Глава 2

СВОБОДНЫЙ ПОЛЕТ В ПОЛЯХ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Силы, действующие на космический аппарат в полете

В предыдущей главе мы познакомились с используемыми в космонавтике двигательными системами. Теперь мы знаем, каким путем создается большая или малая тяга, приводящая космический аппарат в движение. Но, кроме силы тяги, на космический аппарат действуют еще и другие, природные, силы. Если мы хотим знать, как будет двигаться в мировом пространстве космический аппарат, или, что еще более важно, хотим определенным образом спроектировать космический полет, то должны учесть все действующие силы.

Важнейшей из природных сил, действующих на космический аппарат, является *сила всемирного тяготения*. Силы тяготения (или силы притяжения, или гравитационные силы, что одно и то же) между материальными телами (в частности, между небесными телами и космическим аппаратом) подчиняются открытому великим Ньютоном *закону всемирного тяготения*. Этот закон гласит: ***всякие две материальные точки притягиваются друг к другу с силами, прямо пропорциональными массам точек и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними***, или, в математической форме,

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{1}$$

Здесь F — величина обеих сил притяжения, m_1 и m_2 — массы притягивающихся материальных точек, r — расстояние между ними, f — коэффициент пропорциональности, называемый *постоянной тяготения (гравитационной постоянной)*. Если измерять массу в килограммах (кг), силу — в ньютонах (Н), а расстояние — в метрах (м), то, как показывают точные измерения, постоянная тяготения равна $6{,}672 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2).

Заметим, что в отличие от *инертной* массы, фигурирующей во втором законе Ньютона, здесь речь идет о *тяготеющей (гравитационной)* массе. Весь человеческий опыт (наука, техника, повседневная жизнь) подтверждает эквивалентность, пропорциональность этих двух видов масс. При соответствующем подборе гравитационной постоянной (как это выше и сделано) их можно считать попросту равными.

На различных этапах космического полета различное значение может иметь воздействие среды, в которой происходит движение. Очень важную роль играет атмосфера, особенно когда движение происходит в ее нижних, плотных слоях. Силы, действующие со стороны атмосферы на космический аппарат, называются *аэродинамическими*. В верхней, разреженной части атмосферы аэродинамические силы также должны приниматься во внимание, если исследуется длительное движение спутников. Однако чрезвычайно разреженная среда, заполняющая межпланетное пространство (в одном кубическом сантиметре там содержится всего лишь несколько сот атомов), практически не оказывает никакого влияния на движение космических объектов и ни в каких расчетах не учитывается.

В межпланетном пространстве важную роль может играть *давление солнечного излучения*, которое совершенно незаметно в повседневной жизни. Если масса космического аппарата невелика, а поверхность, на которую давят солнечные лучи, значительна, то действием этого фактора в течение длительного промежутка времени пренебрегать нельзя. Но в большинстве случаев можно пренебречь и солнечным давлением.

Остается, пожалуй, еще возможность столкновения в космосе с метеоритом. Но удары мелких метеоритов на траектории космического аппарата не сказываются (они, правда, могут изменить его ориентацию в пространстве), а встреча с крупным метеоритом маловероятна; к тому же она должна привести к катастрофическим последствиям, делающим бессмысленным изучение дальнейшего движения объекта. Впрочем, удары крупных метеоритов непредсказуемы, а значит, их и невозможно учесть.

Наконец, на космический аппарат в мировом пространстве действуют электрические и магнитные силы, но они в основном оказывают влияние не на движение аппарата по траектории, а на его вращение вокруг собственного центра масс (центра тяжести).

§ 2. Задача n тел и метод численного интегрирования

Как мы видели, пассивное движение космического аппарата в мировом пространстве происходит в основном под действием сил притяжений небесных тел — Земли, Луны, Солнца, планет. Положение этих тел непрерывно изменяется, причем их движение, как и движение космического аппарата, происходит под действием сил всемирного тяготения. Таким образом, мы сталкиваемся с необходимостью решения задачи о движении большого числа небесных тел (в том числе искусственного небесного тела — космического аппарата) под действием сил взаимного притяжения. Такая задача носит в небесной механике название *задачи n тел.* Говорят о «задаче пяти тел», «задаче трех тел» и т. д.

Решение этой задачи в общем случае встречает колоссальные математические трудности. Даже задача трех тел решена лишь для нескольких частных случаев.

К счастью, в космодинамике задача n тел имеет особый характер. В самом деле, космический аппарат, как разъяснялось в § 2 Введения, не оказывает практически никакого влияния на движение небесных тел. Такой случай в небесной механике известен как *ограниченная задача n тел.* При ее решении движение Солнца, Земли, Луны и планет является заданным, так как оно прекрасно изучено астрономами и предсказывается ими на много лет вперед (вспомним, с какой точностью, например, предсказываются солнечные и лунные затмения). Это намного облегчает решение задач космодинамики.

Расстояния от космического аппарата до Солнца, Земли, Луны и планеты в любой момент известны, массы всех этих тел также известны, а значит, известны по величине и направлению и ускорения, сообщаемые небесными телами космическому аппарату. В самом деле, если масса небесного тела M, а масса космического аппарата m, то гравитационное ускорение $a_г$, сообщаемое аппарату, равно силе притяжения $f\frac{Mm}{r^2}$, деленной на массу m, т. е.

$$a_г = \frac{fM}{r^2}. \qquad (2)$$

Таким образом, *гравитационное ускорение зависит только от расстояния между притягивающимися телами и от массы притягивающего тела, но не зависит от массы притягиваемого тела.* Из этого простого утверждения, как мы увидим, будут вытекать очень важные следствия.

