

## § 4. Движение тяжелого твердого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость

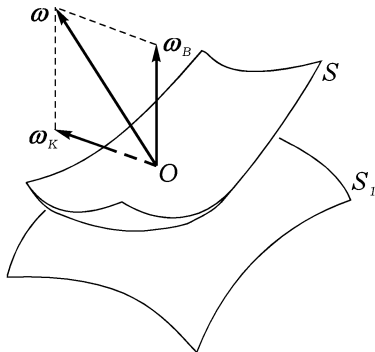


Рис. 115

**110. Общие сведения. Понятие о трении.** Пусть жесткая поверхность  $S$  движется, касаясь неподвижной поверхности  $S_1$  (рис. 115). Считаем, что поверхности  $S$  и  $S_1$  выпуклы, а их касание происходит в одной точке  $O$ . При движении поверхности  $S$  точка  $O$ , вообще говоря, перемещается как по  $S$ , так и по  $S_1$ . Предполагается, что в каждый момент времени через точку  $O$  можно провести единственную касательную плоскость к  $S$  и  $S_1$ . Очевидно, что скорость  $v_O$  точки  $O$ , которой поверхность  $S$

касается  $S_1$ , лежит в общей касательной плоскости, проходящей через  $O$ . Если  $v_O = 0$ , то говорят о движении без скольжения. Если же  $v_O \neq 0$ , то говорят о движении со скольжением, а  $v_O$  называют *скоростью скольжения*.

Примем точку  $O$  за полюс. Тогда движение поверхности  $S$  в каждый момент времени можно представить как совокупность поступательного движения со скоростью  $v_O$  и вращения с угловой скоростью  $\omega$  вокруг точки  $O$ . Разложим вектор  $\omega$  на две составляющие  $\omega_B$  и  $\omega_K$ , где вектор  $\omega_B$  перпендикулярен общей касательной плоскости, а  $\omega_K$  лежит в ней;  $\omega_B$  называют *угловой скоростью верчения* поверхности  $S$ , а  $\omega_K$  — *угловой скоростью качения*.

Если  $v_O = 0$ , то говорят, что поверхность  $S$  катится по поверхности  $S_1$ ; если при этом  $\omega_B = 0$ ,  $\omega_K \neq 0$ , то имеет место чистое качение  $S$  по  $S_1$ , а если  $\omega_K = 0$ ,  $\omega_B \neq 0$ , то поверхность  $S$  совершает верчение. Когда  $v_O \neq 0$ , а  $\omega_B = 0$ ,  $\omega_K = 0$ , то говорят, что  $S$  скользит по  $S_1$ . В общем случае, когда  $v_O \neq 0$ ,  $\omega_B \neq 0$ ,  $\omega_K \neq 0$ , поверхность  $S$  скользит, вертится и катится по  $S_1$ .

Действие  $S_1$  на  $S$  проявляется в следующем. 1) На поверхность  $S$  действует сила  $N$ , перпендикулярная общей касательной плоскости и направленная от  $S_1$  к  $S$ ; эта сила называется *нормальной реакцией*; для реальных движений  $N \geq 0$ . 2) На  $S$  действует сила трения  $F$ , лежащая в общей касательной плоскости. Согласно законам трения Кулона, величина  $F$  не превосходит своего максимально возможного значения, равного  $kN$ , где  $k$  — коэффициент трения. При этом если  $v_O = 0$ , то  $F < kN$ . Величину  $F$  в этом случае называют *силой трения по-*

коя. При  $v_0 \neq 0$  имеет место равенство  $F = kN$ , а  $\mathbf{F}$  называют силой трения скольжения<sup>1</sup>.

Иногда приемлема такая идеализация, что поверхности можно считать абсолютно гладкими. Это означает, что величина  $k$  настолько мала, что величиной силы трения в рассматриваемой задаче можно пренебречь. Если поверхность  $S_1$  абсолютно гладкая, то ее воздействие на  $S$  сводится к нормальной реакции  $N$ .

