Уравнение, которое выражает закон рассматриваемого явления, можно поэтому представить в виде:

$$q = \psi(l_1, l_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots; m_1, m_2, \ldots); \tag{7}$$

это уравнение, поскольку оно выражает закон самого явления, должно остаться в силе, какова бы ни была система принятых единиц. Но если мы уменьшим единицы длины, времени и массы в отношениях 1 к $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{\mu}$, то числа l_i, t_i, m_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ окажутся умноженными на λ, τ, μ, а число q на $\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}$, где n_1, n_2, n_3 суть размеры (показатели размерности) соответствующей механической величины. Поэтому совместно с соотношением (7), как бы ни были выбраны числа λ, τ, μ, должно будет иметь место уравнение:

$$\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3} q = \psi(\lambda l_1, \lambda l_2, \ldots; \tau t_1, \tau t_2, \ldots; \mu m_1, \mu m_2, \ldots). \tag{8}$$

Это значит, что уравнение (7) должно быть однородным, и притом степени n_1 относительно длин, n_2 относительно времени, n_3 относительно масс; иначе говоря, всякое уравнение, выражающее механический закон какого-либо явления, обладает тройной однородностью относительно длин, времен и масс, от которых оно зависит. Совершенно такая же однородность, конечно, имеет место также и относительно любых других трех величин, независимых по своим размерностям, если мы себе представим, что все величины, входящие в рассматриваемый закон, выражены через эти новые основные величины. Во всяком случае в этом смысле оказывается однородным основное уравнение динамики, равно как и уравнения, выражающие теоремы о живой силе, об импульсе и количестве движения:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \quad L = T - T_0, \quad \boldsymbol{I} = \Delta(m\boldsymbol{v}).$$

3. Механическое подобие и модели.

12. К соображениям предыдущего параграфа о размерах механических величин и об изменении соответствующих единиц присоединяется теория механического подобия, краткий очерк которой мы здесь дадим.

Прежде всего, напомним, что две системы точек называются *геометрически подобными*, если между точками одной и другой системы можно установить двуоднозначное соответствие (взаимно однозначное соответствие) таким образом, что гомологичные (соответственные) отрезки всегда сохраняют одно и то же отношение λ. Отсюда, как известно, вытекает равенство соответствующих углов, а также пропорциональность гомологичных площадей и объемов соответственно в отношениях λ^2 и λ^3.

13. Кинематическое подобие. Рассмотрим две системы точек Σ и Σ', находящиеся в движении относительно одной и той же системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ — первая в промежутке времени от t_0 до t_1, вторая в промежутке времени, вообще отличном от первого, от t_0'

до t'_1, где t_0, t_1, t'_0, t'_1 представляют собой значения одной и той же независимой переменной — *абсолютного времени* (II, рубр. 3).

Обозначим через τ отношение $\frac{t_1 - t_0}{t'_1 - t'_0}$ и согласимся считать соответствующими или *гомологичными* два момента t и t' в интервалах этих двух движений, когда они связаны соотношением:

$$t - t_0 = \tau (t' - t'_0);$$

это влечет за собой соотношение между диференциалами, выражающееся пропорциональностью $dt = \tau\, dt'$. Предположим теперь, что возможно выбрать два ортогональных триэдра T и T', которые оба остаются в покое относительно системы $\Omega\xi\eta\zeta$, таким образом, чтобы в соответствующие моменты две фигуры (Σ, T) и (Σ', T'), хотя бы даже и деформируясь, сохраняли при движении систем Σ и Σ' геометрическое подобие с постоянным (т. е. не зависящим от времени) отношением λ каждого отрезка первой системы к соответствующему отрезку второй системы.

В таком случае говорят, что две системы Σ и Σ' *кинематически подобны.*

Мы здесь докажем, что для такого рода систем имеют место следующие предложения:

1) *Траектории, описанные различными точками системы Σ, в своей совокупности составляют фигуру, геометрически подобную фигуре, которая составлена из траекторий гомологичных точек фигуры Σ'.*

2) *Скорости и ускорения двух гомологичных точек системы Σ и Σ' имеют в соответствующие моменты гомологичные напряженности и стороны обращения в геометрическом подобии соответствующих конфигураций их траекторий; напряженности же их находятся в постоянных отношениях соответственно* $\lambda\tau^{-1}$ и $\lambda\tau^{-2}$.