Сейчас же для нас только важно, что в любой момент по формуле (2) мы можем вычислить гравитационное ускорение, сообщаемое космическому аппарату каждым небесным телом в отдельности, а значит, можем вычислить (путем векторного сложения) и суммарное ускорение. Зная величину и направление начальной скорости космического аппарата, можно, учитывая вычисленное ускорение, рассчитать положение и скорость аппарата через небольшой промежуток времени, например через секунду. Для нового момента нужно будет заново вычислить ускорение и затем рассчитать следующее положение аппарата и его скорость и т. д. Таким путем шаг за шагом можно проследить все движение космического аппарата. Единственная неточность этого метода заключается в том что приходится в течение каждого небольшого промежутка времени (шага расчета) считать ускорение при вычислениях неизменным, в то время как оно переменно. Но точность расчета можно как угодно повысить, уменьшив шаг. Конечно, при этом резко возрастает и количество вычислений.

Описанная процедура называется *численным интегрированием*.

Завершив численное интегрирование, мы скорее всего обнаружим, что космический аппарат прилетел совсем не в ту точку мирового пространства, куда нам было нужно. Поэтому придется перебрать много всевозможных начальных скоростей, прежде чем будет найдена подходящая траектория перелета. Столь сложная вычислительная задача может быть успешно решена путем использования быстродействующих электронных вычислительных машин. Но недостаток метода численного интегрирования в том, что он не дает рецепта, как выбирать, если не точно, то хотя бы приближенно, нужную начальную скорость. Ниже мы укажем выход из положения, а сейчас займемся специфическим явлением, характерным именно для свободного полета в полях тяготения одного или многих небесных тел.

§ 3. Невесомость

Представим себе космический корабль, свободно движущийся в мировом пространстве, после того, как в некоторый момент (после завершения разгона) ему было придано поступательное (т. е. не вращательное) движение. При поступательном движении все точки тела имеют одинаковые скорости. Представим себе, что корабль состоит из разрозненных деталей. Можно утверждать, что если на корабль действуют одни лишь силы притяжения небесных тел, то скорости различных деталей и в дальнейшем будут одинаковыми, так как хотя они и изменяются, но изменяются в одинаковой степени. Это произойдет потому, что гравитационные ускорения, как говорилось выше, не зависят от масс деталей, расстояния же деталей от центра небесного тела можно считать практически одинаковыми в силу того, что размеры корабля ничтожно малы по сравнению с этими расстояниями.

Отсюда следует, что и траектории отдельных деталей будут одинаковыми, т. е. детали не разойдутся в пространстве. Ясно поэтому, что давление между отдельными деталями будет отсутствовать (это можно доказать и строго математически, исходя из уравнений механики), т. е. будет отсутствовать характерный признак состояния *весомости*. Космонавт не будет давить на кресло, в котором он сидит, висячая лампа не будет натягивать шнур и т. п. *(безопорное состояние)*.

Мало того, предмет, помещенный внутри кабины (например, карандаш, выпущенный из пальцев космонавта), никуда не упадет, так как его скорость и ускорение будут теми же, что и скорость и ускорение всех других деталей корабля. Он не сможет ни догнать какую-нибудь стенку кабины, ни отстать от нее. Понятия пола и потолка исчезнут. Падения тел внутри корабля не будет происходить. *Притяжение Земли* (или другого небесного тела) *не будет вмешиваться в перемещения предметов относительно корабля.*

Но это значит, что будет отсутствовать столь привычное в нашей повседневной жизни проявление сил притяжения. Оно будет отсутствовать только потому, что космонавт движется, падает вместе с кораблем и карандашом, мы же на поверхности Земли этой возможности лишены.

Таким образом, невесомость на космическом корабле возникает, как это ни парадоксальным может показаться, именно потому, что в свободном полете гравитационные силы имеют полную свободу проявления, так как *отсутствуют какие-либо внешние поверхностные силы, действующие на корабль. Наличие же внешних поверхностных сил* (силы сопротивления среды, силы реакции опоры или подвеса) — *обязательное условие существования состояния весомости.*

Итак, *тело, свободно и поступательно движущееся под влиянием одних лишь сил тяготения, всегда находится в состоянии невесомости* [1]). Примеры: корабль в мировом пространстве; падающий лифт (при обрыве троса); человек, совершающий прыжок, между моментом отрыва от Земли и моментом приземления (сопротивлением воздуха при этом можно пренебречь).

Теперь, когда мы выяснили природу невесомости, уместно будет внести некоторые поправки. Мы все время имели в виду, что гравитационные ускорения отдельных деталей п о ч т и (но не в точности) одинаковы, так как расстояния отдельных деталей от притягивающего тела (например, Земли) п р и м е р н о одинаковы. Фактически все эти неточности ничтожны. Перепад гравитационных ускорений (*градиент гравитации*) в области пространства, занятой космическим кораблем, ничтожен. Например, на высоте 230 км над поверхностью Земли земное гравитационное ускорение уменьшается на $2{,}77 \cdot 10^{-6}$ м/с^2 на каждый метр высоты. Когда космический корабль длиной 5 м располагается вдоль линии, направленной на центр Земли, его нижний конец получает ускорение на 0,00015% больше, чем верхний. И все же эта ничтожная величина, если бы корабль и в самом деле представлял собой «груду разрозненных деталей», привела бы в конце концов к расползанию их в пространстве. Но так как корабль фактически представляет собой единое целое, то градиент гравитации лишь стремится развернуть и удержать его вдоль линии, направленной на центр Земли.