В действительности тела соприкасаются не в одной точке, а по очень малой площадке. Тогда воздействие  $S$  на  $S_1$  уже нельзя считать приводящимся к одной силе (являющейся геометрической суммой нормальной реакции и силы трения). Согласно теореме Пуансо (п. 71), совокупность сил, действующих на  $S$  в каждой точке площадки касания, в общем случае будет приводиться к силе и паре. Упомянутая сила снова может быть разложена на сумму нормальной реакции и силы трения, и пару удобно представить также в виде совокупности двух пар. Одна из них имеет момент, коллинеарный  $\omega_B$ , а другая — коллинеарный  $\omega_K$ . Первая пара является парой трения верчения, а вторая — парой трения качения. Трение верчения и трение качения обычно малы по сравнению с трением скольжения, и в прикладных задачах часто учитывается только трение скольжения.

**111. Волчок на абсолютно гладкой плоскости.** Пусть эллипсоид инерции твердого тела для его центра масс представляет собой эллипсоид вращения. Задача о движении волчка по плоскости состоит в исследовании движения этого тела в поле тяжести в предположении, что одна из точек тела, лежащая на оси динамической симметрии, движется по горизонтальной плоскости. Будем считать, что волчок имеет настолько острый конец, что его можно принять за острие, оканчивающееся точкой  $D$ . При движении волчка его точка  $D$  все время остается на неподвижной горизонтальной плоскости (рис. 116).

Будем считать, что плоскость является абсолютно гладкой. Тогда ее воздействие на волчок сводится к реакции  $N$ , имеющей вертикальное направление. Так как активная сила — сила тяжести — также направлена по вертикали, то на основании теоремы о движении центра инерции (п. 86) получаем, что проекция центра масс  $G$  на горизонтальную плоскость движется равномерно и прямолинейно. Без ограничения общности будем считать ее неподвижной; тогда центр масс движется по заданной вертикали.

Выберем неподвижную систему  $OXYZ$  так, чтобы ось  $OZ$  была вертикальной и проходила через центр масс волчка, а плоскость  $OXY$

<sup>1</sup>Следует иметь в виду, что трение представляет собой весьма сложное явление, поэтому законы Кулона имеют только приближенный характер.

совпадала с горизонтальной плоскостью, на которую при движении опирается волчок своей точкой  $D$  (рис. 116).

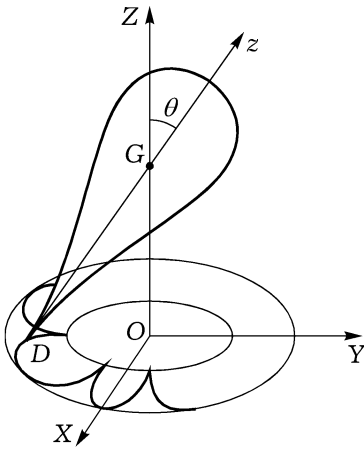


Рис. 116

Ориентация волчка относительно неподвижной системы координат задается углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

Пусть  $m$  — масса волчка,  $l$  — расстояние от центра масс  $G$  до точки  $D$ , которой волчок касается плоскости,  $C$  — момент инерции волчка относительно оси динамической симметрии  $Gz$ ,  $A$  и  $B$  ( $A = B$ ) — моменты инерции волчка относительно двух любых жестко связанных с волчком взаимно перпендикулярных и перпендикулярных  $Gz$  осей  $Gx$  и  $Gy$ . Для расстояния  $h$  центра масс волчка от опорной плоскости имеем выражение:  $h = l \cos \theta$ .

Так как  $A = B$  и внешние силы (реакция плоскости и сила тяжести) не создают момента относительно оси  $Gz$ , то из третьего уравнения системы динамических уравнений Эйлера (формулы (4) п. 97) следует, что проекция  $r$  угловой скорости  $\omega$  волчка на ось его динамической симметрии является постоянной, т. е. имеет место первый интеграл

$$r = r_0 = \text{const.} \quad (9)$$

Пусть, как обычно,  $p$  и  $q$  — проекции  $\omega$  на оси  $Gx$  и  $Gy$ . Так как внешние силы направлены вертикально и, следовательно, не создают момента относительно вертикальной оси  $OZ$ , то из теоремы об изменении кинетического момента (п. 87) вытекает постоянство проекции кинетического момента волчка относительно центра масс на вертикаль:

$$Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const.},$$

где величины  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  вычисляются по формулам (30) п. 105. Используя кинематические уравнения Эйлера (формулы (5) п. 97) и соотношение (9), последнее равенство можно записать в виде

$$A \sin^2 \theta \dot{\psi} + Cr_0 \cos \theta = \text{const.} \quad (10)$$

Далее, поскольку связь, наложенная на волчок ( $h = l \cos \theta$ ), стационарна и идеальна, а активные силы имеют потенциал  $\Pi = mgh$ , не зависящий