В самом деле, если P и P' суть произвольные гомологичные точки систем Σ и Σ', то две фигуры (P, T) и (P', T') в соответствующие моменты t и t' геометрически подобны; если поэтому обозначим через x, y, z координаты точки P относительно триэдра T, через x', y', z' координаты точки P' относительно триэдра T', то неизбежно будем иметь:

$$x(t) = \lambda x'(t'),\ \ y(t) = \lambda y'(t'),\ \ z(t) = \lambda z'(t');$$

так как эти уравнения должны иметь место для каждой пары гомологичных точек и для каждой пары соответствующих моментов, то они доказывают утверждение, относящееся к траекториям.

Если теперь продиференцируем эти уравнения относительно t и примем во внимание, что $dt = \tau\, dt'$, то получим:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dx'}{dt'},\quad \frac{dy}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dy'}{dt'},\quad \frac{dz}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dz'}{dt'},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2x'}{dt'^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2y'}{dt'^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2z'}{dt'^2};$$

эти уравнения, в свою очередь, доказывают утверждение, относящееся к скоростям и ускорениям.

14. Критерии кинематического подобия. Из определения кинематического подобия, данного в предыдущей рубрике, можно вывести критерий, который позволяет распознать такое подобие путем сопоставления начальных состояний движения и одних только ускорений в произвольные соответственные моменты; этот критерий приводит к весьма замечательным выводам.

Рассмотрим две системы точек Σ и Σ', находящиеся в движении относительно одной и той же системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$; предположим, что можно зафиксировать два триэдра T и T', неподвижные относительно $\Omega\xi\eta\zeta$, и установить двуоднозначную зависимость между точками этих систем таким образом, что:

a) *конфигурация, которую образует система* (Σ, T) *в момент* t_0, *геометрически подобна конфигурации, которую образует система* (Σ', T') *в определенный момент* t'_0, *вообще отличный от* t_0.

b) *скорости, которые имеют в эти два начальные момента точки системы* Σ *и гомологичные точки системы* Σ', *одинаково ориентированы относительно соответствующих триэдров* T *и* T' *и имеют пропорциональные напряженности.*

Если λ и ν суть отношения пропорциональности между длинами и скоростями систем Σ и Σ' в начальные моменты t_0 и t'_0, то мы положим $\nu = \lambda\tau^{-1}$, т. е. $\tau = \lambda\nu^{-1}$. Принимая теперь, что движение систем Σ и Σ' происходит от соответствующих начальных моментов t_0 и t'_0, мы установим между моментами t, следующими за t_0, и t', следующими за t'_0, соотношение, выражаемое равенством:

$$t = t_0 + \tau(t' - t'_0); \tag{9}$$

в этих условиях мы утверждаем, что для существования механического подобия двух движущихся систем достаточно, чтобы

c) *в соответствующие моменты* t *и* t' *ускорения гомологичных точек систем* Σ *и* Σ' *были одинаково ориентированы относительно триэдров* T *и* T' *и имели пропорциональные напряженности в отношении* $\alpha = \lambda\tau^{-2}$.

В самом деле, при обозначениях предыдущей рубрики, вследствие соотношения c), имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2z'}{dt'^2};$$

интегрируя эти уравнения по t и припоминая, что в силу соотношения (9) $dt = \tau\, dt'$, получим:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dx'}{dt'} + c_1, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dy'}{dt'} + c_2, \quad \frac{dz}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dz'}{dt'} + c_3;$$

теперь достаточно учесть начальную пропорциональность скоростей и соотношение $\nu = \lambda\tau^{-1}$, чтобы убедиться, что три постоянные интегрирования равны нулю.

Новое интегрирование в связи с условием b) геометрического подобия в начальный момент (при отношении λ) приводит к равенствам:

$$x = \lambda x'(t'), \quad y(t) = \lambda y'(t'), \quad z(t) = \lambda z'(t'),$$

которые устанавливают кинематическое подобие наших двух систем.

15. Материальное подобие и механическое подобие. Относительно двух систем материальных точек Σ и Σ', приведенных в двуоднозначное соответствие, говорят, что они *материально подобны*, если массы соответствующих элементов находятся между собой в постоянном отношении.

Следует здесь же отметить, что в случае геометрически подобных систем такое материальное подобие с наибольшей простотой реализуется, если составить гомологичные элементы из того же материала.

