В чем и как нужно изменить формулы (6) и (7)? Планк говорит: механика остается в силе, но нужно изменить начальные условия. Энергия осциллатора определяется начальными условиями. По принципу Больцмана возможна любая энергия. Планк противопоставил этому утверждение: энергия осциллатора может иметь только совершенно определенные значения, а именно:

$$0,\ h\nu,\ 2h\nu,\ 3h\nu, \ldots,$$

где h — некоторая постоянная. Это не выводится. Это — совершенно неожиданный „дикий" постулат. Механике он не противоречит, так как это — *статистический* постулат.

Энергия осциллатора

$$W = \nu S,$$

где S — площадь соответствующего эллипса на фазовой плоскости[1]. Поэтому постулат Планка можно сформулировать так: на фазовой диаграмме возможны только те эллипсы, для которых

$$S = nh \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Иначе говорят так: энергия осциллатора не может быть произвольной, она *квантуется*. Квант (доза) энергии равен $h\nu$; он тем больше, чем больше частота.

ОДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28/XI 1930 г.)

Вычисление средней энергии квантованного осциллатора. Квантовые формулы для спектральной плотности равновесного излучения и для энергии твердого тела. Понятие адиабатического инварианта. Адиабатическая инвариантность отношения средней кинетической энергии к частоте (на примерах).

Планк предположил, что энергия осциллатора может принимать только дискретный ряд значения

$$W = 0,\ h\nu,\ 2h\nu, \ldots,\ nh\nu, \ldots, \tag{1}$$

причем вероятность того, что осциллатор обладает энергией $nh\nu$, т. е. находится в n-ом состоянии, есть

$$P_n = Ae^{-nh\nu/k\Theta}.$$

[1] [См. 9-ю лекцию.]

Вычислим, исходя из этого постулата, среднюю энергию осциллатора:

$$\overline{W}=\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \cdot Ae^{-nh\nu/k\Theta}, \tag{2}$$

причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n=\sum_{n=0}^{\infty} Ae^{-nh\nu/k\Theta}. \tag{3}$$

Исключая A, получаем:

$$\overline{W}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/k\Theta}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/k\Theta}}.$$

Как и в предыдущей лекции, обозначим

$$\alpha=1/k\Theta. \tag{4}$$

Тогда

$$\overline{W}=I_1(\alpha)/I_0(\alpha), \tag{5}$$

где теперь

$$I_0=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\alpha}, \quad I_1=\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1(\alpha)=-I_0'(\alpha).$$

I_0 есть сумма геометрической прогрессии:

$$I_0(\alpha)=\frac{1}{1-e^{-h\nu\alpha}}. \tag{6}$$

Дифференцируя это выражение по α, получаем:

$$I_1(\alpha)=\frac{h\nu e^{-h\nu\alpha}}{(1-e^{-h\nu\alpha})^2}. \tag{7}$$

Подставляя (6), (7) и (4) в (5), мы приходим к следующему выражению для средней энергии осциллатора:

$$\overline{W}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/k\Theta}-1}. \tag{8}$$

Здесь средняя энергия уже существенно зависит от частоты осциллатора. Подставляя выражение (8) в формулу для плотности энергии излучения:

$$\rho\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{W},$$

находим:

$$\rho\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k\Theta}-1}.$$

Таким образом, гипотеза Планка приводит к формуле для спектральной плотности равновесного излучения, которая, как было сказано в прошлой лекции, находится (при соответствующем выборе константы h) в полном согласии с опытом.

Применим выражение Планка для $\overline{W}$ к задаче о теплоемкости твердого тела. Энергия твердого тела, состоящего из N атомов, колеблющихся около своих положений равновесия с одинаковой собственной частотой ν, равна

$$E = 3N\overline{W} = \frac{3N}{e^{h\nu/k\Theta}-1}. \tag{9}$$

Дифференцируя (9) по Θ, мы найдем выражение для теплоемкости, хорошо передающее качественный ход зависимости теплоемкости от температуры, наблюдаемый на опыте[1].