Градиент гравитации сильнее сказывается на телах, имеющих значительные размеры. В частности, градиент лунного и меньший по величине градиент солнечного притяжений вызывают приливы в земных океанах.

---

[1]) Значение требования поступательности движения будет выяснено в дальнейшем (см. § 3 гл. 7). Подробнее о рассматриваемых вопросах см. [1.35].

Таким образом, нарушения невесомости, вызванные наличием градиента гравитации (т. е., по существу, неоднородностью поля тяготения), приводят не к «частичной невесомости», а к совершенно особому состоянию. В состоянии свободного полета в поле тяготения тела́ несколько (весьма и весьма слабо) растянуты в радиальном направлении.

Из сказанного вытекает, что никакая измерительная аппаратура на борту космического аппарата не способна измерить интенсивность гравитации (т. е. гравитационное ускорение), на каком бы расстоянии от небесного тела аппарат ни находился. Но измерить разность гравитационных ускорений в точках космического аппарата, разделенных некоторым расстоянием (при достаточно больших размерах аппарата), в принципе возможно, хотя для этого и требуются чрезвычайно чувствительные приборы — *акселерометры*, о которых еще речь впереди (см. § 3 гл. 3). Поскольку эта разность различна в разных точках гравитационного поля, то, измерив ее, можно при заданном поле вычислить для навигационных целей расстояние до небесного тела.

§ 4. Центральное поле тяготения

Описанной в § 2 громоздкой процедуры подбора нужной космической траектории можно избежать, если задаться целью примерно наметить путь космического аппарата. Оказывается, что для сравнительно точных расчетов нет нужды учитывать действующие на космический аппарат силы притяжения всех небесных тел или даже сколько-нибудь значительного их числа.

Когда космический аппарат находится в мировом пространстве вдали от планет, достаточно учитывать притяжение одного лишь Солнца, потому что гравитационные ускорения, сообщаемые планетами (вследствие больших расстояний и относительной малости их масс), ничтожно малы по сравнению с ускорением, сообщаемым Солнцем.

Допустим теперь, что мы изучаем движение космического объекта вблизи Земли. Ускорение, сообщаемое этому объекту Солнцем, довольно заметно: оно примерно равно ускорению, сообщаемому Солнцем Земле (около 0,6 см/с^2); естественно было бы его учитывать, если нас интересует движение объекта относительно Солнца (учитывается же ускорение Земли в ее годовом движении вокруг Солнца!). Но если нас интересует движение космического объекта относительно Земли, то притяжение Солнца оказывается сравнительно малосущественным. Оно не будет вмешиваться в это движение аналогично тому, как притяжение Земли не вмешивается в относительное движение предметов на борту корабля-спутника. То же касается и притяжения Луны, не говоря уже о притяжениях планет.

Вот почему в космонавтике оказывается весьма удобным при примерных расчетах («в первом приближении») почти всегда рассматривать движение космического аппарата под действием одного притягивающего небесного тела, т. е. исследовать движение в рамках *ограниченной задачи двух тел*. При этом удается получить важные закономерности, которые совершенно ускользнули бы от нашего внимания, если бы мы решились изучать движение космического аппарата под влиянием всех действующих на него сил.

Будем считать небесное тело однородным материальным шаром или по крайней мере шаром, состоящим из вложенных друг в друга однородных сферических слоев (так примерно обстоит дело для Земли и планет). Математически доказывается, что такое небесное тело притягивает так, будто бы вся его масса сосредоточена в его центре [1]). Такое поле тяготения называется *центральным* или *сферическим*.

Будем изучать движение в центральном поле тяготения космического аппарата, получившего в начальный момент, когда он находился на расстоянии r_0 от небесного тела [2]), скорость v_0 (r_0 и v_0 — *начальные условия*). Для дальнейшего воспользуемся законом сохранения механической энергии, который справедлив для рассматриваемого случая, так как поле тяготения является потенциальным; наличием же негравитационных сил мы пренебрегаем. Кинетическая энергия космического аппарата равна $mv^2/2$, где m — масса аппарата, а v — его скорость. Потенциальная энергия в центральном поле тяготения выражается формулой (выводить ее мы не будем)

$$\Pi = -\frac{fMm}{r},$$

где M — масса притягивающего небесного тела, а r — расстояние от него космического аппарата; потенциальная энергия, будучи отрицательной, увеличивается с удалением от Земли, обращаясь в нуль на бесконечности. Тогда закон сохранения полной механической энергии запишется в следующем виде:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{fMm}{r_0} = \frac{mv^2}{2} - \frac{fMm}{r}.$$

Здесь в левой части равенства стоит сумма кинетической и потенциальной энергий в начальный момент, а в правой — в любой другой момент времени. Сократив на m и преобразовав, мы напишем *интеграл энергии* — важную формулу, выражающую скорость v косми-

---

[1]) Это неявно предполагалось, когда мы говорили о задаче n тел. Под расстоянием до небесного тела подразумевалось и будет дальше подразумеваться расстояние до его центра.

[2]) В дальнейшем для краткости мы будем вместо «небесное тело» говорить «Земля».

ческого аппарата на любом расстоянии r от центра притяжения:

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2fM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right), \tag{3}$$

или

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2K}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right), \tag{3a}$$

где $K=fM$ — величина, характеризующая поле тяготения конкретного небесного тела (*гравитационный параметр*). Для Земли $K=3{,}986005\cdot10^5$ км³/с², для Солнца $K=1{,}32712438\cdot10^{11}$ км³/с².

