электронов за экраном. Этот эффект обусловлен квантовыми свойствами заряженных частиц и изменением структуры вакуума полем внутри соленоида.

Лекция 8. Движение относительно неинерциальных систем отсчета

Во многих случаях для упрощения решения задачи или в целях практических приложений удобно рассматривать движение тел относительно неинерциальной системы отсчета. Здесь рассмотрено движение одной частицы во внешнем поле. Более содержательные задачи приведены в лекциях 9, 12, 13.

Лагранжиан частицы в инерциальной системе

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(\mathbf{r})\,. \tag{8.1}$$

1. Введем систему отсчета K', движущуюся поступательно относительно инерциальной системы K: ориентация базисных векторов $\mathbf{e}_n'$ системы K' остается неизменной относительно базисных векторов $\mathbf{e}_n$ системы K. Следовательно $\dot{\mathbf{e}}_n' = \dot{\mathbf{e}}_n = 0$. Радиусы-векторы частицы $\mathbf{r} = x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{r}' = x_n'\mathbf{e}_n'$ связаны соотношением $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$. Дифференцируя последнее равенство, находим $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u} + \dot{\mathbf{r}}'$, где $\mathbf{u}$ — скорость системы K'. Поскольку $\dot{\mathbf{e}}_n' = \dot{\mathbf{e}}_n = 0$, то $\dot{x}_n = u_n + \dot{x}_n'$.

Функция Лагранжа (8.1) после замены переменных приобретает вид

$$L(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}'^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + m\mathbf{u}\dot{\mathbf{r}}' - U(\mathbf{R} + \mathbf{r}').$$

Преобразуем скалярное произведение:

$$\mathbf{u}\dot{\mathbf{r}}' = \frac{d}{dt}\,\mathbf{u}\mathbf{r}' - \dot{\mathbf{u}}\mathbf{r}',$$

и опустим в лагранжиане функцию времени и полную производную. Тогда лагранжиан

$$L'(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}'^2}{2} - U_{\text{об}}(\mathbf{r}', t), \tag{8.2}$$

$$U_{\text{об}}(\mathbf{r}', t) = U(\mathbf{R} + \mathbf{r}') + m\mathbf{w}\mathbf{r}',$$

где $\mathbf{w}(t) = \dot{\mathbf{u}}$ — ускорение системы K'. Уравнения Лагранжа:

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{w}\,. \tag{8.3}$$

Если эти уравнения отождествить со вторым законом Ньютона, то величину $\mathbf{F} = -m\mathbf{w}$ следует интерпретировать как *силу инерции*, действующую на каждую частицу в однородном поле, эквивалентном полю тяготения.

2. Введем теперь систему K', которая имеет общее начало с системой K, однако базисные векторы $\mathbf{e}'_n$ вращаются относительно нее с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{e}'_n(t) = \Lambda_{nm}(t)\mathbf{e}_m$. Радиус-вектор частицы $\mathbf{r} = x_n\mathbf{e}_n = x'_k\mathbf{e}'_k$; $x'_k = \Lambda_{kn}x_n$. Дифференцируя $\mathbf{r} = x'_k\mathbf{e}'_k$, находим $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}'_k\mathbf{e}'_k + x'_k\dot{\mathbf{e}}'_k$. Согласно (2.8) $\dot{\mathbf{e}}'_k = [\mathbf{\Omega}\mathbf{e}'_k]$. Следовательно,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}'_k\mathbf{e}'_k + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]. \tag{8.4}$$

Учитывая (2.1), найдем компоненты $\dot{\mathbf{r}}$ в системе K':

$$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{e}'_i = \dot{x}'_i + [\Omega'_j\mathbf{e}'_j \cdot x'_k\mathbf{e}'_k]\,\mathbf{e}'_i = \dot{x}'_i + \varepsilon_{ijk}\Omega'_j x'_k,$$
$$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{e}'_i = \dot{x}_n\mathbf{e}_n\mathbf{e}'_i = \Lambda_{in}\dot{x}_n, \quad \Omega'_i = \mathbf{\Omega}\mathbf{e}'_i = \Lambda_{in}\Omega_n.$$

Подставляя (8.4) в (8.1), получим лагранжиан

$$L' = \frac{m}{2}\dot{x}'^2_i + m\varepsilon_{ijk}\dot{x}'_i\Omega'_j x'_k + \frac{m}{2}[\Omega'^2_k x'^2_i - (\Omega'_i x'_i)^2] - U(x'_n\mathbf{e}'_n). \tag{8.5}$$

Обобщенный импульс

$$p'_s = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_s} = m(\dot{x}'_s + \varepsilon_{sjk}\Omega'_j x'_k).$$

Очевидно, что $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = p'_s\mathbf{e}'_s$. Уравнения Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_s} = \dfrac{\partial L'}{\partial x'_s}$ приобретают вид

$$m\ddot{x}'_s = -m\varepsilon_{sjk}\dot{\Omega}'_j x'_k - 2m\varepsilon_{sjk}\Omega'_j\dot{x}'_k + m[\Omega'^2_k x'_s - (\Omega'_i x'_i)\Omega'_s] - \frac{\partial U}{\partial x'_s}. \tag{8.6}$$