Если

$$h\nu/k\Theta \ll 1,$$

имеем приближенно:

$$\overline{W} = \frac{h\nu}{\left(1+\frac{h\nu}{k\Theta}\right)-1} = k\Theta, \tag{10}$$

т. е. формула (9) переходит в классическую. Посмотрим, могут ли квантовые закономерности, т. е. отличие (9) от (10), быть заметными в случае макроскопических электромагнитных колебаний.

Так как $k = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ эрг/град, имеем при $\Theta = 300°$ (грубо):

$$k\Theta = 4\cdot 10^{-14} \text{ эргов.}$$

---

[1] [См. 10-ю лекцию.]

Возьмем $\nu = 10^{10}$ сек$^{-1}$, что соответствует длине волны 3 см. Тогда, поскольку $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ эрг · сек, получаем (грубо):

$$h\nu = 6 \cdot 10^{-17} \text{ эргов};$$

$$h\nu/k\Theta \sim 10^{-3} \ll 1.$$

Таким образом, здесь квантовые закономерности не будут сказываться; они лежат далеко за пределами чувствительности наших приборов.

Совсем иначе обстоит дело для видимого света. Возьмем длину волны $6 \cdot 10^{-5}$ см, т. е. $\nu = 5 \cdot 10^{14}$. Имеем (грубо):

$$h\nu = 3 \cdot 10^{-12};$$

$$h\nu/k\Theta \sim 100;$$

$$\overline{W} = k\Theta \cdot 100 \cdot e^{-100}.$$

Средняя энергия осциллатора ничтожно мала по сравнению с $k\Theta$.

Как было сказано в предыдущей лекции, осциллатор Планка движется по законам классической механики. Точка, изображающая движение осциллатора на фазовой плоскости, движется по эллиптической орбите. Энергия осциллатора на данной орбите постоянна; она задана квантовыми условиями (1).

Согласно классической электродинамике, электрон, совершающий гармоническое колебание, должен был бы излучать. Осциллатор Планка излучает только при переходе из одного состояния в другое; при этом частота его излучения та же, что и частота обращения по эллиптической орбите на фазовой плоскости, одинаковая для всех орбит.

Бор, исходя из ядерной модели атома, предложенной Резерфордом, перенес на атом квантовые представления Планка. Ему пришлось при этом оторвать частоту излучения от частоты обращения электрона по орбите.

При квантовании движения осциллатора Планк считал параметры осциллатора неизменными. Рассмотрим поведение осциллатора при очень медленных изменениях параметров, например поведение маятника при его укорочении. Энергия осциллатора будет меняться за счет работы, производимой над ним внешними силами при изменении параметра. Этот случай был разобран Релеем.

Оказывается, что при очень медленном изменении параметров осциллатора отношение W/ν остается постоянным. Таким образом, при медленном изменении параметров квантованный осциллатор сохраняет свою квантованность, т. е. условие

$$W/\nu = nh$$

остается в силе. Величина W/ν является, как принято выражаться, адиабатическим инвариантом гармонического осциллатора. (Адиабатическим инвариантом называют величину, остающуюся неизменной при медленном изменении параметров.)

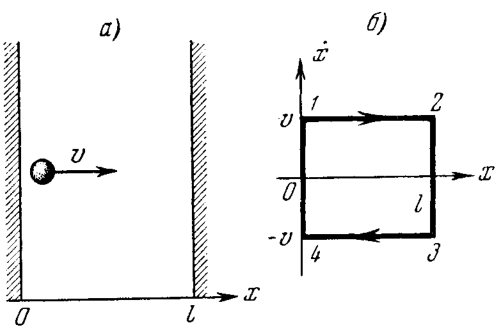

Рис. 32.