§ 5. Траектории в центральном поле тяготения

Путь, описываемый космическим аппаратом (точнее, его центром масс) в пространстве, называется *траекторией* или *орбитой*. Все многообразные формы траекторий можно разделить на четыре группы.

1) Прямолинейные траектории. Если начальная скорость равна нулю, то тело начинает падение в направлении к центру по прямой линии. Движение по прямой линии будет и в том случае, если начальная скорость направлена точно к центру притяжения или в прямо противоположном направлении, т. е. если скорость радиальна [1]). Во всех остальных случаях прямолинейное движение невозможно (исключение представляет гипотетический случай движения с бесконечно большой скоростью).

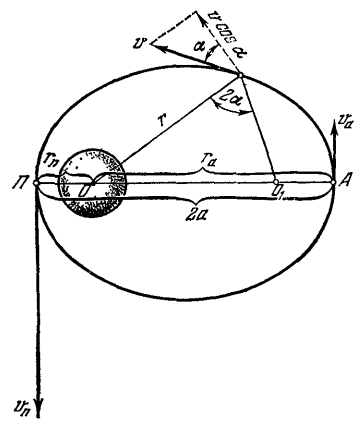

Рис. 15. Эллиптическая орбита.

2) Эллиптические траектории. Если начальная скорость направлена не радиально, то траектория уже не может быть прямолинейной, так как искривляется притяжением Земли. При этом она лежит целиком в плоскости, проведенной через начальное направление скорости и центр Земли.

Если начальная скорость не превышает некоторой величины, то траектория представляет собой *эллипс*, причем центр притяжения находится в одном из его фокусов (рис. 15). Если эллиптическая орбита не пересекает поверхности притягивающего небесного тела, космический аппарат является его *искусственным спутником*.

---

[1]) Радиальное направление совпадает с вертикальным, если пренебречь сплюснутостью Земли и считать ее поле тяготения центральным.

Расстояние между вершинами эллипса называется *большой осью* [1]). Половина большой оси («большая полуось») принимается за *среднее расстояние спутника* от небесного тела и обозначается буквой a. Скорость v и расстояние r спутника от центра притяжения в любой момент времени (в частности, в начальный) связаны со средним расстоянием a зависимостью (приводим ее без доказательства)

$$v^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{4}$$

Период обращения P искусственного спутника вычисляется по формуле

$$P = \frac{2\pi\sqrt{a^3}}{\sqrt{K}} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} a^{3/2} \tag{5}$$

или

$$P = C\sqrt{a^3}, \tag{5a}$$

где $C = 2\pi/\sqrt{K}$ — определенное число для каждого небесного тела.

Отношение расстояния между фокусами к длине большой оси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается буквой e.

Из формулы (4) видно, что чем больше начальная скорость, тем больше большая ось орбиты и тем больше, в соответствии с формулой (5), период обращения. При этом для одного и того же r_0 при направленных в разные стороны скоростях одинаковой величины v_0 получаются орбиты с одинаковыми периодами обращения и большими осями.

Ближайшая и наиболее удаленная от центра притяжения точки эллипса ($П$ и $А$ на рис. 15) называются соответственно *перицентром* и *апоцентром*, а прямая линия, их соединяющая, *линией апсид*.

Для конкретных притягивающих центров эти точки носят специальные названия. Так, если притягивающим телом является Земля, то перицентр и апоцентр называются соответственно *перигеем* и *апогеем*; если Солнце — *перигелием* и *афелием*; если Луна — *периселением* и *апоселением*. Скорость в перигее ($v_п$) максимальна, в апогее ($v_а$) — минимальна, причем эти две скорости связаны соотношением

$$v_п r_п = v_а r_а, \tag{6}$$

где $r_п$ и $r_а$ — расстояния в перигее и апогее. Скорости в перигее и апогее перпендикулярны к направлениям на центр Земли. Для

---

[1]) В соответствии с определением эллипса сумма расстояний любой его точки от фокусов равна большой оси эллипса. Этим свойством эллипса удобно пользоваться при его вычерчивании.

всех остальных точек эллипса верно соотношение

$$vr\cos\alpha = v_{\text{п}}r_{\text{п}} = v_{\text{а}}r_{\text{а}} \tag{7}$$

или

$$vr\cos\alpha = v_0 r_0 \cos\alpha_0 \tag{7а}$$

(нули в индексах указывают начальные величины). Здесь в левых частях стоят произведения расстояний r на трансверсальные составляющие скорости $v\cos\alpha$, т. е. на проекции скорости на перпендикуляр к радиальному направлению [1]) (рис. 15).

Если умножить левые и правые части равенства (6), (7) или (7а) на массу m космического аппарата, то легко убедиться, что эти равенства выражают *закон сохранения момента количества движения* космического аппарата. Моментом количества движения относительно какой-либо точки (в данном случае относительно центра притяжения) в механике называется произведение количества движения mv на величину перпендикуляра, опущенного из точки на линию, указывающую направление скорости (в данном случае величина этого перпендикуляра равна $r\cos\alpha$).

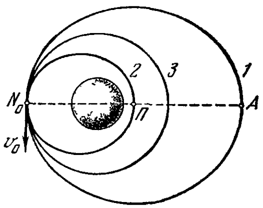

Рис. 16. Эллиптические орбиты при трансверсальных начальных скоростях: *1* — внешняя, *2* — внутренняя, *3* — круговая.