явно от времени, то полная механическая энергия постоянна (п. 88):

$$E = T + \Pi = \text{const.}$$

Здесь  $T$  — кинетическая энергия волчка, которая, согласно теореме Кенига (п. 83), вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}Cr^2,$$

где  $v_G = \dot{h}$  — скорость центра масс волчка. Используя кинематические уравнения Эйлера, соотношение (9) и равенство  $\dot{h} = -l \sin \theta \dot{\theta}$ , запишем интеграл энергии в виде

$$(A + ml^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + A \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + 2mgl \cos \theta = \text{const.} \quad (11)$$

Интегралы (9)–(11) позволяют свести решение задачи о движении волчка к квадратурам. Мы не будем исследовать движение во всей полноте, а рассмотрим только один частный случай. Пусть в начальный момент волчок закручен вокруг оси симметрии и поставлен на плоскость без начальной скорости центра масс и пусть в начальный момент ось симметрии волчка наклонена к вертикали под углом  $\theta_0$ . Это означает, что при  $t = 0$  выполнены равенства

$$\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\varphi} = r_0.$$

Кроме того, как мы предположили с самого начала, проекция центра масс на плоскость  $OXY$  имеет скорость, равную нулю.

Для таких начальных данных интегралы (10) и (11) можно переписать в следующем виде:

$$A \sin^2 \theta \dot{\psi} = Cr_0(\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad (12)$$

$$(A + ml^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + A \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 = 2mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta). \quad (13)$$

Из (12) находим

$$\dot{\psi} = \frac{Cr_0(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{A \sin^2 \theta}. \quad (14)$$

Используя (14), интеграл (13) можно записать в виде

$$A \sin^2 \theta (A + ml^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 = f(\theta), \quad (15)$$

где

$$f(\theta) = (\cos \theta_0 - \cos \theta)[2Amgl \sin^2 \theta - C^2 r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)]. \quad (16)$$

Левая часть равенства (15) неотрицательна. Поэтому угол  $\theta$  может принимать только такие значения, для которых  $f(\theta) \geq 0$ . Отсюда следует, что  $\theta \geq \theta_0$ , так как при  $\theta < \theta_0$  функция  $f(\theta)$  представляет собой произведение двух сомножителей, имеющих противоположные знаки. Угол  $\theta$  колеблется между  $\theta_0$  и значением  $\theta_1$ , являющимся ближайшим к  $\theta_0$  корнем уравнения  $f(\theta) = 0$ . Отметим, что  $\theta_1 < \pi$ , так как  $f(\pi) = -(1 + \cos \theta_0)^2 C^2 r_0^2 < 0$ . Таким образом, при движении волчка выполняются неравенства  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < \pi$ . Длина отрезка  $OD$  (рис. 116) все время удовлетворяет неравенствам

$$l \sin \theta_0 \leq OD \leq l \sin \theta_1.$$

Поэтому траектория точки  $D$  на опорной плоскости заключена между двумя концентрическими окружностями радиусов  $l \sin \theta_0$  и  $l \sin \theta_1$  с центром в точке  $O$ .

Из (14) следует, что когда  $\theta$  принимает во время движения свое начальное значение  $\theta_0$ , то  $\dot{\psi} = 0$ . Отсюда вытекает, что траектория точки  $D$  имеет на внутренней окружности радиуса  $l \sin \theta_0$  точки возврата (рис. 116).

Если начальная угловая скорость  $r_0$  вращения волчка вокруг оси симметрии велика, то угол  $\theta$  мало отличается от своего начального значения. Действительно, приравняв нулю квадратную скобку в выражении (16) для функции  $f(\theta_1)$ , получим, что с погрешностью порядка  $1/r_0^3$  угол  $\theta_1$  будет вычисляться по формуле

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2Amgl \sin \theta_0}{C^2 r_0^2}.$$

Отсюда видно, что  $\theta_1$ , а следовательно, и  $\theta$  сколь угодно близки к  $\theta_0$ , если величина  $r_0$  достаточно велика.