Теперь предположим, что нам даны две системы Σ и Σ' в движении и что возможно установить двуоднозначное соответствие между точками обеих систем, а также двуоднозначное соответствие между моментами промежутков времени, в течение которых совершается движение, и притом так, что обе системы будут иметь одновременно как материальное, так и кинематическое подобие. В этом случае говорят, что эти системы *механически подобны*.

Если m есть масса точки системы Σ, $\boldsymbol{a}$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}$ — полная действующая на нее сила, а с другой стороны, m', $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{F}'$ суть аналогичные элементы, отвечающие соответствующей точке системы Σ', то будем иметь:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{F}' = m'\boldsymbol{a}'.$$

Так как $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ в соответствующие моменты имеют гомологичные направления по их геометрическому подобию, то отсюда вытекает, что то же самое имеет место также для сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$; более того, так как

$$m = \mu m', \quad a = \lambda\tau^{-2} a',$$

то между гомологичными силами в соответствующие моменты будет иметь место соотношение:

$$\boldsymbol{F} = \lambda\tau^{-2}\mu\boldsymbol{F}';$$

иными словами, силы, действующие в системе Σ, находятся к гомологичным силам, действующим в системе Σ', в постоянном отношении $\lambda\tau^{-2}\mu$. Если поэтому обозначим через φ отношение подобия сил, то между четырьмя отношениями λ, τ, μ, φ имеет место уравнение:

$$\varphi = \lambda\tau^{-2}\mu; \tag{10}$$

благодаря этому, когда указаны три из этих отношений, то ими определяется четвертое; таким образом, на основе размеров будут определены отношения подобия всех остальных механических величин, соответствующие друг другу в двух системах.

Соотношение (10), по существу, исходит от Ньютона, которому мы обязаны понятием о механическом подобии.

16. Теорема Ньютона. Изложенные выше соображения существенным образом зависят от сделанного предположения, что для двух систем Σ и Σ' действительно имеет место механическое подобие; оно по самому определению своему включает подобие кинематическое, а в силу этого и геометрическое, а вместе с тем и материальное.

Даже и в том случае, когда речь идет о деформирующихся системах, материальное подобие может быть, по крайней мере в определенный момент, как и геометрическое, фактически осуществлено; как уже было указано, это можно сделать при помощи простых конструктивных средств (сделать гомологичные части подобными по форме из того же материала); совершенно иначе обстоит дело в случае кинематического подобия; в самом деле, если даже начальное состояние движения двух материальных систем и представляет требуемое подобие, то в дальнейшем они двигаются по условиям, определяемым окружающими физическими обстоятельствами (связями, силами, сопротивлениями), которым они подчинены; и в общем нет основания ожидать, что их механическое подобие повторится при таком движении.

В этом порядке идей имеет место важное предложение, также исходящее от Ньютона. Положим, что для двух материальных систем Σ и Σ' оправдываются начальные условия подобия a) и b) рубр. 14, но вместо третьего соотношения c) имеют место два следующие:

c$'$) *две системы Σ и Σ' материально подобны, причем между гомологичными массами имеет место соотношение* $m = \mu m'$, где μ есть постоянная;

c$''$) *в соответствующие моменты t и t', связанные соотношением* (9), *полные гомологические силы F и F' одинаково ориентированы относительно соответствующих триэдров отсчета T и T', и между их напряжениями также имеет место пропорциональность $F = \varphi F'$, где $\varphi = \lambda\mu\tau^{-2}$.*

При этих условиях мы непосредственно убеждаемся, что наши две системы механически подобны. В самом деле, если примем во внимание, что для каждой пары гомологических точек ускорения задаются соотношениями $a = \frac{F}{m}$ и $a' = \frac{F}{m'}$, то достаточно скомбинировать задания c$'$) и c$''$), чтобы вывести из них третье условие c) рубр. 14. Поэтому имеет место кинематическое подобие, а так как, по предположению, имеет также место и подобие материальное, то эти две системы механически подобны.

Этот последний результат приобретает особое значение в конкретных приложениях, так как он остается даже в силе (по крайней мере в идеальном случае систем, свободных от трения), если *основное предположение* c'') *относится только к непосредственно приложенным силам*, которые, в отличие от реакции связей, входят в состав величин, предполагаемых в проблеме данными.