Рассмотрим практически важные случаи, когда начальные скорости трансверсальны (рис. 16). При этом, очевидно, начальная точка N_0 должна быть перигеем или апогеем. Первое будет в том случае, когда начальная скорость достаточно велика (больше некоторой величины), чтобы спутник мог начать удаляться от Земли на пути к апогею (орбита *1* на рис. 16). Второе будет в случае, когда скорость меньше той же величины (орбита *2*); при этом, очевидно, возможно падение на Землю (если перигей окажется под земной поверхностью или ниже плотных слоев атмосферы). «Пограничным» является случай, когда начальная скорость такова, что спутник не поднимается и не опускается, т. е. описывает *круговую орбиту 3* (частный случай эллиптической) с постоянной круговой скоростью $v_{\text{кр}}$.

Радиус круговой орбиты r равен большой полуоси a. Из формулы (4)

$$v_{\text{кр}}^2 = \frac{K}{r}, \text{ или } v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{K}{r}}. \tag{8}$$

Из последней формулы, зная K для Земли, легко найти круговую скорость для любого расстояния r от ее центра или для

[1]) Трансверсальное направление совпадает с горизонтальным, если пренебречь сплюснутостью Земли.

любой высоты h над земной поверхностью ($h=r-r^*$, где $r^*=6371$ км — средний радиус Земли).

В частности, у поверхности Земли ($r=r^*$, $h=0$) круговая скорость равна 7,910 км/с. Эту величину называют *первой космической скоростью*.

Из-за наличия земной атмосферы круговая орбита вблизи земной поверхности фактически неосуществима. Поэтому более верно было бы называть первой космической скоростью круговую скорость на высоте, где спутник способен совершить хотя бы один оборот, т. е. на уровне примерно 160 км. С другой стороны, орбита на высоте 200 км зачастую принимается как некая стандартная при теоретических подсчетах [1.4, 1.36, 1.37]. При $h=200$ км круговая скорость равна 7,788 км/с и некоторыми авторами принимается за «первую космическую» [1.4] [1]).

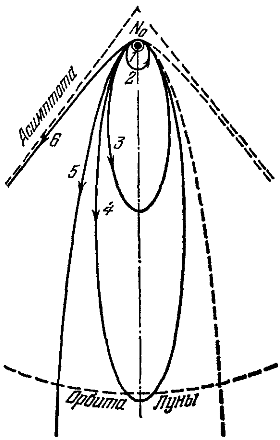

Рис. 17. Орбиты при различных трансверсальных начальных скоростях v_0: *1* — круговая ($v_0=7{,}910$ км/с); *2, 3, 4* — эллиптические при $v_0=10{,}0$, 11,0, 11,1 км/с; *5* — параболическая (11,186 км/с); *6* — гиперболическая (12,0 км/с).

Если записать формулу (4) для начального момента времени, а именно:

$$v_0^2=K\left(\frac{2}{r_0}-\frac{1}{a}\right), \tag{9}$$

то нетрудно заметить, что с увеличением начальной скорости v_0 большая полуось a также увеличивается. На рис. 17 показаны эллиптические орбиты при различных величинах трансверсальной начальной скорости, сообщаемой у поверхности Земли.

Из формулы (9) видно, что по мере того, как v_0^2 приближается к постоянной величине $2K/r_0$, большая полуось a стремится к бесконечности.

3) Параболические траектории. Эллиптическая орбита, у которой «апогей находится в бесконечности», не является уже, конечно, эллипсом. Двигаясь по такой траектории, космический аппарат бесконечно далеко уходит от центра притяжения, описывая разомкнутую линию — *параболу* (рис. 17). По мере удаления аппарата его скорость приближается к нулю.

Приняв в формуле (3) скорость в бесконечности равной нулю ($r=\infty$, $v=0$), мы найдем такую величину начальной скорости v_0,

[1]) В литературе иногда не делают различия между круговой (на любой высоте) и первой космической скоростями, что приводит к недоразумениям. Круговую скорость у поверхности любого небесного тела некоторые авторы называют нулевой круговой скоростью [1.37]. Таким образом, первая космическая скорость есть нулевая круговая скорость для Земли.

которая обеспечивает возможность рассматриваемого движения. Получим

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0},$$

или

$$v_0 = v_{осв} = \sqrt{\frac{2K}{r_0}}. \tag{10}$$

Вычисленная по формуле (10) величина называется *параболической скоростью* или *скоростью освобождения*. Получив такую скорость, космический аппарат движется по параболе и уже не возвращается к центру притяжения, как бы освобождаясь от оков тяготения. Когда скорость (10) сообщается в вертикальном направлении, траекторией является прямая линия, но и в этом случае скорость называют параболической. Между скоростью освобождения и круговой скоростью в любой точке существует простая зависимость

$$v_{осв} = v_{кр}\sqrt{2}, \text{ или } v_{осв} \approx 1{,}414 v_{кр}. \tag{11}$$

Значение скорости освобождения (параболической скорости) у поверхности Земли ($r = r^* = 6371$ км) носит название *второй космической скорости* и составляет 11,186 км/с. На высоте $h = 200$ км $v_{осв} = 11{,}015$ км/с.

Воспользовавшись формулой (10), мы можем теперь записать основную формулу (3) для скорости в центральном поле тяготения так:

$$v^2 = v_0^2 - v_{осв\,0}^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \tag{12}$$

4) Гиперболические траектории. Если космический аппарат получит скорость v_0, превышающую параболическую, то он, разумеется, также «достигнет бесконечности», но при этом будет двигаться уже по линии иного рода — *гиперболе*. При этом скорость аппарата в бесконечности (v_∞) уже не будет равна нулю. Физически это означает, что по мере удаления аппарата его скорость будет непрерывно падать, но не сможет стать меньше величины v_∞, которую можно найти, приняв в формуле (12) $r = \infty$. Получим

$$v_\infty^2 = v_0^2 - v_{осв\,0}^2. \tag{13}$$

Величину v_∞ называют по-разному: *остаточная скорость*, *гиперболический избыток скорости* и т. п.