**112. Влияние трения на движение волчка.** В действительности неподвижная плоскость, на которую опирается волчок, не является абсолютно гладкой, а волчок заканчивается не острием, а поверхностью вращения, более или менее заостренной, так что точка касания  $D$  волчка и плоскости не лежит на оси симметрии. По этим причинам движение волчка будет иным, нежели то движение, которое описано в п. 111.

Один из самых интересных эффектов влияния силы трения состоит в том, что эта сила может приблизить ось симметрии волчка к вертикали. Рассмотрим этот эффект с качественной стороны, опираясь на теорему об изменении кинетического момента. Пусть волчок быстро вращается вокруг оси симметрии и без начальной скорости центра масс поставлен на плоскость так, что его ось симметрии составляет с вертикалью некоторый ненулевой острый угол  $\theta_0$ .

Кинетический момент  $\mathbf{K}$  волчка относительно центра масс в начальный момент направлен как показано на рис. 117. Пусть  $D$  — точка ножки волчка, которой он касается опорной плоскости. Ножка теперь уже не принимается за острие. Сила трения  $\mathbf{F}$  направлена в сторону, противоположную скорости точки  $D$ . Момент  $\mathbf{M}$  силы трения относительно центра масс направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр масс  $G$  и вектор  $\mathbf{F}$ . Вектор  $\mathbf{M}$  можно представить в виде суммы  $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ , где вектор  $\mathbf{M}_1$  перпендикулярен  $\mathbf{K}$ , а вектор  $\mathbf{M}_2$  коллинеарен вектору  $\mathbf{K}$ , но (в ситуации, представленной на рис. 117) направлен противоположно  $\mathbf{K}$ . По теореме об изменении кинетического момента скорость конца вектора  $\mathbf{K}$  равна  $\mathbf{M}$ . Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{K}$ , уменьшаясь по величине (из-за наличия составляющей  $\mathbf{M}_2$  момента силы трения), стремится занять вертикальное положение (из-за наличия составляющей  $\mathbf{M}_1$  момента силы трения). Таким образом, вектор  $\mathbf{K}$ , а вместе с ним и ось симметрии волчка под влиянием трения стремятся к вертикали. Если действие трения будет достаточно продолжительным, то ось волчка может в конце концов занять строго вертикальное положение и останется в этом положении неподвижной. В этом случае говорят, что волчок «спит».

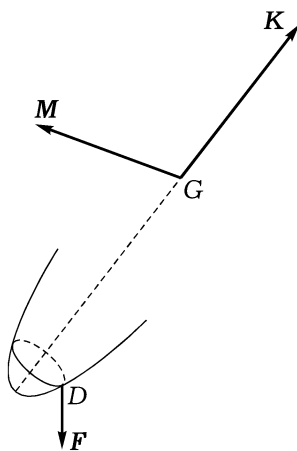


Рис. 117

### 113. Движение однородного шара по плоскости при наличии трения.

Пусть однородный шар массой  $m$  и радиусом  $a$  движется по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости. Введем две системы координат: неподвижную  $OXYZ$  с вертикальной осью  $OZ$  и началом  $O$ , совпадающим с произвольной точкой опорной плоскости, и поступательно движущуюся  $GXYZ$  с началом в центре масс шара  $G$  и осями, параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат (рис. 118).

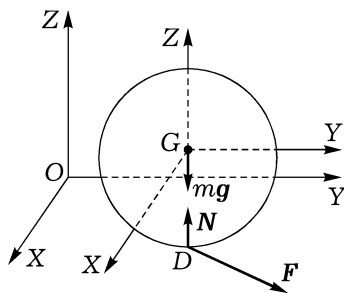


Рис. 118

Реакцию плоскости  $\mathbf{R}$  представим в виде суммы двух сил:  $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{N}$  — нормальная реакция плоскости, а  $\mathbf{F}$  — сила трения. Если  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость шара, а  $\mathbf{v}_G$  — скорость центра масс,

то скорость  $\mathbf{v}_D$  точки  $D$  шара, которой он касается плоскости, вычисляется по формуле

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{GD}. \quad (17)$$

Сила трения скольжения определяется соотношением

$$\mathbf{F} = -kN\mathbf{u}, \quad (18)$$

где  $k$  — коэффициент трения,  $\mathbf{u}$  — единичный вектор, направленный вдоль скорости точки  $D$ :  $\mathbf{v}_D = v_D\mathbf{u}$ .