Мы здесь ограничимся только формулировкой этого предложения и заметим, что это замечательное расширение результата Ньютона [1]) представляет собой следствие начала виртуальных работ, которым мы займемся ниже.

17. Модели. Учение о механическом подобии находит себе важное приложение при изучении уменьшенных моделей машины.

Изобретатель какой-либо машины всегда желает, раньше чем осуществить свое изобретение, на деле убедиться, что оно будет функционировать так, как это следует из его соображений; он прибегает для этого к исследованию действия модели, надлежащим образом построенной в малом масштабе. Если эта модель в своем действии подобна механически проектируемой машине, то изобретатель может обнаружить по каждой величине, измеряемой непосредственно на модели, значение соответствующей механической величины при действии самой машины, в предположении, конечно, что он знает отношение механического подобия.

Однако возможность построить модель, которую хотя бы приближенно можно было действительно считать подобной проектируемой машине, зависит от совокупности обстоятельств, которые необходимо рассчитать и обсудить в каждом отдельном случае; иногда они представляют совершенно непреодолимые препятствия для практического осуществления такого плана.

С точки зрения исторической, следует отметить, что уже Галилей ставил себе вопрос, почему иногда случается, что такого рода модель в миниатюре действует в совершенстве, между тем как построенная вслед за этим машина в нормальном размере не дает удовлетворительных результатов; с гениальной интуицией он приписал этот факт различному соотношению пассивных сопротивлений в модели и машине.

Мы постараемся здесь выяснить указанные трудности и, с другой стороны, чтобы иллюстрировать на примерах полезность этого метода в благоприятных случаях, рассмотрим некоторые конкретные вопросы.

18. Предположим, что построена модель ω машины Ω, подобная ей не только с геометрической точки зрения, но также и по структуре отдельных гомологичных частей, которые мы будем считать построенными в Ω и ω из того же материала; пусть λ будет отношение геометрического подобия между Ω и ω.

---

[1]) Оно принадлежит Бертрану: *J. Bertrand*, Nôte sur la similitude en Mécanique, „Journal de l'École Polytechnique", Cahier XXXII, 1848.

Соответствующие детали той и другой машины, будучи геометрически подобны и имея ту же материальную структуру, имеют веса, пропорциональные соответствующим объемам, которые находятся между собой в отношении λ^3; а так как ускорение силы тяжести g не меняется при переходе от машины Ω к ее модели ω (поскольку мы можем считать, что та и другая находятся на ограниченном участке земли), то отношение подобия μ между массами также равно λ^3. В большей части конкретных случаев при изучении хода машины и ее модели нельзя пренебрегать влиянием веса отдельных их частей; нужно поэтому учитывать эти веса в числе сил, действующих на Ω и ω; и поскольку аналогичные веса при поставленных условиях сохраняют отношение λ^3, то механическое подобие между Ω и ω может осуществиться только в том случае, если и другие гомологичные силы, действующие в этих механизмах, находятся в том же отношении λ^3.

Однако часто проявляются специальные силы (как сопротивления среды и трения), которые по самой своей природе не могут при прочих равных условиях меняться от машины к модели в отношении λ^3. В этих случаях приходится пытаться преодолеть эту трудность, считаясь с особенностями каждого случая; обычно для этого приходится отказаться от материального подобия и стараться подходящим образом подобрать материальную структуру отдельных частей модели, физические условия, в которых она будет функционировать, и т. д.; но здесь невозможно входить в эти проблемы, которые относятся уже к области техники.

Здесь мы будем все же исходить из гипотезы, что в благоприятном случае все гомологичные силы, действующие в Ω и ω, находятся между собой в отношении весов λ^3; полагая поэтому в уравнении (10)

$$\mu = \varphi = \lambda^3, \tag{11}$$

мы сейчас же приходим к выводу, что для возможности механического подобия отношение времен должно быть равно:

$$\tau = \lambda^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

Мы видим таким образом, что в тех случаях, когда веса частей существенным образом влияют на ход машины, механическое подобие в наиболее благоприятных предположениях зависит от одного только отношения λ гомологичных длин.