Гиперболическая траектория вдали от центра притяжения становится почти неотличимой от двух прямых линий, называемых *асимптотами гиперболы*. На большом расстоянии от центра притяжения гиперболическую траекторию приближенно можно считать прямолинейной.

Для гиперболических и параболических орбит справедливы, как и для эллиптических орбит, формулы (7) и (7а).

В заключение заметим, что пассивное движение в центральном поле тяготения часто называют *кеплеровым движением*, а эллиптические, параболические и гиперболические траектории объединяются общим названием *кеплеровых орбит* по имени немецкого ученого Иоганна Кеплера (1571—1630), впервые установившего эллиптическую форму орбит планет, указавшего законы их движения (фактически — формулы (5) и (7)) и тем самым положившего начало небесной механике как науке.

Всегда важно помнить, что любая кеплерова орбита расположена в плоскости, проходящей через центр притяжения. Положение этой плоскости в пространстве не изменяется.

Полная механическая энергия для всех точек некоторой кеплеровой орбиты есть величина постоянная. Для параболической орбиты она всюду равна нулю, так как в этом случае в бесконечности равны нулю и кинетическая энергия, и потенциальная. Для любой эллиптической орбиты она отрицательна (так как эллиптическая скорость меньше параболической), а для любой гиперболической — положительна. В последнем случае величина v_∞^2 представляет собой *удвоенную полную механическую энергию, приходящуюся на единицу массы* космического аппарата (для краткости ее часто называют просто «энергией запуска» или «удельной энергией», забывая о коэффициенте 2).

§ 6. Неограниченная задача двух тел

До сих пор мы рассматривали ограниченную задачу двух тел, предполагая, что масса космического объекта настолько мала, что притяжение им центрального тела никак не сказывается на движении центрального тела. В случае, однако, естественных небесных тел дело обстоит не так. Центральное тело под действием другого тела совершает некоторое движение, которое, естественно, отражается на движении второго тела, которое, в свою очередь, действует на центральное тело, и т. д. Оказывается, что в конечном счете *оба тела совершают кеплеровы движения относительно общего центра масс (барицентра) с равными периодами обращения*, определяемыми по формуле (5), справедливой для ограниченной задачи двух тел, но величина K в этой формуле теперь имеет значение $K=f(M+m)$, а под величиной a следует понимать *сумму полуосей обеих орбит.*

В новой интерпретации формула (5) получает простой физический смысл.

Изобразим на чертеже (рис. 18, *а*) эллиптические орбиты двух тел с массами M и m. Для конкретности примем $M=2m$, что может соответствовать, скажем, случаю двойной звезды. Оба тела описывают вокруг своего барицентра C, как вокруг фокуса, подобные эллипсы (с равными эксцентриситетами), оставаясь все время на прямой, проходящей через барицентр, по разные его стороны. Масса m описывает эллипс вдвое большего размера, чем масса M.

Рассмотрим теперь то же явление с точки зрения наблюдателя, находящегося на большой звезде M. Для него звезда M

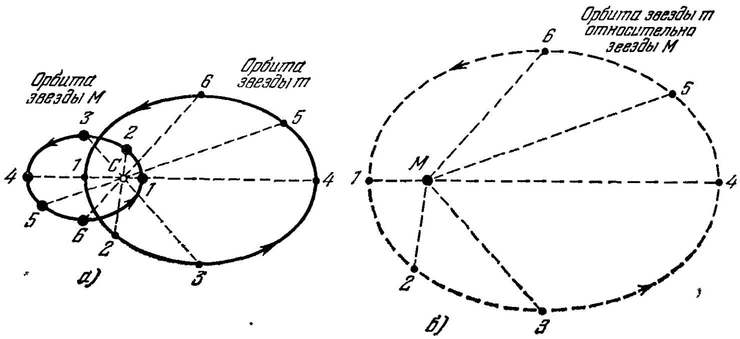

Рис. 18. Траектории движения звезд m и M при соотношении масс $M=2m$: *а*) барицентриче ские: *б*) относительно звезды M. Одновременные положения звезд обозначены одинаковыми цифрами.

неподвижна. Взяв с рис. 18, *а* для каждого момента времени расстояния звезды m от M и отложив их в соответствующем направ. лении, мы получим *орбиту звезды m относительно M* (рис. 18, *б*)- Легко убедиться, что большая ось этой орбиты равна сумме больших осей орбит обеих звезд в их барицентрическом движении (рис 18, *а*).

Тело m движется относительно тела M так, как двигалось бы по той же орбите тело с пренебрежимо малой массой, если бы центральное притягивающее тело имело массу $M+m$. Сказанное касается и периода обращения по относительной орбите, и соответствующей орбитальной скорости. Для обеих величин сохраняют свою силу формулы (4) и (5), в которых $K=f(M+m)$.

В небесной механике в большинстве случаев имеет смысл рассматривать не абсолютное движение («движение в барицентрической системе координат»), а относительное движение. Так поступают при изучении движения естественных спутников планет; в частности, обычно рассматривают относительное, геоцентрическое, движение Луны вокруг Земли и реже — ее барицентрическое движение. Выражаясь строго математически, *геоцентрическое движение* есть движение в системе координат с началом в центре Земли и неизменно направленными осями («направленными на неподвижные звезды»), *барицентрическое движение* — движение в также невращающейся системе координат с началом в барицентре (для случая Земли и Луны $M=81{,}30\,m$, барицентр располагается внутри Земли на среднем расстоянии 4671 км от ее центра при среднем расстоянии от Земли до Луны 384 400 км).