Из теоремы о движении центра инерции имеем

$$m \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}. \quad (19)$$

Пусть  $\mathbf{K}_G$  — кинетический момент шара относительно центра масс. Тогда, учитывая, что момент инерции однородного шара радиусом  $a$  и массой  $m$  относительно любого диаметра равен  $\frac{2}{5}ma^2$ , имеем

$$\mathbf{K}_G = \frac{2}{5}ma^2\boldsymbol{\omega}. \quad (20)$$

Теорема об изменении кинетического момента для движения относительно центра масс дает уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{5}{2ma^2}\overline{GD} \times \mathbf{R}. \quad (21)$$

Пусть  $X_G, Y_G, Z_G$  — координаты центра масс в системе  $OXYZ$ , а  $F_X, F_Y$  — проекции силы трения на оси  $OX$  и  $OY$ . Уравнения (11) в скалярной форме запишутся в виде

$$\frac{d^2 X_G}{dt^2} = \frac{1}{m}F_X, \quad \frac{d^2 Y_G}{dt^2} = \frac{1}{m}F_Y, \quad \frac{d^2 Z_G}{dt^2} = -g + \frac{1}{m}N. \quad (22)$$

Так как  $Z_G = a = \text{const}$ , то последнее из этих уравнений даст  $N = mg$ , т. е. нормальная реакция плоскости равна весу шара, причем этот вывод не зависит от того, скользит шар по плоскости ( $\mathbf{v}_D \neq 0$ ) или нет ( $\mathbf{v}_D = 0$ ).

Если  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  — проекции вектора  $\boldsymbol{\omega}$  на оси  $GX, GY, GZ$ , то векторное уравнение (21) дает следующие три скалярных уравнения:

$$\frac{d\omega_X}{dt} = \frac{5}{2ma}F_Y, \quad \frac{d\omega_Y}{dt} = -\frac{5}{2ma}F_X, \quad \frac{d\omega_Z}{dt} = 0. \quad (23)$$

Последнее из этих уравнений показывает, что при движении шара проекция его угловой скорости на вертикаль остается постоянной. Это заключение имеет место независимо от наличия или отсутствия скольжения шара.

Пусть в начальный момент  $v_D \neq 0$ , т. е. имеется скольжение. Так как  $N = mg$ , то из (18) получаем, что при наличии скольжения шара сила трения постоянна по величине:  $F = kmg$ . Покажем, что она постоянна и по направлению. Для этого продифференцируем обе части равенства (17) по времени и воспользуемся уравнениями (19), (21) и равенствами  $\mathbf{R} = -mg + \mathbf{F}$ ,  $\overline{GD} = \frac{a}{g}\mathbf{g}$ . Получим

$$\frac{dv_D}{dt} = \frac{7}{2m}\mathbf{F}. \quad (24)$$

Заменив здесь  $v_D$  на  $v_D\mathbf{u}$ , а  $\mathbf{F}$  — на правую часть равенства (18), получим

$$\frac{dv_D}{dt}\mathbf{u} + v_D\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{7}{2}kg\mathbf{u}. \quad (25)$$

Так как  $\mathbf{u}$  — единичный вектор, то вектор  $d\mathbf{u}/dt$  перпендикулярен  $\mathbf{u}$ . Поэтому из (25) следует, что