В этих условиях произвольный коэфициент приведения

$$\chi = \lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}$$

соотношений (11) и (12) приобретает значение:

$$\chi = \lambda^{n_1 + \frac{n_2}{2} + 3n_3};$$

мы можем, таким образом, формулировать следующее правило Ньютона: *если построена модель ω машины Ω, геометрически и* *механически ей подобная, — если, сверх того, удовлетворено существенное условие, что гомологичные силы находятся между собой в отношении* λ^3, *то можно предучесть значение* Q *какой угодно механической величины, имеющей размеры* n_1, n_2, n_3, *в машине* Ω, *определяя на модели* ω *меру* q *рассматриваемой величины и применяя формулу:*

$$Q = \lambda^{n_1 + \frac{n_2}{2} + 3n_3}\, q. \tag{13}$$

19. В качестве простейшего примера предыдущей теоремы рассмотрим два маятника, сколь угодно сложных, но подобных по своей геометрической и материальной структуре, и разыщем отношение соответствующих продолжительностей T и T' их колебаний.

В первом приближении можно пренебречь сопротивлением воздуха и трением маятника о ребра привеса; в таком случае единственными силами, непосредственно приложенными к обоим маятникам, являются их веса. Отношение же весов есть λ^3, если λ есть отношение геометрического подобия. При этих условиях оказывается применимой теорема предыдущей рубрики, и соотношение (13) дает непосредственно:

$$T = \lambda^{\frac{1}{2}}\, T'.$$

Отношение подобия λ (двух гомологичных отрезков) можно, в частности, толковать как отношение длин двух маятников; мы приходим, таким образом, к следующему наглядному выражению теоремы: *продолжительности колебаний двух подобных маятников находятся в отношении корней квадратных из их длин.*

20. Полезно отметить, что при учете сопротивления воздуха два маятника уже не могут считаться механически подобными; точнее, в этом случае не удовлетворяется существенное условие применимости теоремы рубр. 18. Действительно, опыт показывает, что для медленных движений (каковыми обыкновенно являются колебания маятника) сопротивление, которое встречает со стороны воздуха каждый элемент поверхности, при прочих равных условиях прямо пропорционально площади элемента и скорости. Так как отношение подобия площадей равно λ^2, а отношение скоростей в силу соотношения (13), в котором нужно положить $n_1 = 1$, $n_2 = -1$, $n_3 = 0$, есть $\lambda^{\frac{1}{2}}$, то мы отсюда заключаем, что сопротивления, которые преодолевают маятники, находятся между собой в отношении

$$\lambda^2 \lambda^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{5}{2}},$$

а не λ^3, как это требовало бы применение теоремы рубр. 18.

21. Отношение $\lambda^{\frac{5}{2}}$ имеет место в случаях геометрически и материально подобных систем для сопротивления какого угодно рода, если только они пропорциональны площади, на которую они действуют, и скорости. Такого рода сопротивления, как мы увидим в динамике, называются *вязкими*.

Если же, напротив того, приходится иметь дело с так называемыми *гидравлическими* сопротивлениями, т. е. пропорциональными площади действия и *квадрату* скорости, то соответствующее отношение, в том же предположении геометрического и материального подобия, выражается через

$$\lambda^2 (\lambda^{\frac{1}{2}})^2 = \lambda^3.$$

Таким образом в этом случае сопротивления удовлетворяют требованиям, при которых можно применять теорему рубр. 18.

К гидравлическому типу, сейчас определенному, можно отнести, по крайней мере в первом приближении, сопротивление, которое встречает судно, например, влекомое на буксире. Если в таком случае рассмотрим судно Ω и его модель ω, подобные геометрически и материально, то сопротивления R и r, которые в условиях гомологичного движения встречают судно и его модель, связаны, как указано выше, соотношением:

$$R = \lambda^3 r.$$

Чтобы точно установить условия соответствия в этом подобии, мы прибегнем к скорости, которая представляет собой кинематический элемент, наиболее просто вычисляемый; соотношение, определенное выше для сопротивлений, остается в силе для скоростей, которые находятся между собой в отношении $\lambda^{\frac{1}{2}}$, т. е. связаны зависимостью:

$$V = \lambda^{\frac{1}{2}} v.$$

Мы приходим, таким образом, к правилу Фруда: *если построена модель судна, геометрически и материально ему подобная, причем отношение между гомологичными длинами судна и модели есть λ, и если при скорости v модель встречает сопротивление r, то судно при скорости $v\lambda^{\frac{1}{2}}$ встретит сопротивление $r\lambda^3$.*

Аналогично этому между мощностями Π и π, необходимыми для продвижения и для тяги судна и модели, в указанных выше условиях скоростей мы получаем на основе соотношения (13), в котором нужно положить размеры $n_1 = 2$, $n_2 = -3$, $n_3 = 1$ (рубр. 7), следующую зависимость:

$$\Pi = \lambda^{\frac{1}{2}} \pi.$$

22. До сих пор мы рассуждали в предположении, что между приложенными силами фигурируют веса; но бывают случаи, в которых действием тяжести можно пренебречь; в некоторых

случаях оно нейтрализуется другими силами, действие которых исключительно в этом только и проявляется.