§ 7. Сфера действия и приближенный метод расчета траекторий

Кеплерово движение космического аппарата в точности никогда не может осуществляться. Притягивающее небесное тело не может обладать точной сферической симметрией, и, следовательно, его поле тяготения не является, строго говоря, центральным. Необходимо учитывать притяжение других небесных тел и влияние иных факторов. Но кеплерово движение настолько просто и так хорошо изучено, что бывает удобно даже при отыскании точных траекторий не отказываться полностью от рассмотрения кеплеровой орбиты, а по возможности уточнить ее. Кеплерова орбита рассматривается как некая опорная орбита, но учитываются *возмущения*, т. е. искажения, которые орбита претерпевает от притяжения того или иного тела, светового давления, сплюснутости Земли у полюсов и т. д. Такое уточненное движение называют *возмущенным движением*, а соответствующее кеплерово движение — *невозмущенным*.

Возмущения орбиты могут вызываться не только природными силами. Их источником может быть также двигатель малой тяги (например, электроракетный или солнечно-парусный), помещенный на борту космического аппарата или спутника Земли.

Остановимся несколько подробнее на том, как вычисляются гравитационные возмущения со стороны небесных тел. Рассмотрим, например, возмущение Солнцем геоцентрического движения космического аппарата. Его учет совершенно аналогичен учету градиента земной гравитации при рассмотрении движений относительно спутника Земли (§ 3 настоящей главы).

Пусть космический аппарат находится на линии Земля — Солнце на расстоянии 500 000 км от Земли и 149 100 000 км от Солнца (среднее расстояние Земли от Солнца составляет 149 600 000 км). По формуле (2) в § 2 гл. 2 и значениям величины $K=fM$, приведенным в § 4 гл. 2, мы можем вычислить гравитационные ускорения космического аппарата от Земли и от Солнца. Первое из них равно $1{,}594\cdot10^{-6}$ км/с², второе — $5{,}970\cdot10^{-6}$ км/с². Ускорение от Солнца оказалось больше, чем ускорение от Земли. Это, однако, не значит, что аппарат уйдет от Земли и будет захвачен Солнцем. В самом деле, ведь нас интересует геоцентрическое движение аппарата, а вмешательство Солнца в это движение выражается возмущением, которое может быть вычислено как разность между тем ускорением, которое Солнце сообщает аппарату, и тем, которое оно сообщает Земле. Первое мы уже вычислили, а второе равно

$5{,}930 \cdot 10^{-6}$ км/с². Значит, возмущающее ускорение равно всего лишь $(5{,}970-5{,}930) \cdot 10^{-6} = 0{,}040 \cdot 10^{-6}$ км/с², или 2,5% ускорения, сообщаемого Землей. Как видим, вмешательство Солнца в «земные дела», в геоцентрическое движение совсем невелико (рис. 19).

Допустим теперь, что нас интересует движение аппарата относительно Солнца — *гелиоцентрическое движение*. Теперь главным, «центральным» гравитационным ускорением является ускорение от Солнца $5{,}970 \cdot 10^{-6}$ км/с², а возмущающим — разность между ускорением, сообщаемым Землей аппарату, и ускорением, сообщаемым Землей Солнцу. Первое равно $1{,}594 \cdot 10^{-6}$ км/с², а второе составляет ничтожную величину $0{,}00001781 \cdot 10^{-6}$ км/с², т. е.

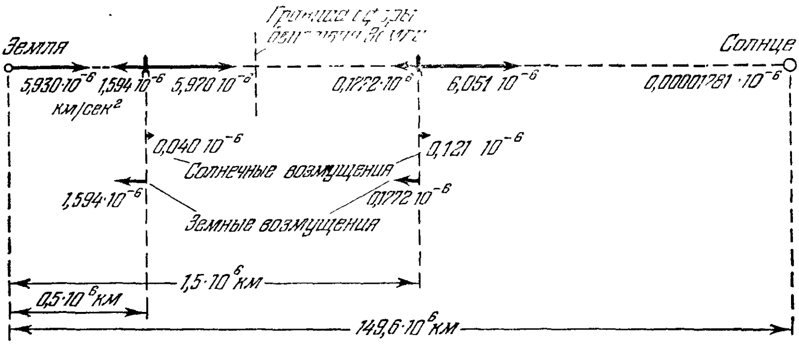

Рис. 19. Расчет возмущений от Земли и от Солнца.

Земля почти не действует на Солнце, и гелиоцентрическое движение аппарата можно попросту считать абсолютным, а не относительным (этого и следовало ожидать ввиду колоссальности массы Солнца). Итак, возмущающее ускорение равно все той же величине $1{,}594 \cdot 10^{-6}$ км/с², т. е. составляет 26,7% главного, «центрального» ускорения — от Солнца. Вмешательство Земли в «солнечные дела» оказалось довольно существенным!

Теперь ясно, что гораздо больше оснований рассматривать движение космического аппарата, находящегося в выбранной нами точке пространства, как кеплерово движение относительно Земли, чем как кеплерово движение относительно Солнца. В первом случае мы не учтем возмущение, составляющее 2,5%, а во втором — 26,7% от «центрального» ускорения.