Рассмотрим случай шарика, движущегося по инерции между двумя стенками, находящимися друг от друга на расстоянии l (рис. 32, *а*), от которых он отражается по закону абсолютно упругого удара. Шарик совершает периодическое движение с неизменной по абсолютной величине скоростью $\pm v$. На фазовой плоскости движение изображается прямоугольником 1, 2, 3, 4 (рис. 32, *б*). Мы будем считать, что из 2 в 3 и из 4 в 1 совершается мгновенный перескок (на самом деле движение, конечно, сложнее).

Как изменится движение, если мы начнем очень медленно уменьшать параметр l, т. е. сближать стенки?

Применим теорему вириала[1]. Здесь

$$2\overline{T} = -\overline{V} = -\left\{ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X'x_1 dt + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X''x_2 dt \right\},$$

где X' и X'' — силы, действующие на шарик со стороны первой и второй стенки. Так как

$$x_1 = 0, \quad x_2 = l,$$

имеем:

$$2\overline{T} = -l\overline{X''},$$

или

$$\overline{X''} = -\frac{2\overline{T}}{l},$$

[1] [См. 9-ю лекцию.]

где $\overline{X''}$ — среднее значение силы за период (среднее значение силы, с которой шарик действует на стенку, есть — $\overline{X''}$).

При сближении стенок на $|\Delta l|$ ($\Delta l < 0$) мы совершаем работу

$$\Delta A = -\frac{2\overline{T}}{l}\Delta l.$$

Эта работа равна увеличению средней энергии движения шарика:

$$\Delta\overline{T} = -\frac{2\overline{T}}{l}\Delta l,$$

откуда

$$\frac{\Delta\overline{T}}{\overline{T}} = -2\frac{\Delta l}{l}. \tag{11}$$

Период движення шарика есть

$$\tau = \frac{2l}{v}. \tag{12}$$

Изменение его, вследствие сближения стенок, равно

$$\Delta\tau = 2\frac{\Delta l \cdot v - l \cdot \Delta v}{v^2}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta v}{v}. \tag{14}$$

В данном случае

$$2\overline{T} = mv^2, \quad \Delta\overline{T} = mv\Delta v,$$

т. е.

$$\frac{\Delta\overline{T}}{\overline{T}} = 2\frac{\Delta v}{v}. \tag{15}$$

Подставляя в (14) $\frac{\Delta l}{l}$ из (11) и $\frac{\Delta v}{v}$ из (15), получаем:

$$\Delta\tau \cdot \overline{T} + \tau \cdot \Delta\overline{T} = 0,$$

т. е.

$$\overline{T}\tau = \text{const},$$

или

$$\frac{2\overline{T}}{\nu} = \text{const}, \tag{16}$$

где

$$\nu = 1/\tau$$

есть частота колебаний шарика.

Площадь цикла на фазовой плоскости равна

$$S = 2mvl = mv^2\frac{2l}{v} = 2\overline{T}\tau = \frac{2\overline{T}}{\nu}.$$

Это — частный случай полученного ранее соотношения [1]. На основании (16) имеем:

$$S = \text{const},$$

— площадь цикла есть адиабатический инвариант.

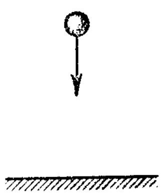

Рис. 33.

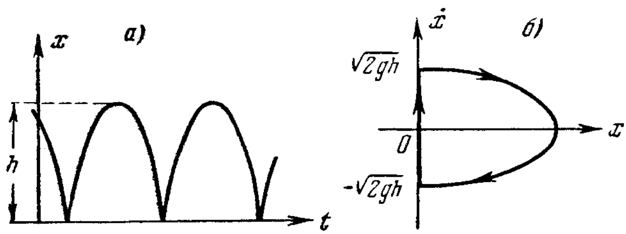

Рис. 34.