Вернемся, например, к случаю судна; совершенно ясно, что на ход судна в навигации действует его вес; но при этом все-таки можно принять, что на *спокойной* воде, в нормальных условиях погружения, этот вес нейтрализуется давлением воды; таким образом можно ту и другую силу вовсе опустить. Заметим, кстати, что то же можно сказать о подводных судах, а в воздухе об аэростатах и дирижаблях.

Имея это в виду, рассмотрим, как в предыдущей рубрике, судно Ω и его модель ω, подобную ему геометрически и материально при отношении λ геометрического подобия. И здесь материальное подобие судов Ω и ω приводит массы к отношению $\mu = \lambda^3$; но так как в установленном сейчас смысле мы здесь можем весами пренебречь, то отношение гомологичных сил a priori остается неопределенным. Иными словами, здесь представляется возможность такого механического подобия, которое зависит уже не от одного произвольного отношения (т. е. отношения длин), как в предыдущих примерах, но от *двух* произвольных отношений: от геометрического отношения λ и другого отношения механического типа. Таким образом при определении подобия мы можем предуказать, кроме λ, еще отношение φ гомологичных сил или же отношение τ времен или, наконец, отношение гомологичных значений какой бы то ни было механической величины, не зависящей исключительно от длин и масс. Мы здесь предположим, что предуказано отношение ν скоростей, поскольку скорости сами по себе имеют в том случае, который нас теперь занимает, особенно важное значение с точки зрения практического применения этой задачи. Отношение ν скоростей связано с отношениями λ и τ длин и времен соотношением

$$\nu = \lambda\tau^{-1} \quad \text{или} \quad \tau = \lambda\nu^{-1}; \tag{14}$$

вместе с тем, для механических величин, имеющих относительно длин, времен и масс размеры n_1, n_2, n_3, отношение

$$\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}$$

принимает в нашем случае значение:

$$\lambda^{n_1}(\lambda\nu^{-1})^{n_2}\lambda^{3n_3} = \lambda^{n_1+n_2+3n_3}\nu^{-n_2}$$

ввиду того, что, с одной стороны, имеет место соотношение (14), а с другой стороны, вследствие материального подобия, $\nu = \lambda^3$.

Если теперь через Q и q обозначим меры (т. е. численные значения, выраженные в одной и той же системе единиц) какой-либо величины с размерами n_1, n_2, n_3 для судна и для модели, то будем иметь:

$$Q = \lambda^{n_1+n_2+3n_3}\nu^{-n_2}q.$$

Таким образом, например, между мощностями Π и π, необходимыми для сообщения судну и модели скоростей, находящихся в отношении ν, будет иметь место зависимость:

$$\Pi = \lambda^2 \nu^3 \pi. \tag{15}$$

23. Чтобы дать интересное приложение формулы (15), покажем, в какой мере она оправдывает тенденцию, доминирующую в современном судостроении, увеличивать размеры пароходов даже независимо от усовершенствования типа судна.

Чтобы не менять принятых уже обозначений, будем разуметь под Ω и ω два парохода, подобные между собой геометрически и материально во всех своих частях, а следовательно, и в отношении машин, винтов и т. д. Поставим себе, прежде всего, целью рассмотреть, в каком отношении находятся между собой скорости этих двух пароходов, когда соответствующие машины функционируют одинаковым образом.

Естественно, чтобы самая задача имела смысл, нужно, прежде всего, точно установить, что мы, собственно, разумеем под одинаковым функционированием машин. Мы, конечно, предполагаем, что тип обеих машин один и тот же; при этих условиях целесообразно говорить, что они одинаково функционируют, если в равные промежутки времени они поглощают количества угля, пропорциональные емкости соответствующих печей, т. е. имеющие отношение λ^3.