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dv_D}{dt} = -\frac{7}{2}kg. \quad (26)$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{u}$  имеет постоянное направление и, следовательно, сила трения постоянна:

$$\mathbf{F} = -kmg\mathbf{u}. \quad (27)$$

Величина скорости точки  $D$ , согласно (26), изменяется во времени по закону

$$v_D(t) = v_D(0) - \frac{7}{2}kgt. \quad (28)$$

Если обозначить через  $\alpha$  постоянный угол, который составляет скорость точки  $D$  с осью  $OX$ , то из первых двух уравнений (22), получим

$$\begin{aligned} X_G(t) &= -\frac{1}{2}kg \cos \alpha \cdot t^2 + \dot{X}_G(0)t + X_G(0), \\ Y_G(t) &= -\frac{1}{2}kg \sin \alpha \cdot t^2 + \dot{Y}_G(0)t + Y_G(0). \end{aligned} \quad (29)$$



Первые два уравнения из (23) дают

$$\omega_X(t) = \omega_X(0) - \frac{5kg \sin \alpha}{2a} t, \quad \omega_Y(t) = \omega_Y(0) + \frac{5kg \cos \alpha}{2a} t. \quad (30)$$

Из (29) следует, что если в начальный момент скорость центра масс и скорость точки касания не коллинеарны, то на стадии движения со скольжением центр шара движется по параболе. Согласно (28), такое движение происходит до момента  $t = t_*$  где

$$t_* = \frac{2v_D(0)}{7kg}. \quad (31)$$

При  $t = t_*$  имеем  $v_D = 0$ ; скольжение прекращается и начинается стадия качения шара (с верчением). Так как  $v_D = 0$ , то из (24) следует, что на стадии качения сила трения равна нулю. Из (22) тогда получаем, что центр масс движется по прямой. Согласно (23), угловая скорость  $\omega$  шара при качении постоянна по величине и направлению. Точка  $D$  на плоскости движется по прямой, а на поверхности шара — по неизменной окружности, плоскость которой перпендикулярна вектору  $\omega$ .

При переходе в режим качения центр шара движется по касательной к параболе (29). Если эта касательная составляет тупой угол с начальной скоростью центра шара, то шар может повернуть назад: явление, хорошо известное игрокам на бильярде.

#### 114. Об уравнениях движения тяжелого тела произвольной выпуклой формы.

Пусть тело движется по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее одной точкой своей выпуклой поверхности, не имеющей заострений и ребер. Движение происходит в поле тяжести.

Движение тела будем изучать по отношению к неподвижной системе координат  $OXYZ$  с началом в некоторой точке опорной горизонтальной плоскости и осью  $OZ$ ,

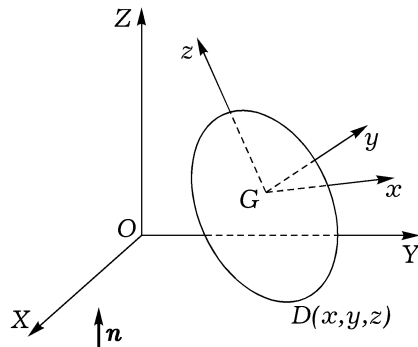


Рис. 119

направленной вертикально вверх (рис. 119). Единичный вектор этой оси обозначим  $n$ . С движущимся телом жестко свяжем систему координат  $Gxyz$  с началом в центре масс тела и осями, направленными вдоль главных центральных осей инерции. Радиус-вектор  $\rho$  точки  $D$ , которой тело касается плоскости, относительно центра масс имеет в

системе координат  $Gxyz$  компоненты  $x, y, z$ . Уравнение поверхности, ограничивающей тело, в системе координат  $Gxyz$  запишем в виде

$$f(x, y, z) = 0, \quad (32)$$

выбрав знак функции  $f$  так, чтобы совпадающий с  $\mathbf{n}$  единичный вектор внутренней нормали к поверхности (32) в точке  $D$  вычислялся по формуле

$$\mathbf{n} = -\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}. \quad (33)$$

Пусть  $m$  — масса тела,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{v}$  — скорость центра масс,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость тела,  $\mathbf{K}$  — его кинетический момент относительно центра масс, а  $\mathbf{R}$  — реакция плоскости. Уравнения движения тела можно записать в виде двух векторных уравнений:

$$\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -g\mathbf{n} + \frac{1}{m}\mathbf{R} \quad (34)$$

и

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R}, \quad (35)$$

выражающих теоремы об изменении количества движения и кинетического момента. В (34), (35) точкой обозначается дифференцирование по времени в подвижной системе координат  $Gxyz$ .