Можно рассмотреть аналогичную задачу для немного более сложного случая (рис. 33): упругий мячик движется вертикально под действием силы тяжести, отскакивая от горизонтального стола, причем ускорение тяжести (параметр) медленно меняется. Здесь график зависимости координаты от времени и траектория на фазовой плоскости имеют вид, показанный соответственно на рис. 34, *а* и *б*. Применяя теорему вириала, мы найдем также и здесь, что

$$\frac{2\overline{T}}{\nu} = \text{const}.$$

Рассмотрим колебательный контур (рис. 19), емкость которого медленно изменяется (раздвигаются пластины конденсатора). Здесь

$$T = \frac{LQ^2}{2}, \quad U = \frac{Q^2}{2C},$$

[1] [См. 9-ю лекцию.]

где Q — заряд конденсатора, меняющийся по закону

$$Q = A \sin(\omega t + \varphi),$$

причем

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Закон сохранения энергии нам дает:

$$\frac{L\dot{Q}^2}{2} + \frac{Q^2}{2C} = W = \text{const}.$$

На фазовой плоскости $(Q, L\dot{Q})$ изображающая точка описывает эллипс с полуосями

$$\sqrt{2CW}, \quad \sqrt{2LW}.$$

Вычислим работу, совершаемую над конденсатором при изменении емкости. В каких случаях работа, потребная для изменения емкости, равна изменению энергии конденсатора $Q^2/2C$? Тогда, когда работа целиком идет на изменение этой энергии. Так обстоит дело, если конденсатор изолирован и, следовательно, его заряд Q остается постоянным.

Пусть мы изменили емкость изолированного конденсатора на dC, раздвинув или сблизив пластины. Работа раздвижения пластин изолированного конденсатора

$$dA = dU = d\frac{Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{2C^2}dC = -\frac{U}{C}dC$$

(положительная работа $dA > 0$ соответствует $dC < 0$, т. е. раздвижению пластин). Но можно утверждать большее, а именно: работа раздвижения *всегда* выражается формулой

$$dA = -\frac{U}{C}dC, \tag{17}$$

так как сила, действующая между пластинами, не зависит от того, изолированы они или нет (последнее имеет место, например, если они соединены с источником постоянного напряжения). Но рассмотрение изолированного конденсатора позволяет получить формулу (17) наиболее просто.

Если изменение параметра очень медленное, то можно считать величину $\dot{C}/C$ постоянной в течение одного периода колебаний. Тогда работа, совершаемая за период колебаний τ, будет

$$\Delta A = -\frac{\dot{C}}{C}\int_0^\tau U dt = -\frac{\dot{C}}{C}\overline{U}\tau. \tag{18}$$

Но

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\Delta C}{\tau}, \tag{19}$$

где ΔC — изменение емкости за время τ. Подставляя (19) в (18), получаем:

$$\Delta A = -\frac{\Delta C}{2}\overline{U} = -\frac{\Delta C}{2}\frac{W}{C}.$$

Эта работа пошла на увеличение полной энергии W:

$$\Delta W = -\frac{\Delta C}{2}\frac{W}{C},$$

или

$$\frac{\Delta W}{W} = -\frac{\Delta C}{2C}. \tag{20}$$

С другой стороны,

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC},$$

откуда

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta C}{2C}. \tag{21}$$

Сравнивая (21) и (20), получаем:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} + \frac{\Delta W}{W} = 0. \tag{22}$$

В нашем случае (гармонический осциллатор)

$$W = 2\overline{T},$$

и, следовательно, на основании (22) мы снова получаем:

$$\frac{2\overline{T}}{\nu} = \text{const}.$$

Во всех рассмотренных нами случаях отношение средней кинетической энергии к частоте является адиабатическим инвариантом. Этот результат был обобщен на любую консервативную систему с одной степенью свободы [1].

[1] [Обобщение на случай n степеней свободы см. С. М. Рытов, Труды ФИАН, т. 2, вып. 1, стр. 41. Изд-во АН СССР, 1939].