С другой стороны, заметим, что на ходу работа, производимая тепловой машиной за данное время, находится в постоянном отношении к количеству поглощаемого топлива; это отношение зависит только от типа машины; таким образом в нашем случае это отношение будет то же для машин Ω и ω.

Отсюда следует, что отношение количеств угля, поглощаемых обеими машинами в единицу времени, не может отличаться от отношения мощностей обеих машин, т. е. по формуле (15) от $\lambda^2\nu^3$; учитывая двоякий расчет, полученный для отношения количеств поглощаемого угля на обоих судах в условиях одинакового функционирования, мы заключаем, что должно иметь место равенство:

$$\lambda^3 = \lambda^2 \nu^3,$$

откуда следует, что

$$\nu = \sqrt[3]{\lambda};$$

вместе с тем искомое отношение скоростей V и v двух пароходов будет:

$$V = \sqrt[3]{\lambda} v;$$

это значит: *в условиях одинакового функционирования машин скорость возрастает, как корень кубичный из отношения длин.* С другой стороны, на обоих судах объемы, а следовательно, и тоннажи находятся, как и расходы топлива, в отношении λ^3; мы видим, таким образом, что при равных временах стоимость транспорта, отнесенная к тонне, остается та же в обоих случаях. Но при равенстве пробега более быстрое судно имеет, очевидно, преимущество, так как расходы по транспорту (отнесенные, например, к тонне на километр) оказываются обратно пропорциональными скоростям. Таким образом стоимость перевозки тонны на километр на судне Ω составляет

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}$$

аналогичной стоимости на судне ω.

Положим, например, что ω есть судно длиной в 100 *м*, которое делает нормально 20 узлов в час (один узел равен одной морской миле или 1852 *м*); если построим подобное судно в 130 *м* длины, то будем располагать скоростью в

$$20\sqrt[3]{\frac{130}{100}} = 20 \cdot 1{,}091 = 21{,}82,$$

т. е. почти 22 узла; стоимость провоза тонны на километр снизится на $\frac{1}{1{,}091} = 0{,}916$ цены на пароходе ω; мы получили бы, таким образом, экономию, превосходящую 8%, помимо преимущества более быстрой доставки.

24. Примем теперь для обоих судов Ω и ω ту же самую скорость ($\nu = 1$); соотношение (15) показывает, что отношение мощностей, которыми для этого должны располагать машины, должно быть равно λ^2. Предположим далее, по крайней мере в пределах довольно грубого приближения, что отношение мощностей совпадает с отношением количеств топлива, поглощаемых в одинаковое время; тогда для соответствующих расходов S и s мы можем положить:

$$\frac{S}{s} = \lambda^2;$$

с другой стороны, отношение тоннажей $\frac{K}{k}$ всегда совпадает с отношением объемов; отсюда следует, что

$$\frac{S}{K} : \frac{s}{k} = \frac{1}{\lambda}.$$

S и s представляют расходы в одинаковые промежутки времени; относя их, в частности, к промежутку времени (одинаковому ввиду принятого равенства скоростей), в которое оба судна проходят 1 *км*, мы замечаем, что два отношения $\frac{K}{S}$ и $\frac{s}{k}$ представляют собой не что иное, как стоимости перевозки тонны на километр. Этот расход для судна Ω составляет, таким образом, приблизительно $\frac{1}{\lambda}$ часть аналогичного расхода на судне ω.

В предыдущем примере $\frac{1}{\lambda} = \frac{100}{130} = 0{,}769$. Экономия достигает, таким образом, 23% без потери в скорости.

Эти соображения не имеют вполне точного количественного значения; но они достаточно определенно свидетельствуют, что тенденция к строению морских колоссов имеет ясно выраженные преимущества.

25. Итак, в случаях, когда можно пренебречь влиянием тяжести, мы располагаем еще одним отношением, которое вместе с λ определяет механическое подобие. Приведем еще один пример для иллюстрации преимущества, которое это может дать.

Рассмотрим так называемые винтовые пропеллеры, применяемые на судах и дирижаблях (в случае самолетов совершенно пренебрегать весом невозможно).

Наиболее отчетливой характеристикой действия пропеллера является число оборотов винта в секунду; как механическая величина, оно представляет собой, очевидно, не что иное, как угловую скорость, а потому имеет размерность $[t^{-1}]$.