Обычно уравнения движения (8.6) записывают в более компактной форме, вводя обозначения $\mathbf{v}' = \dot{x}'_i\mathbf{e}'_i$, $\mathbf{\Omega}' = \Omega'_i\mathbf{e}'_i$, где $\mathbf{e}'_i$ — «постоянные» единичные орты. Тогда (8.6) приобретает вид

$$m\dot{\mathbf{v}}' = -m[\dot{\mathbf{\Omega}}'\mathbf{r}'] - 2m[\mathbf{\Omega}'\mathbf{v}'] - m[\mathbf{\Omega}'[\mathbf{\Omega}'\mathbf{r}']] - \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'}. \tag{8.7}$$

Если это уравнение сопоставить второму закону Ньютона, то три слагаемых в правой части можно связать с силами инерции. Вектор $-2m[\mathbf{\Omega}'\mathbf{v}']$ называют *силой Кориолиса*, вектор $-m[\mathbf{\Omega}'[\mathbf{\Omega}'\mathbf{r}']]$ — *центробежной силой.* Лагранжиан, соответствующий уравнению (8.7):

$$L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} + m[\mathbf{\Omega}'\mathbf{r}']\mathbf{v}' + \frac{m}{2}[\mathbf{\Omega}'\mathbf{r}']^2 - U(\mathbf{r}'). \tag{8.8}$$

Обобщенная энергия, равная

$$H = \mathbf{v}'\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} - L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} - \frac{m}{2}[\mathbf{\Omega}'\mathbf{r}']^2 + U(\mathbf{r}'), \tag{8.9}$$

отличается от полной энергии на слагаемое, называемое центробежной энергией.

Пример 8.1. Две системы координат связаны преобразованием $x'_k = \Lambda_{kn} x_n$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(рис. 8.1). Найдем решение уравнения движения (8.7) свободной частицы.

Поскольку $\Omega' = (0, 0, \omega)$, то

$$\ddot{x}' = 2\omega\dot{y}' + m\omega^2 x', \quad \ddot{y}' = -2\omega x' + \omega^2 y', \quad \ddot{z}' = 0.$$

Очевидно, что $z' = c_3 + v_3 t$. Введя комплексную координату $u = x' + iy'$, получим уравнение $\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 u = 0$. Будем искать решение в виде $u \sim e^{-i\lambda t}$. Характеристическое уравнение имеет кратные корни $\lambda_{1,2} = \omega$. Следовательно, общее решение $u = (A + Bt)e^{-i\omega t}$, где $A = c_1 + ic_2$, $B = v_1 + iv_2$,

$$x' = \mathrm{Re}\, u = (c_1 + v_1 t)\cos\omega t + (c_2 + v_2 t)\sin\omega t,$$

$$y' = \mathrm{Im}\, u = -(c_1 + v_1 t)\sin\omega t + +(c_2 + v_2 t)\cos\omega t.$$

Решение уравнения (8.6) имеет вид $x'_k = \Lambda_{km} x_m$, где $x_m = c_m + v_m t$ — закон движения свободной частицы в инерциальной системе отсчета.

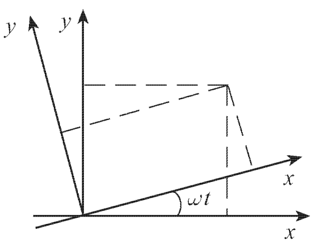

Рис. 8.1

Пример 8.2. *Космический лифт.* Предположим, что на экваторе возведена конструкция, в которой действует лифт. Найдем высоту, на которой скорость груза массой m станет равной местным первой и второй космическим скоростям.

На груз действуют сила натяжения каната N, сила тяжести и центробежная сила инерции. Если груз находится на расстоянии r от центра Земли, то $N = mg(R/r)^2 - m\omega^2 r$ или $N = m\omega^2(r_{\text{ст}}^3/r^2 - r)$, где ω угловая скорость вращения Земли, $r_{\text{ст}} = [gR^2/\omega^2]^{1/3}$ — радиус орбиты геостационарного спутника ($r_{\text{ст}} = 6,7R = 42164$ км). Если $r < r_{\text{ст}}$, то для подъема с постоянной скоростью к грузу необходимо приложить силу $N = mg(R/r)^2 - m\omega^2 r$, направленную вертикально вверх. Величина скорости груза в инерциальной системе отсчета $v = \omega r$. На расстоянии $r_{\text{ст}}$ от центра Земли $N = 0$: груз приобретет скорость $v_{\text{ст}} = \omega r_{\text{ст}}$, равную местной первой космической скорости. Если его не удерживать, то он будет неподвижен относительно лифта. При подъеме груза на расстояние $r > r_{\text{ст}}$ центробежная сила становится больше силы притяжения — груз необходимо удерживать. Из закона сохранения полной энергии найдем величину расстояния r_2, на котором груз приобретет местную вторую космическую скорость $m(\omega r_2)^2/2 - mgR^2/r_2 = 0 + 0$, $r_2 =$

$= 2^{1/3} r_{\text{ст}}$, $r_2 = 53123$ км; если его освободить, то он навсегда покинет Землю. Вот еще одна возможность запуска космических аппаратов.

Энтузиастом этой идеи выступает известный писатель-фантаст Артур Кларк. Сейчас он проживает на Цейлоне и уже нашел там место для привязки лифта. Конструкцию для лифта надо строить с крыши. Со стационарного спутника выпускают два троса — вверх и вниз. Затем подбирают их длину так, чтобы в процессе увеличения длины тросов вся система вращалась как целое с угловой скоростью ω. После зацепления нижнего конца за Землю можно заняться устройством лифта. Основная трудность — отсутствие материала необходимой прочности.