Если мы теперь расположим космический аппарат в точке на линии Земля — Солнце на расстояниях 1 500 000 км от Земли и 148 100 000 км от Солнца, то обнаружим обратную картину (предоставляем читателю самому проделать необходимые расчеты). В этом случае возмущение Солнцем геоцентрического движения составляет 68,3% ускорения, сообщаемого Землей, а возмущение Землей гелиоцентрического движения не составляет и 3% ускорения, сообщаемого Солнцем. Очевидно, разумнее считать теперь аппарат находящимся во власти Солнца и рассматривать его движение как кеплерово с фокусом в центре Солнца.

Аналогичные рассуждения и расчеты могут быть проделаны для всех точек пространства (при этом для точек, не лежащих на прямой Земля — Солнце, придется брать векторную разность ускорений). Каждая точка при этом будет отнесена или к некоторой области, окружающей Землю, где выгоднее рассматривать геоцентрическое движение, или ко всему остальному пространству, где кеплеровы траектории будут гораздо более точны, если за центр притяжения принять Солнце.

Математический анализ показывает, что граница указанной области очень близка к сфере (несколько приплюснутой со стороны Солнца и «припухлой» с противоположной стороны). Принято для простоты расчетов считать эту область в точности сферой и называть *сферой действия Земли.*

Радиус сферы действия планеты может быть вычислен по формуле, пригодной для любых двух тел и определяющей радиус *сферы действия тела с малой массой* m (например, планеты) *относительно тела с большой массой* M (например, Солнца):

$$\rho = a\left(\frac{m}{M}\right)^{2/5}, \tag{14}$$

где a — расстояние между телами [1.38, 1.39].

Радиус сферы действия Земли относительно Солнца равен 925 000 км, сферы действия Луны относительно Земли — 66 000 км, Солнца относительно Галактики (вся масса которой предполагается сосредоточенной в ее ядре) — 60 000 а. е.[1]$\approx 9\cdot 10^{12}$ км [1.40], т. е. около 1 светового года (1 св. год = 63 000 а. е.).

При переходе космического аппарата через границу сферы действия приходится переходить от одного центрального поля тяготения к другому. В каждом поле тяготения движение рассматривается, естественно, как кеплерово, т. е. как происходящее по какому-либо из конических сечений — эллипсу, параболе или гиперболе, причем на границе сферы действия траектории по определенным правилам сопрягаются, «склеиваются» (как это делается, мы увидим в третьей и четвертой частях книги). В этом заключается приближенный метод расчета космических траекторий, который иногда называют *методом сопряженных конических сечений.*

Единственный смысл понятия сферы действия заключается именно в границе разделения двух кеплеровых траекторий. В частности, сфера действия планеты вовсе не совпадает с той областью

---

[1]) 1 а. е. (астрономическая единица) — среднее расстояние Земли от Солнца ($149{,}6\cdot 10^6$ км).

пространства, в которой планета способна вечно удерживать свой спутник [1.38]. Эта область называется *сферой Хилла* для планеты относительно Солнца.

Внутри сферы Хилла тело может находиться неограниченно долго несмотря на возмущения со стороны Солнца, если только в начальный момент оно имело эллиптическую планетоцентрическую орбиту. Эта сфера больше сферы действия.

Сфера Хилла для Земли относительно Солнца имеет радиус 1,5 млн. км.

Радиус сферы Хилла для Солнца относительно Галактики составляет 230 000 а. е. = $34{,}5 \cdot 10^{12}$ км. Таков этот радиус, если обращение по орбите вокруг Солнца происходит в ту же сторону, что и движение Солнца вокруг центра Галактики (движение естественных планет Солнечной системы именно таково). В противном случае он равен 100 000 а. е. = $15 \cdot 10^{12}$ км [1.41].

В отличие от сферы действия и от сферы Хилла, *сфера притяжения* планеты относительно Солнца, определяемая как область, на границе которой попросту равны гравитационные ускорения от планеты и от Солнца, не играет никакой роли в космодинамике.

Луна находится глубоко внутри сферы действия Земли. Поэтому мы предпочитаем рассматривать геоцентрическое движение Луны и считать ее спутником Земли. Мы отказываемся считать Луну самостоятельной планетой ввиду слишком больших гравитационных возмущений ее гелиоцентрического движения со стороны Земли. Любопытно, что орбита Луны лежит вне сферы притяжения Земли (имеющей радиус примерно 260 000 км), т. е. Луна сильнее притягивается Солнцем, чем Землей.

При использовании приближенного метода расчета космических траекторий основные погрешности накапливаются при расчете движения в районе границы сферы действия. Поэтому некоторые авторы считают, что для большинства случаев расчета более высокие точности дают области разграничения между центральными полями тяготения, определяемые иначе, чем это сделано выше. Предлагалось, например, считать соответствующую область вокруг Земли имеющей радиус 3—4 млн. км [1.42]. На основании энергетических соображений для подобной *сферы влияния* выводился радиус, равный [1.43]

$$\rho = 1{,}15a\left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}. \tag{14a}$$

Сфера действия и сфера влияния могут быть названы *динамическими гравитационными сферами*, а сфера притяжения — *статической гравитационной сферой*. Использование последней в космодинамике имело бы смысл только в том случае, если бы можно было представить себе космический полет между двумя неподвижными небесными телами.

Заметим в заключение, что метод сопряженных конических сечений, связанный с теми или иными динамическими гравитационными сферами, не является единственным приближенным методом расчета космических траекторий. Продолжаются поиски других приближенных методов, более точных, чем описанный, и в то же время требующих меньшего числа вычислений, чем метод численного интегрирования. Увы, приходится экономить время работы даже самых быстродействующих электронных вычислительных машин!