Если мы теперь сравним два пропеллера Ω и ω, подобные геометрически и материально, то отношение γ между числами оборотов соответствующих винтов в секунду выразится, в условиях механического подобия, через

$$\gamma = \tau^{-1}.$$

С другой стороны, материальное подобие налагает, как обыкновенно, на массы и объемы соотношение $\mu = \lambda^3$; вследствие этого гомологичные значения Q и q одной и той же механической величины с размерами n_1, n_2, n_3, вычисленные для Ω и ω, связаны равенством:

$$Q = \lambda^{n_1 + 3n_3} \gamma^{-n_2} q.$$

Таким образом, в частности, для движущих сил F и f ($n_1 = 1$, $n_2 = -2$, $n_3 = 1$) и для мощностей Π и π ($n_1 = 2$, $n_2 = -3$, $n_3 = 1$) имеют место соотношения:

$$F = \lambda^4 \gamma^2 f, \quad \Pi = \lambda^5 \gamma^3 \pi. \tag{16}$$

В первую очередь, мы эти формулы применим к одному и тому же пропеллеру ($\lambda = 1$) в двух различных режимах его действия; положим, что γ есть отношение чисел оборотов, производимых винтом в секунду в одном и другом режиме; мы легко найдем, что отношение

$$\frac{F^3}{\Pi^2} \tag{17}$$

не зависит от γ; иными словами, отношение между кубом продвигающей силы и квадратом мощности представляет собой постоянную, характерную для пропеллера (размерности $l^{-1}m$).

Теперь сравним функционирование двух каких-либо подобных пропеллеров. Исключая γ из соотношений (16), мы найдем:

$$F = \frac{t}{\pi^{\frac{2}{3}}} \lambda^{\frac{2}{3}} \Pi^{\frac{2}{3}};$$

обозначая поэтому через c отношение

$$\frac{f}{\pi^{\frac{2}{3}}}$$

[кубичный корень из характеристической постоянной (17) пропеллера ω], мы видим, что можно считать раз навсегда

$$F = c\lambda^{\frac{2}{3}}\Pi^{\frac{2}{3}}.$$

Эта формула приводит к интересному выводу; диаметр λ винта и мощность, с которой функционирует мотор, по крайней мере в известных границах, находятся в распоряжении экспериментатора и потому могут быть рассматриваемы как две независимые переменные (предполагается, конечно, что эксперименты производятся над пропеллерами одного и того же типа).

Мы не будем здесь останавливаться долее на этом соображении; прибавим только, что Ренар (Rénard, умер в 1905 г.) вывел из этих принципов очень изящные теоремы и замечательные практические следствия для так называемых геликоптеров (аппараты для поддержания определенной высоты, схематически состоящие из винта, вращающегося вокруг вертикальной оси). Ныне геликоптеры отошли на второй план по сравнению с аэропланами.

УПРАЖНЕНИЯ

к гл. VII—IX.

1. Компоненты позиционной силы выражаются уравнениями:

$$X = -ky, \quad Y = kx, \quad Z = 0,$$

где k обозначает какую угодно функцию места. Показать, что силовыми линиями служат окружности, центры которых расположены на оси z. Применить к примеру d) гл. VII, рубр. **29**.

2. В плоском поле компоненты силы принадлежат к типу

$$X = -k\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad Y = k\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

где k и ψ суть функции места. Показать, что силовые линии выражаются уравнением $\psi(x, y) = \text{const}$.

3. Сила, компоненты которой X, Y, Z выражаются по порядку функциями одного только x, одного только y, одного только z, принадлежит консервативному полю. Указать потенциал и применить к частному случаю, в котором при постоянных k и n

$$X = kx^n, \quad Y = ky^n, \quad Z = kz^n.$$

4. Пруд, занимающий площадь в 1 *км*² и средней глубиной в 20 *см*, осушается центробежными насосами, которые выбрасывают воду на высоту 5 *м* над уровнем пруда. Какую работу должны выполнить насосы, чтобы осушить весь пруд (для простоты следует допустить, что каждая частица воды выбрасывается на высоту в 5,1 *м*).

5. Тело весом в 50 *кг* скатывается на 8 *м* по линии наибольшего ската плоскости, наклоненной к горизонту на 30°; оно испытывает при этом сопротивление, направленное противоположно движению, в 20 *кг*. Вычислить работу, производимую при этом спуске обеими силами — весом и сопротивлением.