Вектор  $\mathbf{n}$  постоянен относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$ , поэтому он удовлетворяет уравнению Пуассона (см. п. 105)

$$\dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0. \quad (36)$$

Уравнения (34)–(36) справедливы и для движения без скольжения, и для случая движения со скольжением при наличии трения, и для абсолютно гладкой плоскости. Дополнительные к (34)–(36) уравнения, отражающие характер взаимодействия тела и плоскости, для каждого из этих случаев различны.

Пусть движение происходит без скольжения. Тогда скорость точки  $D$  касания тела и плоскости равна нулю. Это приводит к такому векторному уравнению связи:

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = 0. \quad (37)$$

Уравнения (34)–(37) с учетом (32), (33) представляют собой полную систему уравнений, позволяющую определить двенадцать неизвестных

величины:  $v_x, v_y, v_z, p, q, r, x, y, z, R_x, R_y, R_z$  — компонент векторов  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}$  в подвижной системе координат  $Gxyz$ .

Из теоремы об изменении кинетической энергии следует, что при отсутствии скольжения полная механическая энергия тела постоянна, т. е.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}) = \text{const.} \quad (38)$$

Пусть теперь плоскость абсолютно гладкая. Тогда реакция  $\mathbf{R}$  ортогональна плоскости:

$$\mathbf{R} = N\mathbf{n}. \quad (39)$$

Уравнение связи выражает условие того, что скорость точки  $D$  тела направлена горизонтально и имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = 0. \quad (40)$$

Пусть  $X_G, Y_G, Z_G$  — координаты центра масс в неподвижной системе  $OXYZ$ . Соотношение (40) может быть также представлено в форме равенства

$$\dot{Z}_G = -\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \quad (41)$$

которое, как нетрудно видеть, является следствием геометрической связи  $Z_G = -(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})$ .

Уравнения (34), записанные в системе координат  $OXYZ$ , имеют вид

$$\ddot{X}_G = 0, \quad \ddot{Y}_G = 0, \quad \ddot{Z}_G = -g + \frac{N}{m}. \quad (42)$$

Из первых двух уравнений следует, что в случае абсолютно гладкой плоскости проекция центра масс тела на опорную плоскость движется равномерно и прямолинейно. А третье уравнение с учетом соотношений (41) и (36) позволяет найти выражение для величины нормальной реакции:

$$N = mg - m\mathbf{n} \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]. \quad (43)$$

Уравнения (35), (36) с учетом (32), (33), (39), (43) образуют систему уравнений для нахождения шести неизвестных  $p, q, r, x, y, z$ . Когда эти величины найдены, реакция и закон движения центра масс тела по вертикали определяются из (43) и (42).

Отметим, что в случае абсолютно гладкой плоскости помимо интеграла энергии (38) и указанных выше интегралов, связанных с движением проекции центра масс на опорную плоскость, есть еще интеграл, выражающий постоянство проекции кинетического момента тела на вертикаль:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = \text{const.} \quad (44)$$

Этот интеграл следует из теоремы об изменении кинетического момента, так как внешние силы, действующие на тело (сила тяжести и реакция плоскости), направлены вертикально и не создают момента относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс тела.

Рассмотрим теперь случай движения тела со скольжением при наличии трения, подчиняющегося законам Кулона. Пусть  $\mathbf{v}_D = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$  — скорость точки  $D$  шара и  $\mathbf{v}_D \neq 0$ . Тогда реакцию плоскости  $\mathbf{R}$  можно представить в виде

$$\mathbf{R} = N\mathbf{n} + \mathbf{F}, \quad (45)$$

где  $N\mathbf{n}$  — нормальная реакция плоскости, а  $\mathbf{F}$  — сила трения, которая при заданном коэффициенте трения  $k$  определяется равенством

$$\mathbf{F} = -kN \frac{\mathbf{v}_D}{v_D}. \quad (46)$$

Уравнение связи, как и в случае абсолютно гладкой плоскости, записывается в виде равенства (41), а величина нормальной реакции вычисляется по формуле (43).

При исследовании движения во всех трех рассмотренных случаях следует иметь в виду, что величина нормальной реакции плоскости должна быть неотрицательной. В противном случае возможен подскок тела над плоскостью.