, что мы здесь еще пренебрегаем движением, уносящим всю солнечную систему по направлению к созвездию Лиры; при современном состоянии наших познаний это движение представляется прямолинейным и однородным, а потому не оказывает никакого влияния на ускорение отдельных тел (VI, рубр. 4).

т. е. $15 \cdot 10^{10}$ *м*, мы получаем для выражения искомого ускорения (по крайней мере порядка его величины) в метрах в секунду:

$$\frac{4\pi^2 \cdot 15 \cdot 10^{10}}{T},$$

если T есть число секунд, содержащихся в годе. Это дает ускорение, несколько меньшее 1 *см* в секунду, т. е. около 0,001 g.

Чтобы вычислить порядок величины ускорения a_τ, остается рассмотреть ускорение, вызываемое суточным вращением земли, угловая скорость которого по абсолютному значению равна $\omega = \frac{2\pi}{N}$, где N обозначает число секунд, содержащихся в сутках, т. е. в промежутке времени, в течение которого земля возвращается к прежней своей ориентации относительно неподвижных звезд. Если речь идет о секундах среднего звездного времени, то, по самому определению,

$$1 \text{ сутки} = 24^h = (24 \cdot 60 \cdot 60)'' = 86\,400'';$$

если же, напротив того, речь идет о среднем солнечном времени, как это обычно имеет место, то продолжительность суточного обращения выражается несколько меньшим числом, именно 86164; поэтому $\omega = \frac{2\pi}{86\,164}$; вместе с тем, ускорение точки на расстоянии δ от полярной оси равно $\omega^2\delta$ (II, рубр. **33**). Если мы предположим, что точка находится на поверхности земли на широте λ, и через R обозначим радиус земли, то $\delta = R\cos\lambda$, а потому ускорение равно:

$$\frac{4\pi^2\, R\cos\lambda}{(86\,164)^2}.$$

Полагая здесь $\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. предполагая λ равным 45° и подставляя для R его среднее значение в 6371 *км*, мы найдем, что это ускорение несколько меньше 2,5 *см* в секунду.

Что касается, наконец, дополнительного ускорения, то оно, как известно (IV, рубр. **3**), выражается формулой:

$$a_c = [\overline{\omega} v_r];$$

если для скорости v_r примем значение, не превышающее 60 *м* в секунду, каковое редко достигается в технике[1]), то мы приходим к значению, несколько меньшему 0,5 *см* в секунду. Таким образом, в результате всего вычисления разница между ускорением точки относительно земли и относительно неподвижных звезд является по сравнению с ускорением силы тяжести,

[1]) Этот предел оказывается в значительной мере превзойденным в баллистике, поскольку снаряды способны приобретать скорость в несколько сот метров в секунду. В этом случае вообще нельзя пренебрегать членом a_c. От этого, собственно, и зависит одна из так называемых вторичных проблем внешней баллистики (т. II и гл. II).

которое можно принять за основу в вычислениях технического значения, величиной порядка немногих тысячных. К этому следует еще прибавить, что на практике допускается ошибка, значительно меньшая, потому что обыкновенно, когда при вычислении сил за систему отсчета принимают землю, делаются еще и другие поправки (XVI, рубр. 7); этим в большой мере компенсируется ошибка, проистекающая от замены звездной системы отсчета земной.

19. Предыдущее вычисление дает элементарное оправдание индукции, в силу которой основному уравнению динамики (5) приписывается универсальное значение в отношении свода небесного (т. е. неподвижных звезд); в противоположность этому земную систему отсчета, которая нам послужила для первоначального установления принципов механики, мы впредь будем рассматривать как способную дать только приближенные результаты (правда, вполне достаточные для практических нужд). Эта точка зрения, которая, как мы сказали, возникла вследствие стремления распространить законы механики на область астрономии, именно в ней нашла наиболее блестящее и замечательное подтверждение.

В динамике обыкновенно принято называть *абсолютным* всякое движение, отнесенное к какой угодно системе отсчета (триэдру), которая сохраняет неизменное положение относительно неподвижных звезд или которую можно, по крайней мере, считать таковой в пределах точности наших инструментов. В соответствии с этим соглашением, говорят, что основной постулат механики, т. е. соотношение (5), выполняется полностью для абсолютного движения.

Будет полезно повторить, *что для движения земных тел, каковыми, в частности, являются те, которыми мы пользуемся в технических приложениях, можно считать соотношение* (5) *справедливым и по отношению к земной системе; если это соотношение в таком применении не соответствует действительности со всею точностью, то это во всяком случае имеет место с приближением, которое в огромном большинстве случаев превосходит измерения, доступные физическим приборам.*

20. Галилеевы системы отсчета. Чтобы в отношении системы отсчета устранить всякие несущественные ограничения, важно к изложенному прибавить еще одно замечание. Если $\Omega\xi\eta\zeta$ есть триэдр, неподвижный относительно свода небесного, а через $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ обозначим второй триэдр, находящийся в равномерном поступательном движении относительно первого (т. е. в поступательном движении с постоянной скоростью, имеющем поэтому ускорение, равное нулю), то из теории относительных движений (IV, рубр., 4, a) следует, что ускорение какой угодно точки по отношению к триэдру $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ все время остается тождественным с ускорением той же точки относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$; *таким образом основное уравнение* (5) *будет оставаться строго справедливым всякий раз, как движение* *будет отнесено к какому угодно триэдру, находящемуся в равномерном поступательном движении относительно свода небесного, или, иными словами, относительно любого триэдра, оси которого сохраняют неизменное направление, а начало совершает равномерное прямолинейное движение.*

В дальнейшем, всякий раз как мы будем пользоваться уравнением (5), мы будем всегда предполагать, если не будет отчетливо оговорено противное, что движение отнесено к одному из триэдров, о которых мы только что говорили и которые мы будем называть *галилеевыми триэдрами инерции*. Это последнее название было предложено Эйнштейном в его первом мемуаре (1905) о теории относительности и с того времени повсюду принято. Оно представляется не только оправданным, но даже, так сказать, обязательным, поскольку в произведениях Галилея в удивительно ясных и точных выражениях формулирован тот факт, что механические явления следуют тем же законам для двух наблюдателей, находящихся в равномерно поступательном движении друг относительно друга.

Заметим, наконец, что часто при постановке тех или иных проблем механики нам придется говорить *о неподвижных* точках, прямых или плоскостях. Под этим мы всегда будем разуметь точки прямые или плоскости, *неподвижные относительно принятой в механике системы* отсчета; в согласии с тем, что выше изложено, таковой является галилеева система или же, если мы можем удовольствоваться приближением, охарактеризованным в рубр. 18—19, триэдр, связанный с землей.

9. Математическое выражение физических сил. Позиционные и консервативные силы.

21. На основе уравнения

$$F = ma, \tag{5}$$

объединяющего принципы механики, возникает два типа задач, обратных одна другой: 1) каким-либо образом задано движение материальной точки, а также и известна ее масса; требуется найти силу, которая, действуя на эту материальную точку, была бы способна сообщить ей заданное движение; 2) задана действующая на точку сила, и требуется определить движение точки. В том и другом случае под действующей силой мы разумеем равнодействующую всех приложенных к этой точке сил.

Первая задача разрешается просто и непосредственно: при указанных заданиях она требует только диференцирования. В самом деле, если

$$P = P(t) \tag{6}$$

есть геометрическое уравнение движения, которое по отношению к галилееву триэдру выражается скалярными уравнениями:

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t),$$